

Examen práctico

16 de diciembre de 2021

1. Consideramos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = m \frac{y}{x},$$

siendo $m \in [-1, 1]$ un parámetro.

- a) Probar que por todo punto (x_0, y_0) con $x_0 \neq 0$ pasa una única solución.
- b) Hallar la solución general y graficar las curvas solución discutiendo según m .

2. Se considera el sistema (*oscilador no lineal amortiguado*)

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -vf(x) - x \cos x \end{cases}$$

Supongamos que f es clase C^1 y además que $f(0) > 0$.

- a) Probar que el origen es un punto de equilibrio asintóticamente estable. ¿Cuáles son los demás puntos de equilibrio?
- b) Sean

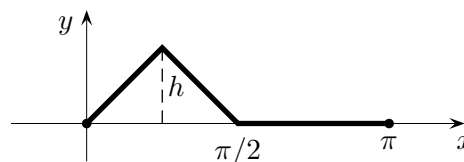
$$F(x) = \int_0^x f(u) du, \quad \text{y} \quad U(x) = x \sin x + \cos x,$$

y definamos

$$E(x, v) = \frac{1}{2} (v + F(x))^2 + U(x).$$

Calcular $\dot{E}(x, v)$ y concluir que E es una función de Lyapunov para el sistema basada en $(0, 0)$. ¿Se puede concluir de aquí la estabilidad asintótica?

3. Una cuerda de longitud π , cuyos extremos están fijos, tiene velocidad inicial 0 y desplazamiento inicial como se muestra en la figura.



- a) Escribir la posición inicial como una serie de Fourier.
- b) Hallar la deformación de la cuerda en función del tiempo (para $t > 0$).