

Examen. Diciembre 2024

1. Hallar la solución al problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x, 0) = h(x) , \ h \text{ definida en un intervalo } [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = g(x) , \ g \text{ definida en el intervalo } [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

para $h(x) = x(\pi - x)$, $g(x) = 4 \sin(3x)$. Discutir el tipo de convergencia que se tendrá en cada $t \geq 0$.

2. Sea $a > 0$ y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (a(x^2 + y), 3x^4 + 3x^2y)$. En este ejercicio estudiaremos la ecuación autónoma del plano dado por $(\dot{x}, \dot{y}) = f(x, y)$.

- a) Encontrar los puntos de equilibrio del sistema y determinar regiones del plano en base al signo de $\dot{x}$ (en dónde es positiva y en dónde negativa). ¿Se puede aplicar el teorema de Hartman-Grobman a estas singularidades? Justifique.
- b) Definimos $U : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ como $U(x, y) = x^n - y$, $n \in \mathbb{N}$. Hallar a y n para que las curvas de nivel de U contengan a las trayectorias del sistema (es decir, que dada cualquier solución $\phi(t)$, se cumpla $(U(\phi(t)))' = 0$, **como** si U fuera un hamiltoniano).
- c) Dibujar el diagrama de fase para el valor de a obtenido en la parte anterior y demostrar que no existen órbitas periódicas. ¿Cómo son los posibles comportamientos asintóticos de las distintas soluciones maximales del sistema?. Justifique. *Sug:* para responder la pregunta utilizar el teorema de Poincaré-Bendixon.
- d) Si f_T indica el mapa tiempo T , ¿se puede asegurar que dicho mapa exista para todo T ?. Para aquellos T en los que existe, sea A una región de $\mathbb{R}^2$ contenida en el cuadrante $x > 0, y > 0$. ¿Cómo se compara el área de A con la de la región transformada $f_T(A)$? La función U de la parte *b* no cumple exactamente la definición de Hamiltoniano. ¿Existe algún verdadero Hamiltoniano para este campo?.

Recordamos que el lema de Louville dice que $\det(\text{Jac}_x f_T) = e^{\int_0^t \text{tr}(\text{Jac}_{f_T(x)} F) dt}$.

3. Se consideran dos funciones f_1 y f_2 de clase C^∞ en $\mathbb{R}^2$ y a valores en $\mathbb{R}$. Supongamos que para todo $(t, x) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que $f_1(t, x) < f_2(t, x)$. Suponemos además que $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $\dot{x} = f_1(t, x)$, $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de la ecuación $\dot{x} = f_2(t, x)$, y que existe $t_0 \in I_1 \cap I_2$ tal que $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$.

- a) Mostrar que se cumple que $\varphi_1(t) \leq \varphi_2(t)$ para todo $t \in I_1 \cap I_2$ mayor que t_0 . *Sug:* observar que para valores suficientemente cercanos y mayores a t_0 se debe cumplir $\varphi_1(t) < \varphi_2(t)$ y suponer para un absurdo que en un primer tiempo $t_* > t_0$ se cumpla $\varphi_1(t_*) = \varphi_2(t_*)$.
- b) Usando la parte anterior y escape de compactos probar que la solución maximal al problema $x' = 2 + \sin(t + x^2)$, $x(0) = 0$ está definida para todo tiempo $t > 0$.
- c) (opcional) Demostrar lo mismo de la parte *a* pero asumiendo que $f_1(t, x) \leq f_2(t, x)$.