

Examen práctico

10 de febrero de 2022

1. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x, y) \begin{cases} y \log |y| & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0, \end{cases}$$

y consideremos el problema de valores iniciales

$$(1) \quad \begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

- a) Probar que f es continua pero no localmente Lipschitz (en todo $\mathbb{R}^2$).
- b) Mostrar que si $y_0 \in (0, 1)$, entonces la solución a (1) verifica $0 < y(x) < 1 \forall x \in \mathbb{R}$.
- c) Probar que el problema de valores iniciales (1) tiene solución única para todo $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Hacer un croquis del diagrama de fase.

2. Consideremos el *oscilador no lineal*

$$\ddot{x} + q(x) = 0,$$

siendo q una función localmente Lipschitz. Además supongamos que $q(0) = 0$ y que $xq(x) > 0$ en un entorno reducido de 0. Sea

$$V(x) = \int_0^x q(u) du.$$

- a) Probar que $E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + V(x)$ es constante en las soluciones.
 - b) Mostrar que en un entorno del origen ($x = 0, \dot{x} = 0$) las trayectorias en el espacio de fase son curvas simples cerradas simétricas con respecto a la reflexión en el eje x .
 - c) Supongamos que $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$ no son puntos de equilibrio, que $V(x_1) = V(x_2)$ y que $V(x) < V(x_1)$ si $x_1 < x < x_2$. Demostrar que hay una solución periódica que pasa por los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$. (*Sugerencia: la trayectoria que comienza en $(x_1, 0)$ necesariamente llega a $(x_2, 0)$ en tiempo finito y viceversa.*)
3. Supongamos que tenemos un estado de temperatura estacionario en una placa rectangular semiinfinita $[0, 1] \times [0, +\infty)$. Sea $u(x, y)$ la temperatura en el punto (x, y) , entonces u satisface la ecuación de Laplace

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Supondremos las condiciones de borde:

$$(i) \quad u(0, y) = u(1, y) = 0 = \lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y),$$

$$(ii) \quad u(x, 0) = 100 \text{ para } 0 < x < 1.$$

- a) Escribir la serie de senos correspondiente a la función constante 100 en el intervalo $(0, 1)$.
- b) Usar separación de variables para hallar funciones $X_k(x)$ e $Y_k(y)$ de manera que la función $u_k(x, y) = X_k(x)Y_k(y)$ satisface la ecuación de Laplace, siendo k cierto parámetro. Usar las condiciones de borde (i) para restringir los posibles valores de k .
- c) Usar series de Fourier para hallar $u(x, y)$