

Examen de febrero

1. Sea  $f(x, t) = \cos(x + t)$  y se considera la ecuación diferencial  $x' = f(x, t)$  definida en  $\mathbb{R}^2$ .
  - a) Mostrar que las soluciones maximales están definidas en  $\mathbb{R}$ .
  - b) Hallar los máximos y mínimos (relativos) de dichas soluciones maximales.
  - c) Hallar todas las constantes  $k$  para las que la recta  $x(t) = -t + k$  es solución.
  - d) En base a las partes anteriores, bosquejar el gráfico de las solución con  $x(0) = 0$ .

2. Hallar la solución formal en series de Fourier al problema

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} \\ u(x, 0) = h(x) , \text{ } h \text{ definida en un intervalo } [0, \pi] \\ u_t(x, 0) = g(x) , \text{ } g \text{ definida en el intervalo } [0, \pi] \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \end{cases}$$

para  $h(x) = x(\pi - x)$ ,  $g(x) = \frac{\pi - |2x - \pi|}{2}$ . Discutir el tipo de convergencia que se tendrá en cada  $t \geq 0$ .

En lo que sigue usamos la notación usual  $B(0, r)$  para bolas abiertas de centro 0 y radio  $r$ .

3. Consideramos un campo  $F$  en  $\mathbb{R}^3$  con una única singularidad que se da en el origen, que en la bola de centro 0 y radio 1 está dado por

$$F(x, y, z) = \left( -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 2z + xy, -\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + 3z + xz, 2z + y^2 \right)$$

mientras que en el complemento de la bola  $B(0, 10)$  vale

$$F(x, y, z) = -(x, y, z)$$

- a) Clasificar la singularidad y bosquejar el diagrama de fase localmente. Alcanza dibujar soluciones contenidas en el plano  $x, y$  y en el subespacio asociado al valor propio de parte real positiva.
- b) Mostrar que las soluciones son completas a futuro. **Sug:** utilizar escape de compactos.
- c) Mostrar que  $F$  es un campo completo. **Sug:** para el estudio a pasado utilizar el resultado visto en teórico.

Se llama variedad inestable local de la singularidad 0 al conjunto  $W_{\text{loc}}^u$  que se corresponde según el homeomorfismo de Hartmann-Grobman con el espacio propio del valor propio cuya parte real es positiva. Es local porque está restringido al entorno en el que el homeomorfismo de Hartmann-Grobman está definido.

Luego la variedad inestable de 0 se define como el conjunto  $W^u$  dado por las órbitas completas de los puntos en  $W_{\text{loc}}^u$ .

- d) Mostrar que es una curva contenida en  $B(0, 10)$ .
- e) Bosquejar un modelo plausible para el conjunto  $W^u$  y su clausura.