

Examen práctico

21 de julio de 2022

1. Se considera la siguiente ecuación diferencial:

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = 0,$$

con condición inicial $x(0) = 1, x'(0) = 0$.

- a) Poniendo $y = x'$ mostrar que y como función de x satisface la ecuación de Bernoulli

$$(B) \quad \frac{dy}{dx} + y = xy^{-1}$$

si y sólo si $x(t)$ satisface (1).

- b) Realizar el cambio de variable $z = y^2$ en (B) para resolver la ecuación y hallar la solución de (1).

2. Consideremos un sistema lineal

$$\dot{x} = A(t)x,$$

siendo $A(t)$ una función matricial periódica, de período T .

- a) Usar la ecuación para probar que si $\Phi(t, t_0)$ es la matriz fundamental basada en t_0 , entonces

$$\Phi(t + T, t_0) = \Phi(t, t_0)\Phi(T, t_0).$$

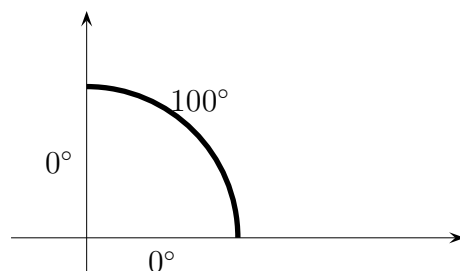
- b) Si definimos la matriz constante

$$B = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} A(s) ds,$$

mostrar que $P(t) := \Phi(t, t_0)e^{-tB}$ es periódica de período T .

- c) Probar que el cambio de variable $x = P(t)y$ transforma la ecuación $\dot{x} = A(t)x$ en una de coeficientes constantes.

3. Supongamos que tenemos un estado de temperatura estacionario en una placa que es un cuarto de circunferencia de radio a . Los radios se mantienen a temperatura 0 Celsius y el arco de circunferencia a 100 Celsius.



Si $u(r, \theta)$ es la función de temperatura en coordenadas polares, debe satisfacer la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0.$$

- a) Extender la función constante 100 en el intervalo $[0, \pi/2]$ a una función periódica impar. ¿Cuál es el período de la extensión? Graficar la extensión en el intervalo $[-\pi, \pi]$.
- b) Hallar la serie de Fourier de senos de la función constante 100 en el intervalo $[0, \pi/2]$.
- c) Hallar $u(r, \theta)$.