Facultad de Ciencias.
Matemática Discreta 2020

Práctico 5: Combinatoria

1. Si Óscar Tabárez convoca para un partido amistoso de la selección a 2 goleros, 6 defensas, 7 mediocampistas y 4 delanteros. ¿De cuántos modos es posible formar el equipo con un golero, 4 defensas, 4 mediocampistas y 2 delanteros?

2. Un comité de 6 personas será elegido entre 4 personas uruguayas y 4 extranjeras. De cuántas formas se puede hacer una selección si:

   a) No hay restricciones.
   b) Queremos que sean 3 uruguayos y 3 extranjeros.
   c) Queremos que haya un número par de extranjeros.
   d) Queremos que sean más extranjeros que uruguayos.
   e) Queremos que sean al menos 3 uruguayos.

3. ¿Cuántas relaciones de orden total admite un conjunto con n elementos?

4. ¿Cuál es la probabilidad de ganar el 5 de oro?

5. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{x, y, z\}$.

   a) ¿Cuántas funciones $f\colon A \mapsto B$ cumplen $f(1) = x$?
   b) ¿Cuántas funciones $f\colon A \mapsto B$ sobreyectivas cumplen $f(1) = f(2) = x$?
   c) ¿Cuántas funciones sobreyectivas $f\colon A \mapsto B$ cumplen $f(1) = x$ y $f(2) = y$?

6. De cuántas formas se puede elegir 5 cartas de una baraja común (de 48 cartas) y obtener:

   a) Cinco cartas del mismo palo.
   b) Cuatro ases.
   c) Al menos cuatro cartas del mismo valor.
   d) Tres ases y dos sotas.
   e) Tres ases y un par.

7. Justificar el valor de las manos de poker en base a su probabilidad.

8. ¿De cuántas maneras podemos ordenar tres 'x', tres 'y' y tres 'z' sin que aparezca tres veces consecutivas la misma letra?

9. *a*) Hallar la cantidad de palabras que pueden obtenerse permutando las letras de

   `MATEMATICA`

   b) ¿Y si la primera letra debe ser `E`?

   c) ¿Cuántas de ellas incluyen la palabra MATE?

10. Calcule cuántas permutaciones de los dígitos de 123456789 cumplen que:

    a) Ningún dígito está en su posición original.

    b) Los pares no están en su posición original.

    c) Los pares no están en su posición original y la secuencia debe empezar con los dígitos 1, 2, 3, 4 en algún orden.

11. ¿Cuántas palabras de longitud 6 existen que no tengan dos consonantes o dos vocales juntas?

12. *a*) ¿De cuántas maneras se puede partir un conjunto de 6 elementos en tres subconjuntos de cardinal $3, 2$ y 1 respectivamente? ¿Y en tres subconjuntos de cardinal 2?

    b) ¿De cuántas formas es posible hacer una partición de un conjunto de $2n$ elementos, en n conjuntos de 2 elementos?

13. *a*) ¿Cuántas formas hay de sentar 5 niños distinguibles en 12 sillas puestas en línea?

    b) Idem al anterior pero debido a las medidas sanitarias los niños no deben quedar sentados uno junto al otro.

14. ¿Cuántos recorridos posibles a pie hay desde Blanes y Chaná hasta Paullier y Charrúa, si no caminamos "hacia atrás"? (ayudarse con un mapa de Montevideo)

15. En un plano hay dibujadas n rectas de forma tal que

    - no hay pares de rectas paralelas, y
    - no hay tres que rectas que concurran en un mismo punto.

    Calcular el n sabiendo que el número de intersecciones es 21.

16. *a*) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación

    $$x + y + z + t = 15$$

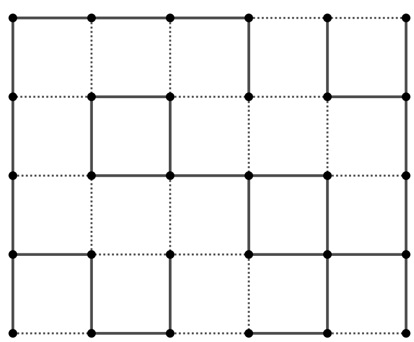
    donde x, y, z y t son números naturales?

b) ¿Y si además pedimos $x, y, z, t > 0$?

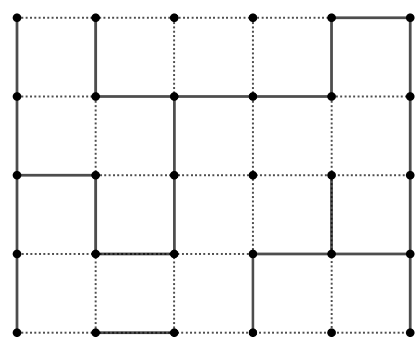
17. ¿De cuántas formas se puede meter k pelotas numeradas en n cajas indistinguibles? (Pueden quedar cajas vacías)

Ejercicios complementarios.

18. Se considera una grilla de n filas por $n+1$ columnas. Construir un *laberinto* consiste en marcar alguna de las aristas de la grilla (que harán las veces de paredes), marcando todas las aristas laterales. Un laberinto tiene sulución si es posible entrar a él por la parte inferior y salir por la parte superior.



Laberinto con solución ($n = 4$)



Laberinto sin solución ($n = 4$)

(a) ¿Cuántos laberintos diferentes existen?

(b) ¿Cuántos de ellos tienen solución? (Sugerencia: pensarlo primero para valores pequeños de n.)

19. Notemos por $\Pi(n, k)$ al número de formas de distribuir n pelotas indistinguibles en k cajas también indistinguibles sin que quede ninguna vacía.

(a) Expresar en función de los números $\Pi(\cdot, \cdot)$ la cantidad de soluciones naturales de los siguientes problemas

$$(i) \begin{cases} x_1 + \ldots + x_k = n \\ 0 < x_1 \leq \ldots \leq x_k \end{cases} \qquad (ii) \begin{cases} x_1 + \ldots + x_k = n \\ 0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_k \end{cases}$$

(b) Probar para $n > k$:

- $\Pi(n,n) = \Pi(n,1) = 1$
- $\Pi(n,k) = \sum_{i=1}^{k} \Pi(n-k,i)$
- $\Pi(n,k) = \Pi(n-1,k-1) + \Pi(n-k,k)$

(c) ¿De cuántas formas pueden distribuirse n pelotas indistinguibles en k cajas indistinguibles si se permite que queden cajas vacías?

20. En el plano se consideran los n vértices de un polígono regular.

(a) ¿Cuántos triángulos pueden formarse que tengan como vértices a tres de estos puntos?

(b) ¿Cuántos clases diferentes de isometría hay? Esto es la cantidad de tipos de triángulos no isométricos.

Cuarta entrega: se pide entregar el ejercicio 10 antes del 22 de junio.