

EXAMAN FEBRERO 2026 - PRÁCTICO

1. Consideramos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \tan(t + x)$$

definida en el conjunto $\Omega = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 : t + x \in (-\pi/2, \pi/2)\} \subset \mathbb{R}^2$.

- a) Dibujar el conjunto Ω indicando las regiones en las que la derivada de las soluciones son positivas, negativas y nulas.
- b) Encontrar una solución con derivada constante. ¿Es la única con esta condición?
- c) Concluir que la solución maximal con condición inicial $(t, x) = (0, 0)$ está definida para todo tiempo pasado pero no para todo tiempo futuro.

2. Consideramos el siguiente sistema autónomo definido en $\mathbb{R}^3$:

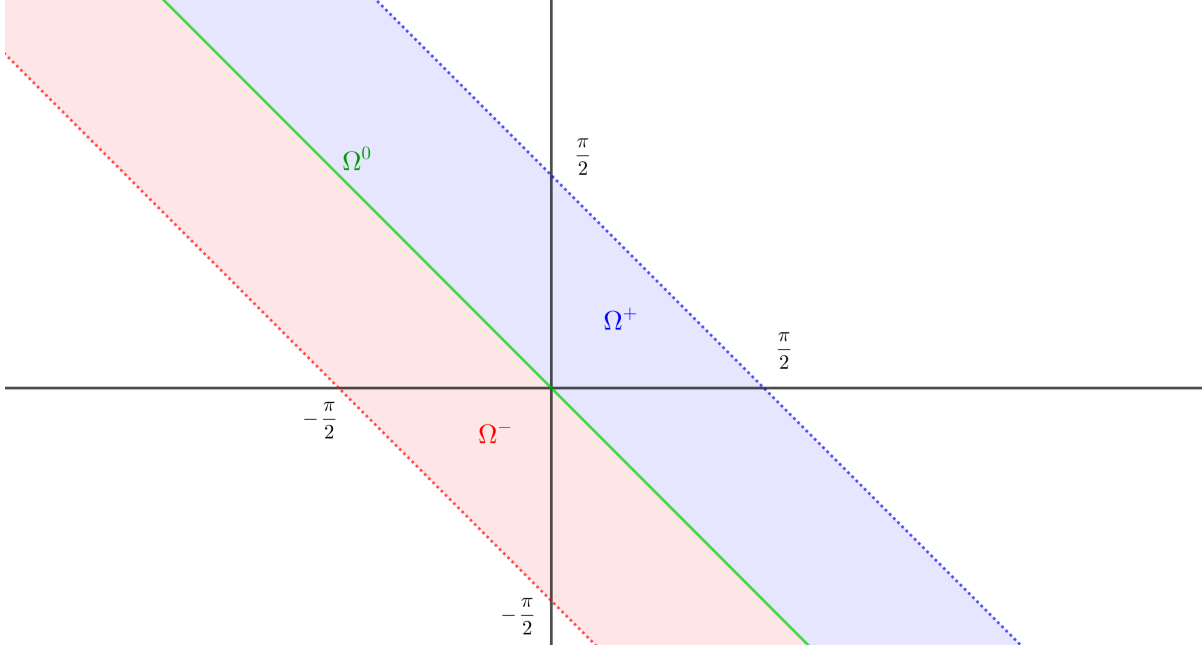
$$\begin{cases} \dot{x} = -y^2x \\ \dot{y} = -z^2y \\ \dot{z} = -x^2z \end{cases}$$

- a) Hallar los puntos de equilibrio.
 - b) Probar que el origen es un punto de equilibrio estable (*sugerencia: usar una función de Lyapunov cuadrática*). ¿Es asintóticamente estable?
3. a) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la extensión 2π -periódica y par de la función $\sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$. Hallar la serie de Fourier de f .
- b) ¿La serie de Fourier converge puntualmente a f ? ¿Converge uniformemente?

**No se permite usar material.
Justificar todas las respuestas.**

Solución

1. a) Notemos $f(t, x) = \tan(t + x)$ y llamemos Ω^+ , Ω^- y Ω^0 a los conjuntos donde f vale positivo, negativo y cero respectivamente. Estos conjuntos indican dónde las soluciones tienen derivada positiva, negativa y nula respectivamente.



- b) Una solución con derivada constante debe ser de la forma $x(t) = at + b$. Además, $\tan(t + x(t))$ es constante, por lo que $t + x(t)$ debe ser constante. Imponiendo estas condiciones tenemos $a = -1$, lo que implica $\tan(b) = -1$, es decir,

$$x(t) = -t + \arctan(-1).$$

Como los coeficientes a y b quedan determinados por la ecuación diferencial, la solución encontrada es la única posible con derivada constante.

- c) Sea $\varphi(t)$ la solución maximal que cumple $\varphi(0) = 0$. Como $\dot{\varphi}(0) = 0$, tenemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $\varphi(t) \in \Omega^+$ para todo $t \in (0, \epsilon)$. Además, como la derivada de φ en esta región es positiva, $\varphi(t)$ debe permanecer en el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, \pi)$ y $(\pi, 0)$ para todo $t > 0$ en el que dicha solución esté definida. Como esta última región está acotada en el tiempo φ no puede estar definida para todo tiempo futuro.

Por otro lado, $\varphi(t)$ no puede pertenecer a la recta dada $x = -t$ para ningún $t < 0$, ya que si así fuera el argumento anterior implicaría que $\varphi(0)$ está en la región Ω^+ . Luego $\varphi(t)$ está entre las rectas dadas por $x = -t$ y $x = -t + \arctan(-1)$ para todo $t < 0$. Si la solución no estuviese definida para cierto tiempo $T < 0$, entonces para todo $t < 0$, $\varphi(t)$ estaría en la región delimitada por las dos rectas mencionadas y las rectas dadas por $t = T$ y $x = 0$. Esto contradice el Teorema de Escape de Compactos, por lo que no puede existir tal T .

2. a) Para hallar los puntos de equilibrio hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} -y^2x = 0 \\ -z^2y = 0 \\ -x^2z = 0 \end{cases}$$

Cada una de estas ecuaciones implica que una u otra variable son nulas, luego para que las tres ecuaciones se satisfagan basta que dos variables se anulen. Esto implica que los puntos de equilibrio son todos los que se encuentran en alguno de los tres ejes.

- b) Definimos $V(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Es claro que se cumple $V(0, 0, 0) = 0$ y $V(x, y, z) > 0$. Además,

$$\dot{V}(x, y, z) = \nabla V(x, y, z) \cdot (-y^2x, -z^2y, -x^2z) = -2(x^2y^2 + y^2z^2 + x^2z^2) \leq 0.$$

Por el Teorema de Lyapunov el origen es un punto de equilibrio estable.

El origen no es asintóticamente estable porque es punto de acumulación de otros puntos de equilibrio. Más en detalle: dado $\delta > 0$, el punto $(\delta/2, 0, 0) \in B(0, \delta)$ es de equilibrio y por lo tanto su trayectoria no tiende al origen.

3. a) Hallamos los coeficientes de Fourier de f :

$$a_0(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x)}{\sqrt{2}} dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{\sqrt{2}} dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x) dx = \frac{\sqrt{2}}{\pi} (-\cos(x)) \Big|_0^{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}.$$

En la segunda igualdad usamos la paridad del integrando.

Para $k \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen}(x)| \cos(kx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x) \cos(kx) dx = -\frac{2}{k\pi} \int_0^{\pi} \cos(x) \operatorname{sen}(kx) dx \\ &= -\frac{2}{k^2\pi} \left(\cos(\pi) \cos(k\pi) - \cos(0) \cos(0) - \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x) \cos(kx) dx \right) = \frac{2 + 2 \cos(k\pi)}{k^2\pi} + \frac{a_k(f)}{k^2}. \end{aligned}$$

En la segunda igualdad usamos la paridad del integrando y en la tercera y cuarta la fórmula de integración por partes.

Despejando $a_k(f)$ obtenemos

$$a_k(f) = \frac{2 + 2 \cos(k\pi)}{(k^2 - 1)\pi}.$$

Por otro lado,

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{sen}(x)| \operatorname{sen}(k\pi) dx = 0$$

ya que el integrando es impar.

La serie de Fourier de f queda entonces

$$S(f)(x) = \frac{2}{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + 2 \cos(k\pi)}{(k^2 - 1)\pi} \cos(kx).$$

- b) Como f es continua y sus derivadas laterales existen en todo punto, entonces su serie de Fourier converge puntualmente a f por el Teorema de Dini. Más aún, como la serie de sus coeficientes de Fourier converge, el criterio de Weierstrass asegura la convergencia uniforme.