

EXAMEN FEBRERO 2026 - TEÓRICO

1. a) Enunciar el Teorema de Picard.  
b) Usar lo anterior para mostrar que si  $\varphi_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $\varphi_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$  son dos soluciones al problema

$$\begin{cases} \dot{x} = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases},$$

donde  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  (con  $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ) cumple las hipótesis del Teorema de Picard y  $(t_0, x_0) \in \Omega$ , entonces se cumple  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$  para todo  $t \in I_1 \cap I_2$ .

2. a) Definir la exponencial de una matriz  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , notada por  $e^A$ .  
b) Probar que si  $B = PAP^{-1}$ , entonces  $e^B = Pe^AP^{-1}$ , y que si  $A$  y  $B$  son dos matrices que conmutan ( $AB = BA$ ), entonces  $e^{A+B} = e^A e^B$ . Explicar cómo estas propiedades ayudan a calcular la exponencial de una matriz cualquiera.  
c) ¿Por qué esto es importante para resolver ecuaciones lineales de la forma  $\dot{x} = Ax$ ?