Proposición V $\mathbb{K}$-e.v. $S, W \subset V$ s.e.v.

$$\dim(S+W) = \dim(S) + \dim(W) - \dim(S \cap W)$$

Prueba N° 1 [Usando el caso $S \cap W = \{0\}$
$\dim(S \oplus W) = \dim(S) + \dim(W)$]

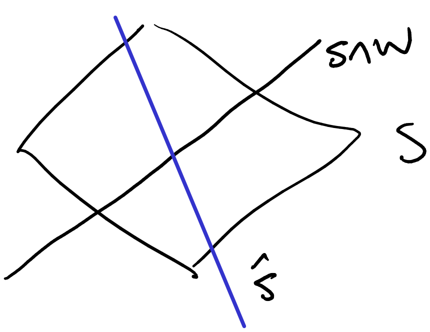
\#1 tomamos $\hat{S} \subset S$ complemento directo de $S \cap W$ en S.

$S = (S \cap W) \oplus \hat{S}$

- $\dim(S) = \dim(S \cap W) + \dim(\hat{S})$

\#2 $\hat{S} \cap W = \{0\}$: $\hat{S} \subset S$

$\hat{S} \cap W = (\hat{S} \cap S) \cap W =$
$= \hat{S} \cap (S \cap W) = \{0\}$



- $\hat{S} \oplus W$

$\dim(\hat{S} \oplus W) = \dim(\hat{S}) + \dim W =$

$= \dim(S) - \dim(S \cap W) + \dim(W)$

$\hat{S} \oplus W = S + W$: $\subset$ ✓

$u \in S \cap W$

$\supset$ $s + w = (\hat{s} + u) + w =$
$= \hat{s} + (u + w)$ ✓

Prueba N° 2 Consideramos

(I) $\{v_1, \dots, v_k\}$ base de $S \cap W$

(II) $\{v_1, \dots, v_k, s_1, \dots, s_n\}$ base de S

(III) $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m\}$ " " W

¿ $\{v_1, \dots, v_k, s_1, \dots, s_n, w_1, \dots, w_m\}$ es base de $S+W$?

- es generador
- si es base tenemos

$\dim(S+W) = \dim S + \dim W - \dim W \cap S$

$$\underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 s_1 + \dots + \beta_n s_n}_{} + \underbrace{\gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m}_{\in W \cap S} = 0$$

(*) $\gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m \in W \cap S$

Luego: $\gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m = -a_1 v_1 - \dots - a_k v_k$ (I)

$a_1 v_1 + \dots + a_k v_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_m w_m = 0$ (III)

$a_i = 0$ $\forall i$

$\gamma_i = 0$

$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k + \beta_1 s_1 + \dots + \beta_n s_n = 0$ (II)

$a_i, \beta_i = 0.$

Subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

$\langle S \rangle = S$

Teorema .... son $\mathbb{R}^3$, $\{0\}$, planos y rectas p/ origen.

Prueba Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ s.e.v.

- $S = \{0\}$ ✓
- $S \neq \{0\}$ $v_1 \neq 0$ en S
  - $\langle v_1 \rangle = S$ recta p/ origen.
  - $\langle v_1 \rangle \neq S$ existe $v_2 \in S \setminus \langle v_1 \rangle$

    $\{v_1, v_2\}$ son l.i.

    - $S = \langle \{v_1, v_2\} \rangle$ plano p/ origen
    - $S \neq \langle \{v_1, v_2\} \rangle$

      existe $v_3 \in S \setminus \langle \{v_1, v_2\} \rangle$

      $\{v_1, v_2, v_3\}$ es l.i. $\subset S$

      $\Rightarrow$ base de $\mathbb{R}^3$

      $\Rightarrow S = \mathbb{R}^3$

Plano $\langle (a,b,c), (x,y,z) \rangle$ $\overset{N}{=}$

$\{(x,y,z) : ax + by + cz = 0\}$

$\overline{\langle \{v_1, v_2\} \rangle}$

$\Vert$ ¿?

$\{(x,y,z) : \langle v_1 \wedge v_2, (x,y,z) \rangle = 0\}$

$\cancel{\supseteq}$! $\langle v_1 \wedge v_2, v_1 \wedge v_2 \rangle = \|v_1 \wedge v_2\|^2 > 0$

$\subseteq$ + argumento con dim.

$v_1 \wedge v_2 \neq 0$ ($\{v_1, v_2\}$ son l.i.)

$$\left.\begin{array}{l} S = \langle \{v_1, \dots, v_k\} \rangle \\ v_1, v_2, \dots, v_k \in W \\ W \text{ s.e.v.} \end{array}\right\} \to S \subset W$$

$S \subset W$ $\dim S = \dim W$ $\Rightarrow W = S$

(todo $\dim < \infty$)