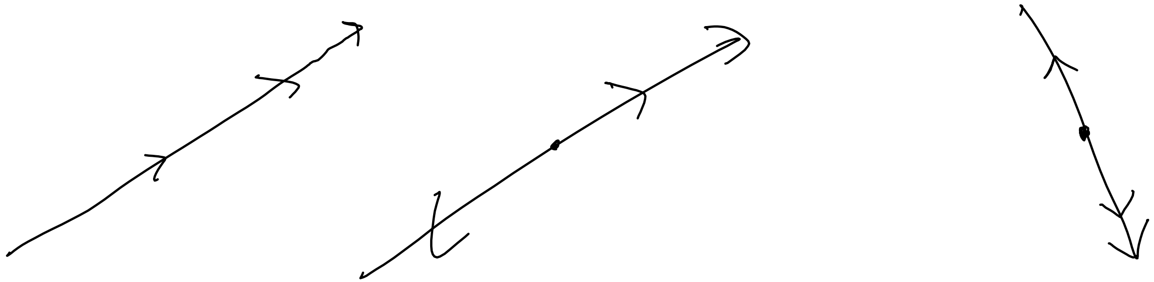
15 $u, v \in \mathbb{R}^2$ (Jueves pasado)

no colineales $\Rightarrow \forall w \in \mathbb{R}^2$

$w = \alpha v + \beta u$.

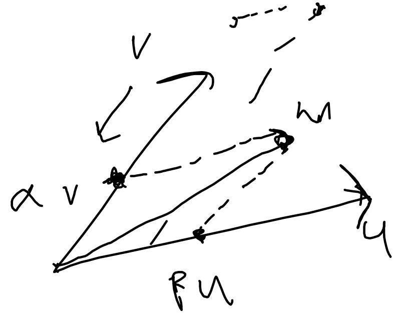
- $\{u, v, w\}$ es l.d. $(u, v, w \in \mathbb{R}^2)$

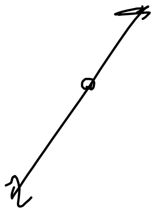
- u, v y w colineales



- u y v linealmente independientes (no colineales)

$$\boxed{w = \alpha v + \beta u}$$





$\{u, v, w\}$ es l.d.!

$a, b, c \in \mathbb{R}$ alguno $\neq 0$

$$au + bv + cw = 0$$

$$w = \alpha v + \beta u \longrightarrow c = -1$$

$$a = \beta \quad b = \alpha.$$

$\cdot \{v\}$ $\quad av = 0 \iff a = 0$ $\quad$ Ser l.i.

$v \neq 0$

$\{u, v, w, t\}$ es l.d. en $\mathbb{R}^3$.

$\{\underbrace{u, v, w}_{\text{l.i.}}, 0\}$

$\boxed{t = 0}$

$au + bv + cw = 0 \iff a = b = c = 0$

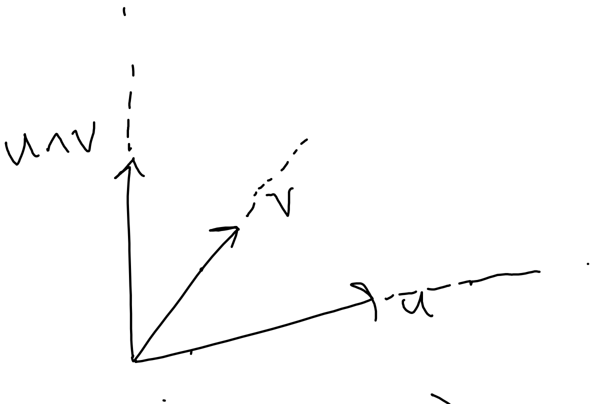
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \parallel$

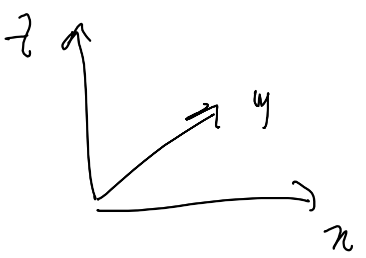
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad t$

l.i.

(14) $\{u, v\}$ l.i. $\Rightarrow$ $\{u, v, u\wedge v\}$ l.i.

$u, v \in \mathbb{R}^3$.





$u \wedge v$

$\downarrow$ índice

$\rightarrow$ dedo mayor

Vectorial $\longrightarrow$ otro vector.

escolar $\longrightarrow$ número.

$w = au + bv + c\,(u\wedge v) \approx (a, b, c)$ con ejes raros.

$u = i,\ v = j\quad w = k$

$$au + bv + c\, u\wedge v = 0$$

$\{u, v, u\wedge v\}$ es l.i.

- $\underline{c = 0}$: $au + bv = 0 \longrightarrow \underline{a = b = 0}$

$\{u, v, u\wedge v\}$ no es l.i.

- $\underline{c \neq 0}$: $u\wedge v = \alpha u + \beta v$

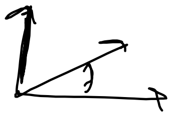
$\alpha\langle \underline{u, u\wedge v}\rangle + \beta\langle \underline{v, u\wedge v}\rangle$

$$\underset{\|u\wedge v\|^2}{\underset{\shortparallel}{\langle u\wedge v, u\wedge v\rangle}} = \alpha\langle u, u\wedge v\rangle + \underset{0}{\underset{\shortparallel}{\beta\langle v, u\wedge v\rangle}}$$

$\|u\wedge v\|^2 = 0$

$$\boxed{u\wedge v = 0}$$

$0 = \|u\|\,\|v\|\,.\,\operatorname{sen}\theta$



$\{u, v, \underline{u \wedge v}\}$ es l.i.

si no es l.i.

$$u \wedge v = \alpha u + \beta v.$$

$$\langle \alpha u, u \wedge v \rangle = 0$$

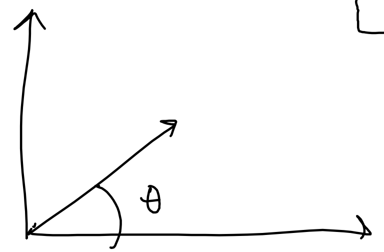
$$\langle \beta v, u \wedge v \rangle = 0$$

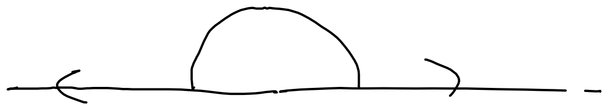
$$\| u \wedge v \| = 0$$

Suponemos

$\{u, v\}$ es l.i.

$$\boxed{\| u \wedge v \| > 0}$$





$\boxed{A_f}$ $\{u, v, w\}$ es l.i en $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}^3$

$t = au + bv + cw$.

17 $\{u, v, w, t\}$ es l.d.

18 v_1 y v_2 no colineales en $\mathbb{R}^3$

ambos perpendiculares a $w \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

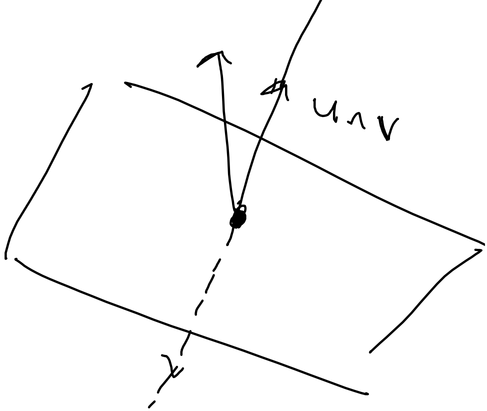
$v \perp w \iff v = \alpha v_1 + \beta v_2$

para ciertos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Camila: $\circledast$ $\boxed{w = \lambda v_1 \wedge v_2}$ bien, probémoslo

Lema: Si u y v no son colineales

$w \perp u, v \iff w = \lambda\, u \wedge v \quad \lambda \neq 0$



$\Leftarrow)$ ejercicio

$\Rightarrow)$ $\{u, v, u \wedge v\}$ es l.i. Por el ej 14,

entonces por la af. del ejercicio 16.

$$w = au + bv + \lambda\, u \wedge v$$

Sabemos por hipótesis:

$$\langle w, u \rangle = 0$$

$$\langle w, v \rangle = 0$$

$$0 = \langle w, u \rangle = \langle au + bv + \lambda u \wedge v, u \rangle =$$

$$= a\langle u, u \rangle + b\langle v, u \rangle + \lambda \underbrace{\langle u \wedge v, u \rangle}_{= 0}$$

$$\longrightarrow \quad 0 = a\|u\|^2 + b\langle u, v \rangle$$

$$0 = \langle w, v \rangle = \langle au + bv + \lambda u \wedge v, v \rangle =$$

$$= a\langle u, v \rangle + b\langle v, v \rangle + \lambda \underbrace{\langle u \wedge v, v \rangle}_{= 0}$$

$$\longrightarrow \quad 0 = a\langle u, v \rangle + b\|v\|^2$$

$$a\|u\|^2 + b\langle u,v\rangle = 0 \xrightarrow{\text{multiplico por } a} a^2\|u\|^2 + ab\langle u,v\rangle = 0$$

$$a\langle u,v\rangle + b\|v\|^2 = 0 \xrightarrow[\text{multiplico por } b]{} ab\langle u,v\rangle + b^2\|v\|^2 = 0$$

el error fue poner $2ab\|u\|.\|v\|$:(

sumo las dos

$$a^2\|u\|^2 + b^2\|v\|^2 + 2ab\langle u,v\rangle = 0$$

$$\|au\|^2 + \|b.v\|^2 + 2\langle au, bv\rangle = 0$$

$$\|au+bv\|^2 = 0 \implies au+bv = 0 \longrightarrow a=b=0$$

por ser $\{u,v\}$ l.i.

$$\boxed{w = \lambda u \wedge v.} \Leftarrow$$

¿Se animan a terminar el ej 18 usando el lema?

Con el lema tienen que:

$$w = \lambda v_1 \wedge v_2$$

19

$$r : \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3x - 2y - 4z = 2 \end{cases}$$

$$(*) \begin{cases} w \text{ dirección de } r \\ v_1 = \text{normal } \pi_1 \\ v_2 = \text{normal a } \pi_2 \end{cases}$$

$$w \perp v_1, v_2$$

El plano que pasa por P y tiene normal N es

$$\pi : \langle (x,y,z) - P , N \rangle = 0$$

Para que π contenga a r : $\overbrace{P \in r \text{ y } N \perp w}^{\text{justifiquen.}}$

Usar el ej 18 con w, v_1 y v_2 como en $(*)$