Capítulo 2

# Sistemas de ecuaciones lineales

En este capítulo veremos los sistemas de ecuaciones lineales en varias variables. Antes de comenzar con las definiciones básicas veamos un ejemplo.

**Ejemplo 2.1.** El señor Ostolozzo desea comprar para su granja orgánica naranjos y manzanos. Quiere comprar el triple de naranjos que de manzanos, y tiene espacio para plantar 100 árboles. ¿Cuántos naranjos y manzanos deben comprar?

Si llamamos $N$ al número de naranjos y $M$ al número de manzanos, entonces $N = 3M$, y $N + M = 100$. Agrupemos esta información en un "sistema de ecuaciones":

$$\begin{cases} N = & 3M \\ N + M = & 100 \end{cases}$$

Sustituyendo el valor de $N$ en función de $M$ en la segunda ecuación, tenemos que

$$3M + M = 100$$

de donde $4M = 100$; es decir $M = 25$. Como $N = 3M$, tenemos que $N = 75$. En otras palabras, el Sr. Ostolozzo debe comprar 25 manzanos y 75 naranjos.

El lector seguramente está familiarizado con el tipo de problema (hallar determinados valores conociendo condiciones que verifican) y de manipulaciones (sustituir y despejar) que se requieren para resolverlos. En lo que sigue formalizaremos estas ideas y daremos un método general para resolver *sistemas de ecuaciones lineales en varias variables incógnitas*.

## 1. Definiciones básicas

Comenzamos repasando brevemente la noción de ecuación en una variable, para luego generalizar dicho concepto a varias variables.

**Definición 2.2.** Una *ecuación en una variable o incógnita* es una expresión de la forma $f(x) = 0$, donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera.

*Resolver* una ecuación de $f(x) = 0$ es hallar todos los números reales $\alpha \in \mathbb{R}$, si existen, tales que $f(\alpha) = 0$.

**Observación 2.3.** Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función, una expresión del tipo $f(x) = a$, se puede convertir en una expresión del tipo $g(x) = 0$, tomando $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - a$.

En vista de la observación anterior, diremos que

$$f(x) = a \tag{2.1.1}$$

es una *ecuación en una variable o incógnita*, y que *resolverla* es hallar, si existen, todos los reales $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que $f(\alpha) = a$.

Observemos que resolver un tal sistema es hallar el conjunto preimagen de $\{a\}$ por la función $f$:

$$\big\{\text{soluciones de } (2.1.1)\big\} = \big\{\alpha \in \mathbb{R} : f(\alpha) = a\big\} = f^{-1}(a).$$

Así, podemos ver la resolución de una ecuación en una variable como la resolución del siguiente problema:

*dada una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un valor $a \in \mathbb{R}$, hallar todos los valores de la variable $x$ para los cuales $f(x) = a$.*

**Ejemplo 2.4.** Un ejemplo típico de ecuación en una variable es la "regla de tres"

El fluoruro de calcio ($CaF_2$) tiene una masa molecular ( MM ) de 78,067 g/mol, es decir, un mol de $CaF_2$ se corresponden con 78,067 g del producto. De desea averiguar cuál es la concentración molar (o molaridad) de una solución de $CaF_2$, que contiene 8 g del soluto en 250 ml de solución.

Primeramente, averiguamos cuántos moles se corresponden a la cantidad de soluto indicada (8 g), mediante una "regla de tres"

$$\begin{array}{rcl} \text{1 mol de CaF2} & \leftrightarrow & \text{78,067 g} \\ \text{x mol CaF2} & \leftrightarrow & \text{8 g} \end{array}$$

Tenemos entonces la ecuación en una variable

$$x \cdot 78{,}067 = 8$$

y despejando llegamos a que

$$x \text{ mol} = \frac{8}{78,067} \frac{\text{g mol}}{\text{mol}} = 0,102 \text{ mol}$$

Sabemos entonces que en nuestra solución de 250 ml hay 0,102 moles de soluto. Para calcular la molaridad de la solución aplicamos una nueva regla de tres

$$\begin{array}{rcl} \text{0,102 moles de CaF2} & \leftrightarrow & \text{0,25 l} \\ \text{x mol CaF2} & \leftrightarrow & \text{1 l} \end{array}$$

Despejando,

$$x \cdot 0,25 = 0,102$$

de donde $x = 0,4$ moles. Entonces la molaridad de la solución es 0,4 moles/l, es decir 0,4 M.

La regla de tres convierte la solución de nuestro problema en la resolución de una *ecuación lineal en una variable*

**Ejemplo 2.5.** Si $f(x) = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, diremos que $ax + b = 0$ es una *ecuación lineal en una variable (o incógnita).*

Una ecuación lineal se puede notar con el *término independiente* del lado derecho de la ecuación. Por ejemplo, $2x = 3$ es la ecuación $2x - 3 = 0$.

Si $a \neq 0$, es ecuación tiene una única solución $x = -\frac{b}{a}$. Si $a = 0$, hay dos casos: si $b = 0$ la ecuación es $0x = 0$, que tiene infinitas soluciones, ya que todo número real es solución. Si $b \neq 0$, la ecuación no tiene soluciones.

Generalicemos ahora la idea de ecuación en una variable a varias variables. Comencemos con un ejemplo:

**Ejemplo 2.6.** Supongamos que se sabe de dos valores $x, y$ que verifican las siguientes relaciones

$$\begin{cases} 2x + y = & 1 \\ x + y = & 2 \end{cases}$$

Entonces $y = 1 - 2x$, y sustituyendo en la segunda relación (ecuación) tenemos que $x + (1 - 2x) = 2$; o sea $-x = 1$. Tenemos entonces que los valores de $x, y$ son $x = -1$, $y = 1 - 2(-1) = 3$.

**Ejemplo 2.7.** Nos preguntamos ahora si existen dos valores $x, y$ que verifiquen las siguientes relaciones

$$\begin{cases} 2x + 3y = & 3 \\ 2x + 3y = & 2 \end{cases} \tag{2.1.2}$$

De la primera ecuación deducimos que de existir tales valores, $y = \frac{3-2x}{3} = 1 - \frac{2}{3}x$, por lo que si sustituimos en la segunda ecuación tenemos que $2 = 2x + 3(1 - \frac{2}{3}x) = 3$, lo que es imposible. Deducimos entonces que no existe ningún par de valores $(x, y)$ tales que verifiquen las dos relaciones (2.1.2).

**Ejemplo 2.8.** Si las relaciones consideradas ahora son

$$\begin{cases} 2x + 3y = & 3 \\ 4x + 6y = & 6 \end{cases} \tag{2.1.3}$$

De la primera ecuación deducimos que de existir valores para $x, y$ que las verifiquen, entonces $y = \frac{3-2x}{3} = 1 - \frac{2}{3}x$, por lo que si sustituimos en la segunda ecuación tenemos que $6 = 4x + 6(1 - \frac{2}{3}x) = 6$. Resulta entonces que para cualquier valor $\alpha$ que le asignemos a $x$, si asignamos a $y$ el valor $y = 1 - \frac{2}{3}\alpha$, se verifica que

$$\begin{cases} 2\alpha + 3(1 - \frac{2}{3}\alpha) = & 3 \\ 4\alpha + 6(1 - \frac{2}{3}\alpha) = & 6 \end{cases}$$

Veamos ahora como formalizar estos ejemplos de un modo parecido a lo hecho para una variable.

**Definición 2.9.** Una *ecuación en n variables (o incógnitas)* es una expresión de la forma $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, donde $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera.

*Resolver* una ecuación de $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ es hallar todas las $n$-uplas de números reales $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, si existen, tales que $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = 0$.

Como en el caso de una variable, la ecuación $f(x_1, \ldots, x_n) - a = 0$ se escribirá

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a.$$

Si $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ y $a \in \mathbb{R}$, diremos que

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a$$

es una *ecuación lineal en n variables (o incógnitas).*

Diremos que $a$ es el *término independiente* de la ecuación.

**Ejemplo 2.10.** La ecuación $2x + y = 1$ tiene como solución el conjunto

$$\{(a, 1 - 2a) : a \in \mathbb{R}\}$$

**Observación 2.11.** Una ecuación lineal en $n$ variables tiene infinitas soluciones o no tiene ninguna. En efecto, si $a_1 = \cdots = a_n = 0$ y $a \neq 0$, la ecuación no tiene solución, ya que tenemos una expresión de la forma:

$$a = 0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0.$$

Si $a_1 = \cdots = a_n = 0$ y $a = 0$, toda $n$-upla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ es solución:

$$0x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n = 0.$$

Supongamos ahora que existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $a_i \neq 0$, por simplicidad, digamos que $a_1 \neq 0$. Entonces, el conjunto de las soluciones de la ecuación $f(x_1, \dots, x_n) = a$ está dado por

$$\text{soluciones} = \big\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \frac{1}{a_1}(a - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n),$$

como puede verse fácilmente despejando $x_1$ de la ecuación original:

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = a \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{a_1}(a - a_2x_2 - \cdots - a_nx_n)$$

Queremos ahora, a partir del ejemplo básico de una ecuación lineal en $n$ variables, construir una clase de ejemplos mayor.

**Definición 2.12.** Un *sistema de $m$ ecuaciones lineales de $n$ variables (o incógnitas)* es una colección de $m$ ecuaciones lineales de $n$ incógnitas (las mismas en todas las ecuaciones), que se notará

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1(x_1, \dots, x_n) & = & a_1 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) & = & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) & = & a_m \end{array}\right.$$

en donde $a_i \in \mathbb{R}$, para todo $i = 1, \dots, m$. Así, si $f_i = a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n$, $i = 1, \dots, m$, el sistema anterior se escribirá

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & a_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & a_m \end{array}\right.$$

*Resolver* un tal sistema es hallar, si existen, todas las $n$-uplas $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\left\{\begin{array}{rcl} f_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) & = & a_1 \\ f_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) & = & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_m(\alpha_1, \dots, \alpha_n) & = & a_m \end{array}\right.$$

es decir hallar, si existen, todas las $n$-uplas $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}\alpha_1 + \cdots + a_{1n}\alpha_n & = & a_1 \\ a_{21}\alpha_1 + \cdots + a_{2n}\alpha_n & = & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\alpha_1, \dots, a_{mn}\alpha_n & = & a_m \end{array}\right.$$

**Ejemplo 2.13.** Consideremos el sistema de ecuaciones de 3 variables y 2 ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x+y-z= & 3 \\ 3x+2y+z= & -5 \end{array}\right.$$

Primero observemos que los valores $x=-1$, $y=1$, $z=-4$, es solución, es decir que si sustituimos en el sistema anterior $x$ por $-1$, $y$ por $1$ y $z$ por $-4$, entonces obtenemos igualdades:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2(-1)+1(1)-1(-4)= & -2+1-4= & 3 \\ 3(-1)+2(1)+(-4)= & -3+2-4= & -5 \end{array}\right.$$

Los valores $x=-4$, $y=6$, $z=-5$ también son una solución, como facilmente se puede verificar.

Por otro lado, los valores $x=0$, $y=1$, $z=-2$ no son una solución, ya que si bien se cumple que $2(0)+1(1)-(1)(-2)=1+2=3$, tenemos que $3(9)+2(1)+1(-2)=0\neq-5$.

Calculemos ahora todas las soluciones del sistema. De la primera ecuación, tenemos si $x,y,z$ son solución, se cumple que $z=2x+y-3$. Sustituyendo en la segunda ecuación, tenemos que

$$3x+2y+(2x+y-3)=-5$$

de donde $5x+3y=-2$. Luego, $y=\frac{-2-5x}{3}$. Deducimos entonces que si una solución es tal que $x=\alpha$, se tiene que cumplir que $y=\frac{-2-5\alpha}{3}$ y $z=2\alpha+\frac{-2-5\alpha}{3}-3=\frac{1}{3}\alpha-\frac{11}{3}=\frac{\alpha-11}{3}$. Veamos ahora que para cualquier valor de $\alpha$, los valores hallados son solución:

$$\left\{\begin{array}{rrl} 2\alpha+\frac{-2-5\alpha}{3}-\frac{\alpha-11}{3}= & \frac{(6-5-1)\alpha-2+11}{3} & = \ 3 \\ 3\alpha+2\frac{-2-5\alpha}{3}+\frac{\alpha-11}{3}= & \frac{(9-10+1)\alpha-4-11}{3} & = \ -5 \end{array}\right.$$

Vemos entonces que hay infinitas soluciones: $x=\alpha$, $y=\frac{-2-5\alpha}{3}$, $z=\frac{\alpha-11}{3}$, donde $\alpha$ es un número real cualquiera.

La primera solución encontrada se corresponde a $\alpha=-1$, y la segunda a $\alpha=-4$.

**Notación 2.14.** Si consideramos que las variables "viven" en $\mathbb{R}^n$, entonces una solución se notará como un elemento de $\mathbb{R}^n$. Así, en el ejemplo anterior $(-1,1,-4)$ es la primera *solución* particular hallada, y $(\alpha,\frac{-2-5\alpha}{3},\frac{\alpha-11}{3})$ es la *solución general.*

**Definición 2.15.** Si un sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones, dar la *solución general* es describir completamente el conjunto de las mismas, mientras que dar una *solución particular* es describir una solución, es decir, un elemento del conjunto de las soluciones.

## 2. Resolución de sistemas lineales

El método más práctico para resolver sistemas de ecuaciones lineales es el llamado de *escalerización.* De hecho, variantes de este método son utilizadas por diferentes programas de cálculo para la resolución de los sistemas.

Veamos primero algunos ejemplos que nos permitirán mostrar cuál es la idea básica que lleva a plantearse la escalerización de sistemas

**Ejemplo 2.16.** Consideremos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left\{\begin{array}{rr} 3x+2y-z= & 1 \\ y-2z= & 2 \\ \frac{1}{2}z= & 2 \end{array}\right. \tag{2.2.1}$$

La tercera ecuación nos dice que una solución es tal que $z = 4$. Sustituyendo en la segunda ecuación vemos que $y = 2z + 2 = 10$, y sustituyendo los dos valores hallados en la primera ecuación deducimos que $x = \frac{1-2\cdot 10+4}{3} = \frac{-15}{3} = -5$.

Vemos entonces que hay una única solución: $x = -5$, $y = 10$, $z = 4$.

**Ejemplo 2.17.** Veamos ahora que el siguiente sistema no tiene soluciones

$$\left\{\begin{array}{rr} 3x+2y-z= & 1 \\ -z= & 2 \\ \frac{1}{2}z= & 2 \end{array}\right. \tag{2.2.2}$$

Si tenemos una solución, la segunda ecuación nos dice que $z = -2$, mientras que la tercera ecuación implica que $z = 4$, lo que es una contradicción.

**Ejemplo 2.18.** El siguiente sistema tiene infinitas soluciones:

$$\left\{\begin{array}{rr} 3x+2y-z= & 1 \\ y-2z= & 2 \\ 2y-4z= & 4 \end{array}\right. \tag{2.2.3}$$

En efecto, la tercera ecuación puede reescribirse como $2(y - 2z) = 2 \cdot 2$. Vemos que verificar esta ecuación es lo mismo que verificar $y - 2z = 2$, es decir la segunda ecuación. Luego las soluciones de (2.2.3) son exactamente las mismas que las soluciones de

$$\left\{\begin{array}{rr} 3x+2y-z= & 1 \\ y-2z= & 2 \end{array}\right. \tag{2.2.4}$$

Una solución del sistema (2.2.4) verifica que $y = 2 + 2z$, por lo que sustituyendo en la primera ecuación tenemos que $3x + 2(2 + 2z) - z = 1$, de donde $x = \frac{-3-3z}{3} = -1 - z$. Luego, toda solución es de la forma $x = -1 - \alpha$, $y = 2 + 2\alpha$, $z = \alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$. Es fácil ver que para todo $\alpha$ la anterior terna es una solución de (2.2.3).

Los tres ejemplos anteriores muestran que en un sistema lineal, puede haber una única solución, infinitas soluciones o ninguna. De hecho, estas son las únicas posibilidades: Si un sistema de ecuaciones lineales (con coeficientes reales) tiene más de una solución, entonces tiene infinitas.

También vemos que si las ecuaciones involucradas son tales que una tiene la variable $z$, otra la variables $y, z$ y la tercera las variables $x, y, z$, entonces es fácil de resolver:

**Ejemplo 2.19.** Consideremos el sistema

$$\left\{\begin{array}{rr} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z= & c_1 \\ a_{22}y+a_{23}z= & c_2 \\ a_{33}z= & c_3 \end{array}\right. \tag{2.2.5}$$

donde $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{22}, a_{23}, a_{33}, c_1, c_2, c_3$ son números reales cualesquiera.

Si $a_{11}, a_{22}, a_{33}$ son no nulos, entonces el sistema tiene una única solución, dada por

$$\begin{cases} x = & \frac{c_1 - a_{12}\frac{c_2 - a_{23}z}{a_{22}} - a_{13}z}{a_{11}} = \frac{c_1 a_{22} a_{33} - a_{12} c_2 a_{33} + a_{23} c_3 - a_{13} a_{22} c_3}{a_{11} a_{22} a_{33}} \\ y = & \frac{c_2 - a_{23}z}{a_{22}} = \frac{c_2 a_{33} - a_{23} c_3}{a_{22} a_{33}} \\ z = & \frac{c_3}{a_{33}} \end{cases}$$

Más en general, tenemos la siguiente observación:

**Observación 2.20.** Consideremos un sistema de $n$ ecuaciones y $n$ variables de la forma

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & a_1 \\ a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{nn}x_n & = & a_n \end{cases} \tag{2.2.6}$$

donde $a_{ij} \in \mathbb{R}$, para todo $1 \leq i \leq n$, $i \leq j \leq n$, y $c_i \in \mathbb{R}$, para todo $1 \leq i \leq n$.

1. Si $a_{ii} \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, entonces el sistema (2.2.6), tiene una única solución.
   En efecto, de la última ecuación despejamos el valor de $x_n$, de la penúltima el valor de $x_{n-1}$ y así sucesivamente hasta llegar a la primera ecuación, de donde despejamos el valor de $x_1$.
2. Si $a_{ii} = 0$ para algún $i$, entonces o bien el sistema tiene infinitas soluciones o bien no tiene soluciones, ver el Algoritmo 2.36 . Por ahora simplemente digamos que intentamos si repetir lo realizado en el caso anterior, en algún momento llegaremos a una ecuación del tipo $0x_j = d$. En este caso, si $d = 0$ el sistema tendrá infinitas soluciones, porque $x_j$ se podrá elegir libremente. Siu $d \neq 0$; el sistema no tendrá soluciones.

Antes de describir el método de escalerización resumamos las observaciones anteriores en un teorema, que no probaremos.

**Teorema 2.21.** *Consideremos un sistema de $m$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. Entonces pasa uno de los siguientes 3 casos:*

1. *El sistema no tiene soluciones. Diremos que es un* sistema incompatible.
2. *El sistema tiene una única solución $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$. Diremos que es un* sistema compatible determinado*, con solución $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_n = \alpha_n$. También notaremos la solución como $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.*
3. *El sistema tiene infinitas soluciones. En este caso, existen $s$ variables $x_{i_1}, x_{x_2}, \ldots, x_{i_s}$, con $1 \leq i_1, i_2, \ldots, i_s \leq n$, y funciones $f_j$, con $j \neq i_1, \ldots, i_s$ tales que una solución*

*del sistema es de la forma*

$$\begin{array}{rl} x_1 & = f_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) \\ \vdots & \vdots \\ x_{i_1-1} & = f_{i_1-1}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) \\ x_{i_1} & \textit{cualquiera} \\ x_{i_1+1} & = f_{i_1+1}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) \\ \vdots & \vdots \\ x_{i_2-1} & = f_{i_2-1}(x_{i_1}, \dots, x_{i_s}) \\ x_{i_2} & \textit{cualquiera} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

*En otras palabras, existen $s$ incógnitas tales que para cualquier valor de ellas, hay una única solución del sistema con dichos valores.*

*En este caso diremos que es un* sistema compatible indeterminado con $s$ grados de libertad*.*

**Observación 2.22.** En el caso de un sistema compatible indeterminado, la solución general puede escribirse de diferente formas. En particular, las incógnitas declaradas libres pueden variar. Sin embargo, *número de variables libres es siempre el mismo*. En otras palabras, no importa cómo se escriba la solución, siempre habrá el msmo número de variables libres.

El método de escalerización se basa en que todo sistema de ecuaciones lineales de $n$ ecuaciones y $n$ variables se puede transformar en un sistema del tipo del sistema (2.2.6), que tenga las mismas soluciones que el sistema original. Antes de ver cómo realizar esto, fijemos más notaciones.

**Definición 2.23.** Consideremos dos sistemas de ecuaciones lineales, en las mismas $n$ variables:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & a_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & a_m \end{array} \right. \tag{2.2.7}$$

y

$$\left\{ \begin{array}{ccc} b_{11}x_1 + \cdots + b_{1n}x_n & = & a_1 \\ b_{21}x_1 + \cdots + b_{2n}x_n & = & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m'1}x_1 + \cdots + b_{m'n}x_n & = & a_{m'} \end{array} \right. \tag{2.2.8}$$

Diremos que los sistemas (2.2.7) y (2.2.8) son *equivalentes* si tiene exactamente las mismas soluciones: $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ es solución de (2.2.7) si y sólo si $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$ es solución de (2.2.8).

**Ejemplo 2.24.** Consideremos el sistema de ecuaciones del Ejemplo 2.6:

$$\left\{ \begin{array}{rr} 2x + y = & 1 \\ x + y = & 2 \end{array} \right.$$

Este sistema es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & -1 \\ y = & 3 \end{array}\right.$$

ya que $x=-1$, $y=3$ es la solución de ambos

**Ejemplo 2.25.** Más en general, si

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n & = & a_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n & = & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n & = & a_m \end{array}\right. \tag{2.2.9}$$

es un sistema compatible determinado con única solución $x_1=\alpha_1,\ldots,x_n=\alpha_n$, entonces (2.2.9) es compatible con el sistema

$$\left\{\begin{array}{ccc} x_1 & = & \alpha_1 \\ x_2 & = & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & = & \alpha_n \end{array}\right.$$

**Ejemplo 2.26.** Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x+y+z= & 1 \\ x+y+z= & 2 \\ x+y-z= & 1 \end{array}\right. \tag{2.2.10}$$

Claramente, si cambiamos la última ecuación por la suma de las dos últimas las soluciones, el sistema (2.2.10) será equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x+y+z= & 1 \\ x+y+z= & 2 \\ 2x+2y= & 3 \end{array}\right. \tag{2.2.11}$$

ya que si $x=a, y=b, z=c$ es solución de (2.2.10), entonces dichos valores claramente verifican las primeras dos ecuaciones del sistema (2.2.11). Por otra parte, si $a+b+c=2$ y $a+b-c=1$, sumando ambas ecuaciones obtenemos que $2a+2b=3$, que es la tercera ecuación de (2.2.11).

Recíprocamente, si $x=a, y=b, z=c$ es solución del sistema (2.2.11), entonces dichos valores verifican las primeras dos ecuaciones del sistema (2.2.10). Por otra parte, como $a+b+c=2$ y $2a+2b=3$, restando ambas igualdades obtenemos que $a+b+c=3$.

**Definición 2.27.** Consideremos el sistema de $m$ ecuaciones lineales en $n$ variables:

$$\left\{\begin{array}{ccc} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n & = & a_1 \\ a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n & = & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n & = & a_m \end{array}\right.$$

Los cálculos realizados en el ejemplo anterior pueden generalizarse, siendo dicha generalización la base del método de escalerización. Enunciaremos el resultado sin demostración.

Primeramente, necesitamos definir formalmente las operaciones a realizar en el método de escalerización.

Una *combinación lineal de las ecuaciones* del sistema es una ecuación del tipo

$$\begin{gathered} b_1(a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n) + b_2(a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n) + \cdots + b_m(a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n) = \\ b_1a_1 + b_2a_2 + \cdots + b_ma_m \end{gathered} \tag{2.2.12}$$

donde $b_1, \ldots, b_m$ son reales cualesquiera. El número $b_i$ será llamado el *coeficiente i-ésimo* de la combinación lineal.

Observemos que la combinación lineal (2.2.12) puede escribirse como:

$$\Big(\sum_{i=1}^{m} b_ia_{i1}\Big)x_1 + \Big(\sum_{i=1^m} b_ia_{i2}\Big)x_2 + \cdots + \Big(\sum_{i=1^m} b_ia_{in}\Big)x_n = \sum_{i=1}^{m} b_ia_i.$$

**Lema 2.28.** *Consideremos el sistema de de $m$ ecuaciones lineales en $n$ variables:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & a_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & a_m \end{array}\right. \tag{2.2.13}$$

*Sean $b_1, b_2, \ldots, b_m$ escalares cualesquiera, con $b_1 \neq 0$. Entonces el sistema* (2.2.13) *es equivalente al siguiente sistema*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \big(\sum_{i=1}^{m} b_ia_{i1}\big)x_1 + \big(\sum_{i=1^m} b_ia_{i2}\big)x_2 + \cdots + \big(\sum_{i=1^m} b_ia_{in}\big)x_n & = & \sum_{i=1}^{m} b_ia_i \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & a_2 \\ & \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & a_m \end{array}\right.$$

Dado que claramente cambiar el orden de las ecuaciones produce un sistema equivalente, el lema anterior puede enunciarse como sigue:

*Consideremos un sistema (I) de $m$ ecuaciones lineales en $n$ variables, y una combinación lineal de sus ecuaciones, con el coeficiente $b_i \neq 0$. Entonces (I) es equivalente al sistema (II), donde todas las ecuaciones del sistema (I), salvo la i-ésima se mantienen, y la i-ésima ecuación del sistema (I) se sustituye por la combinación lineal dada.*

El Lema 2.28 nos garantiza que existe un algoritmo (método) para resolver un sistema de ecuaciones lineales de $n$ ecuaciones y $n$ incógnitas.

Antes de presentarlo formalmente, veámoslo en funcionamiento en un ejemplo.

**Ejemplo 2.29.** Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rl} x + y + 2z = & 1 \\ x - y + z = & 2 \\ x + 2y - z = & 3 \end{array}\right.$$

Si restamos las ecuaciones 3 y 1 y sustituimos la ecuación 3 por el resultado, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x+y+2z = & 1 \\ x-y+z = & 2 \\ y-3z = & 2 \end{cases}$$

Restamos ahora las ecuaciones 1 y 2 y sustituimos por la 2:

$$\begin{cases} x+y+2z = & 1 \\ 2y+z = & -1 \\ y-3z = & 2 \end{cases}$$

Hemos eliminado $x$ de todas las ecuaciones salvo de la primera. Restamos ahora 2 veces la ecuación 3 a la 2, y sustituimos por la 3:

$$\begin{cases} x+y+2z = & 1 \\ 2y+z = & -1 \\ 7z = & -5 \end{cases}$$

Tenemos entonces que $z = -5/7$. Sustituyendo en las ecuaciones restantes obtenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} x+y-2\cdot 5/7 = & 1 \\ 2y-5/7 = & -1 \\ z = & -5/7 \end{cases}$$

o lo que es lo mismo:

$$\begin{cases} x+y = & 17/7 \\ y = & \frac{-7+5}{7\cdot 2} = -1/7 \\ z = & -5/7 \end{cases}$$

Luego $y = -1/7$, y sustituyendo en la primera ecuación obtenemos que $x = 17/7 + 1/7 = 18/7$.

Verifiquemos el resultado en el sistema original

$$\begin{cases} 18/7 - 1/7 + 2\cdot(-5/7) = & 1 \\ 18/7 + 1/7 - 5/7 = & 2 \\ 18/7 + 2\cdot(-1/7) + 5/7 = & 3 \end{cases}$$

Hemos confirmado que $x = 18/7$, $y = -1/7$, $z = -5/7$ es solución del sistema. Por construcción, es la única solución posible.

Si observamos las operaciones que se realizaron, vemos que se buscó hicimos combinaciones lineales de las ecuaciones de modo que la primera ecuación queda con las 3 incógnitas, la segunda con 2, y la última sólo con $z$.

Veamos que pasa cuando tratamos de usar este método en un sistema incompatible.

**Ejemplo 2.30.** Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} x+y+2z = & 1 \\ x+5z = & 2 \\ x+2y-z = & 3 \end{cases}$$

Si como antes restamos las ecuaciones 3 y 1 y sustituimos la ecuación 3 por el resultado, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x+y+2z= & 1 \\ x+5z= & 2 \\ y-3z= & 2 \end{cases}$$

Restamos ahora las ecuaciones 1 y 2 y sustituimos por la 2:

$$\begin{cases} x+y+2z= & 1 \\ y-3z= & -1 \\ y-3z= & 2 \end{cases}$$

Vemos que una solución del sistema tiene que verificar simultáneamente que $y-3z=-1$ e $y-3z=2$ lo que claramente es imposible. Supongamos que no nos dimos cuenta de esto y seguimos con el procedimiento.Restamos entonces la ecuación 2 a la 3 y sustituimos, de modo de eliminar $y$, y obtenemos:

$$\begin{cases} x+y+2z= & 1 \\ y-3z= & -1 \\ 0= & -3 \end{cases}$$

La última ecuación claramente es imposible de verificar no importa cuáles sean los valores de $x, y, z$: el sistema es incompatible.

Veamos por último qué pasa cuando el sistema es compatible indeterminado:

**Ejemplo 2.31.** Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} x+y+2z= & 1 \\ x+5z= & 2 \\ x+2y-z= & 0 \end{cases}$$

Si como antes restamos las ecuaciones 3 y 1 y sustituimos la ecuación 3 por el resultado, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{cases} x+y+2z= & 1 \\ x+5z= & 2 \\ y-3z= & -1 \end{cases}$$

Restamos ahora las ecuaciones 1 y 2 y sustituimos por la 2:

$$\begin{cases} x+y+2z= & 1 \\ y-3z= & -1 \\ y-3z= & -1 \end{cases} \tag{2.2.14}$$

Vemos que aparece 2 veces la misma ecuación. Busquemos soluciones con $z$ libre, es decir pudiendo tomar cualquier valor. Entonces $y=3z-1$, y sustituyendo en la primera ecuación tenemos que $x+3z-1+2z=1$, es decir $x=2-5z$. Luego, toda solución es de la forma $z$ libre, $y=3z-1$, $x=2-5z$. Por ejemplo, si $z=0$ la solución hallada es $(0,0,0)$, si $z=2$ la solución es $(-9,6,2)$.

Verifiquemos que efectivamente encontramos las soluciones. Sustituyendo en el sistema original tenemos que

$$\begin{cases} 2-5z+3z-1+2z = & 1 \\ 2-5z+5z = & 2 \\ 2-5z+2\cdot(3z-1)-z = & 0 \end{cases}$$

Llegados a la ecuación (2.2.14), si continuamos con el procedimiento, restamos la segunda y la tercera ecuación, y obtenemos el sistema

$$\begin{cases} x+y+2z = & 1 \\ y-3z = & -1 \\ 0 = & 0 \end{cases}$$

Como en la tercera ecuación esperábamos tener la variable $z$, dejamos dicha variable libre y despejando $y$ en la segunda, obtenemos nuevamente que $y=3z-1$. sustituyendo en la primera, volvemos a encontrar que $x=2-5z$.

**Observación 2.32.** En un sistema compatible indeterminado, qué variable queda libre depende de cómo se proceda. Por ejemplo, dejamos al lector verificar que $x$ cualquiera, $y=\frac{1-3x}{5}$, $z=\frac{2-x}{5}$, es otra manera de expresar las soluciones del sistema del ejemplo anterior.

Formalicemos ahora los ejemplos anteriores. Comenzamos viendo el caso de un sistema compatible determinado:

**Algoritmo 2.33.** Consideremos un sistema de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas $x_1,\ldots,x_n$, que suponemos compatible determinado.

PASO 1 Reordenar las ecuaciones de modo que en la primera ecuación $x_1$ aparezca. Sea

$$\begin{cases} \text{(ecuación 1)} & a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n & = & a_1 \\ \text{(ecuación 2)} & a_{21}x_1+\cdots+a_{2n}x_n & = & a_2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{(ecuación n)} & a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n & = & a_n \end{cases}$$

el sistema obtenido.

PASO 2 Para $i=2,\ldots,n$, si en (ecuación i), el coeficiente $a_{i1}\neq 0$, sustituir (ecuación i) por

$$\frac{-a_{i1}}{a_{11}}\text{(ecuación 1)} + \text{(ecuación i)}$$

De este modo, sólo la (ecuación 1) contiene a la variable $x_1$.

PASO 3 Repetir los pasos anteriores con el sistema formado por las nuevas ecuaciones (2 a $n$), para la variable $x_2$, obteniendo así un nuevo sistema, donde la primera ecuación es la única con la variable $x_1$ y la segunda (y eventualmente la primera) las únicas con la variable $x_2$.

PASO 4 Repetir sucesivamente con las variables restantes el paso 3: primero con las ecuaciones 3 a n y la variable $x_3$, luego con $x_4$, etc. Se obtiene así un sistema de la siguiente forma:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n & = & a'_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n & = & a'_2 \\ & \vdots & \\ a'_{nn}x_n & = & a'_m \end{array}\right. \tag{2.2.15}$$

donde $a_{ii} \neq 0$ para $i = 1, \ldots, n$, es decir en forma de "escalera".

Paso 5 Despejar $x_n$ de la última ecuación. Sustituir su valor en las ecuaciones restantes. Luego despejar $x_{n-1}$ de la ecuación $n-1$, y sustituir en las ecuaciones restantes, y así sucesivamente hasta obtener todos los valores de las solución.

Si se hicieron las cuentas bien, en este paso se obtuvo la solución del sistema, sin embargo agreguemos un paso más:

Paso 6 ¡Verificar! Sustituir en la sistema original los valores obtenidos como solución y verificar que efectivamente es la solución buscada. Si no lo es, hubo un error en los cálculos realizados.

**Observación 2.34.** Cuando el sistema de ecuaciones es incompatible, el algoritmo anterior en algún momento llegará a una contradicción, ya sea porque una ecuación queda de la forma $0 = a \neq 0$, o porque una ecuación es del tipo $x_i = a$ y otra $x_i = b$, donde $b \neq a$.

Recíprocamente, si en el Paso 5, al sustituir el valor hallado para la variable $x_i$ obtenemos una ecuación del tipo $0 = a \neq 0$, entonces el sistema es incompatible

**Observación 2.35.** Cuando el sistema es compatible indeterminado, (una variante de) el algoritmo 2.33 produce todas las soluciones. En este caso, el Paso 4, ahora obtendremos un sistema parecido al sistema (2.2.16), pero *donde algún $a_{ii}$ será igual cero*, por lo que debemos modificar el Paso 5.

Paso 5' Supongamos que al sustituir el valor hallado para la variable $x_i$ obtenemos que la (ecuación $i-1$) queda $0 = 0$. El procedimiento se continúa, dejando a la la variable $x_{i-1}$ sin sustituir, ya que puede tener cualquier valor. Los valores de las variables restantes ($x_1$ a $x_{i-2}$) se obtienen en función del valor posible de $x_i$.

Se repite el procedimiento cada vez que al sustituir $x_j$ se obtiene que la ecuación $j-1$ es $0 = 0$, quedando las variables restantes en función de todas las variables que quedaron "libres"

Resumamos el Algoritmo contemplando todos los casos

**Algoritmo 2.36** (Resolución de sistemas de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas)**.** Consideremos un sistema de $n$ ecuaciones lineales con $n$ incógnitas $x_1, \ldots, x_n$. Estamos asumiendo en particular que *todas* las variables aparecen en al menos una ecuación.

Paso 1 Reordenar las ecuaciones de modo que en la primera ecuación $x_1$ aparezca. Sea

$$\left\{\begin{array}{lrcl} \text{(ecuación 1)} & a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & a_1 \\ \text{(ecuación 2)} & a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n & = & a_2 \\ & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{(ecuación n)} & a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n & = & a_n \end{array}\right.$$

el sistema obtenido.

PASO 2 Para $i = 2, \dots, n$, si en (ecuación i), el coeficiente $a_{i1} \neq 0$, sustituir (ecuación i) por

$$\frac{-a_{i1}}{a_{11}}(\text{ecuación } 1) + (\text{ecuación i})$$

De este modo, sólo la (ecuación 1) contiene a la variable $x_1$.

PASO 3 Repetir los pasos anteriores con el sistema formado por las nuevas ecuaciones (2 a $n$), para la variable $x_2$, obteniendo así un nuevo sistema, donde la primera ecuación es la única con la variable $x_1$ y la segunda (y eventualmente la primera) las únicas con la variable $x_2$. Si la variable $x_2$ no aparece en las ecuaciones 2 a $n$, ir al Paso 4 directamente.

PASO 4 Repetir sucesivamente con las variables restantes el Paso 3: primero con las ecuaciones 3 a n y la variable $x_3$, luego con $x_4$, etc. Se obtiene así un sistema de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n & = & a'_1 \\ a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n & = & a'_2 \\ & \vdots & \\ a'_{nn}x_n & = & a'_m \end{array} \right. \tag{2.2.16}$$

PASO 5 *Caso 1:* Es posible despejar $x_n$ de la ecuación $n$. Hacerlo y sustituir su valor en las ecuaciones restantes. Continuar con el Paso 6.

*Caso 2:* La ecuación $n$ es del tipo $0 = a \neq 0$. El algoritmo termina: *El sistema es incompatible.*

*Caso 3:* La ecuación $n$ es del tipo $0 = 0$. La variable $x_n$ se declara libre y se continúa con el Paso 6.

PASO 6 Repetir el Paso 5 para las variables $x_{n-1}$ a $x_1$, en ese orden.

PASO 7 *Caso 1:* Todas las variables pudieron ser despejadas, el sistema es *compatible determinado*, siendo los valores hallados la solución.

*Caso 2:* En algún momento el algoritmo terminó por ser el sistema *incompatible* (se encontró una ecuación del tipo $0 = a \neq 0$).

*Caso 3:* Se encontraron $s$ variables libres (Caso 3 del Paso 5). EL sistema es *compatible indeterminado con s grados de libertad.*

PASO 7 VERIFICAR! En los Casos 1 y 3 del paso anterior, sustituir en el sistema original los valores obtenidos como solución y verificar que efectivamente es la solución buscada. Si no lo es, hubo un error en los cálculos realizados.

**Observación 2.37.** El Algoritmo 2.36 funciona aunque el número de ecuaciones sea distinto al número de variables. Si tenemos un sistema de $m$ ecuaciones con $n$ incógnitas, si $m < n$ el sistema es o bien incompatible o bien compatible determinado.

## 3. Ejercicios

**1.** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones e interpretar geométricamente:

$$\begin{cases} x+y &= 3 \\ x-y &= 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2\sqrt{2}x-\sqrt{8}y &= 0 \\ x-y &= 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} \frac{2}{3}y &= \frac{1}{6}(4x-3) \\ x-y &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

**2.** El señor Ostolozzo cría gallinas y ovejas en un corral. La cantidad de gallinas es el triple que la de ovejas. El señor Ostolozzo alcanzó a divisar un total de 30 patas en el corral. ¿Cuántas gallinas hay?

**3.** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} -x+y-z &= 1 \\ 4x+2y-z &= 5 \\ x+y+z &= 5 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x+y+z &= 3 \\ x-y-2z &= 3 \\ y-5z &= -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x+y-z &= 0 \\ 3x+3y+z &= 2 \\ 6x+3y-z &= 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x-3y &= -1 \\ x+y &= 2 \\ x-y &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x-y &= 0 \\ x+y &= 3 \\ 4x+y &= 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} 5x-y-z &= 4 \\ x-y+2z &= -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2y-z &= 1 \\ 2x+4y-2z &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+2y-z &= 0 \\ -x+y+z &= 0 \\ 2x-5y-2z &= 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} w-2x+y+z &= 0 \\ w-2x-2y+2z &= -2 \\ w-2x-2y-2z &= 0 \\ 2w+3x+3y-4z &= 0 \end{cases}$$

**4.** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+2y-z=1 \\ x+2z=0 \\ -x-y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+2y-z=0 \\ x+2z=1 \\ -x-y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+2y-z=0 \\ x+2z=0 \\ -x-y=1 \end{cases}$$

Sugerencia: escalerizar los tres sistemas al mismo tiempo, observar que la escalerización sólo depende de los coeficientes del sistema, no del término independiente.

**5.** Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones discutiendo según el valor del parámetro:

$$\begin{cases} mx+y+z &= 3 \\ x+my+z &= 3 \\ x+y+mz &= 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} ax+ay+(a-a^2)\,z &= a \\ x+y+z &= 2 \\ ay+az &= 2 \end{cases}$$

**6.** Determine para qué valores de $a$ los siguientes sistemas son compatibles determinados (SCD), compatibles (SC) o incompatibles (SI):

$$\begin{cases} x+y+az=3 \\ ax+y+z=2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x+y+az=a \\ ax+y+z=a \end{cases}$$