Actividad 1: Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas en dos variables

1. Hallar los pares (x, y) de números reales que verifican los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left\{ x+y = 2 \right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 2 \\ x+y &=& 4 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 2 \\ 2x+2y &=& 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 2 \\ x+y &=& 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 2 \\ x-y &=& 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 2 \\ x-y &=& 4 \\ 3x+y &=& 0 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y &=& 0 \\ x-2y &=& 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3 \\ x-2y &=& 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3 \\ y &=& 1 \end{array}\right.$$

2. Interpretar geométricamente las soluciónes del ejercicio anterior.

3. Un sistema se dice **compatible** si tiene solución e **incompatible** si no la tiene. Clasificar los sistemas del Ejercicio 1 en compatibles o incompatibles.

4. Un sistema compatible se dice **determinado** si tiene una única solución. En caso contrario se dice **indeterminado**. Clasificar los sistemas compatibles del Ejercicio 1 en determinados o indeterminados.

5. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y^2 &=& 0 \\ x-2y &=& 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} x+xy &=& 2 \\ x-y &=& 0 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} cosy &=& 1 \\ x-2y &=& 0 \end{array}\right.$$

6. Comparar la cantidad de soluciones de los sistemas del Ejercicio 5 con las del ejercicio 1. La idea es buscar alguna diferencia esencial, explicarla, hacer alguna conjetura ligada a la cantidad de soluciones de un sistema compatible. Los sistemas como los del Ejercicio 1 se dicen **sistemas de ecuaciones lineales**.

7. Encontrar alguna característica común al conjunto de soluciones de los sistemas de la forma

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_1x+b_1y &=& 0 \\ a_2x+b_2y &=& 0 \\ & \cdots & \\ a_nx+b_ny &=& 0 \end{array}\right.$$

Estos sistemas se dicen sistemas de ecuaciones lineales **homogéneos**. De hecho éste es la expresión general de un sistema homogéneo de n ecuaciones lineales en 2 variables.

8. Consideremos el sistema $\left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2 \\ x-y & = & 4 \\ 3x+y & = & 0 \end{array}\right.$. Mirando los coeficientes que preceden a las variables en cada fila, podemos obtener lo que llamamos **matriz subyacente** del sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hallar las matrices subyacentes a los sistemas del Ejercicio 1 y relacionarlas con la cantidad de soluciones del sistema.

Sistemas en tres variables

1. Pasemos a tres variables. Vamos a asumir que los puntos (x, y, z) que verifican $ax+by+cz = d$ forman una plano. ¿Ves alguna relación con el hecho de que los puntos (x, y) que verifican $ax + by = d$ formen una recta?

2. Decidir (sin resolver) cuántas soluciones admite cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones. La interpretación geométrica es crucial en este ejercicio.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 3x+y-z & = & 0 \\ 3x+y-z & = & 4 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} 5x-y+2z & = & 4 \\ 15x-3y+6z & = & 12 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y+2z & = & 2 \\ x+2y+z & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y & = & 6 \\ z & = & 5 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 0 \\ x+2y+z & = & 2 \\ 2x+3y+2z & = & 2 \end{array}\right.$$

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x+y+z & = & 3 \\ x-y-2z & = & 3 \\ y-5z & = & -1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 0 \\ x+y & = & 3 \\ 4x+y & = & 1 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+2y-z & = & 0 \\ -x+y+z & = & 0 \\ 2x-5y-2z & = & 0 \\ 2x-2y-2z=0 & & \end{array}\right.$$

4. Hallar las matrices subyacentes a los sistemas del Ejercicio anterior y relacionarlas con las respuestas a dicho ejercicio.

5. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones, primero sobre $\mathbb{Q}$ y luego sobre $\mathbb{R}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+2y-4z & = & 0 \\ -y+2z & = & -1 \\ 3x+2y & = & 6 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} x+y & = & 2\pi \\ x+y+z & = & 2\pi \\ 2x-y-z & = & 0 \end{array}\right.$$

6. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones en las variables x, y, z discutiendo según el valor del parámetro.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2mx-y-z & = & 0 \\ mx+y+z & = & 3 \\ 3mx-3y+2z & = & 2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{rcl} sx+2z & = & 2 \\ 5x+2y & = & 1 \\ x-2y+rz & = & 3 \end{array}\right.$$

7. Se considera el sistema

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_1x + b_1y + c_1z & = & d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & = & d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \dots & \dots \\ a_nx + b_ny + c_nz & = & d_n \end{array}\right.$$

   Discutir según el valor de n, qué es lo más probable: que sea compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

En general

1. Escribir una expresión general para sistema de n ecuaciones lineales en k variables con coeficientes en $\mathbb{R}$.

2. Definir

   - homogéneo,
   - compatible determinado, compatible indeterminado, e incompatible,
   - matriz subyacente.

3. *a*) Para $k, n \leq 3$, discutir según si n es mayor, menor o igual a k que es lo más probable que suceda con un sistema cualquiera de n ecuaciones y k incógnitas: ser compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

   b) Enunciar conjeturas que eneralicen los resultados de la parte anterior a k y n cualesquiera.

4. Trabajar en grupos sobre los siguientes ejemplos, para recordar el **método de escalerización** para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3x + y + 5z & = & 15 \\ 2x + y + 6z & = & 14 \\ 4x + 2y + z & = & 17 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcr} w - 2x + y + z & = & 0 \\ w - 2x - 2y + 2z & = & -2 \\ w - 2x - 2y - 2z & = & 0 \\ 2w + 3x + 3y - 4z & = & 0 \end{array}\right.$$