Capítulo 6

Geometría del plano y del espacio

En este apéndice estudiaremos la geometría del plano y del espacio euclídeos: veremos cómo identificar las rectas del plano y las rectas y planos del espacio. Comenzamos recordando brevemente el concepto de vectores libres del plano y del espacio, al cual manejaremos con una relativa vaguedad.

1. Vectores libres del plano y el espacio

En mecánica clásica, cuando se estudia la resultante de la aplicación de varias fuerzas a un punto o a un objeto, suele presentarse la misma a través de los conceptos de *vector libre — punto de aplicación*. Un vector fuerza se representa entonces dando una *dirección*, un *sentido*, un *módulo* y eventualmente un *punto de aplicación*.

Para fijar ideas, asumiremos ahora que estamos tratando el caso de vectores fuerza en el plano. Dado un punto P del plano, si F es un vector fuerza aplicado en P entonces la dirección de F es una recta r del plano que pasa por P. El punto P determina dos semirrectas en r, y elegir un sentido en r es elegir una de tales semirrectas, que llamaremos la *semirrecta positiva*. El módulo del vector fuerza F es un número real positivo, que notaremos $\|F\|$. Dada una distancia en el plano, podemos entonces representar al vector fuerza F como un el segmento orientado de P a Q, donde Q es el punto de la semirrecta positiva que dista $\|F\|$ de P, como se muestra en la Figura 1.

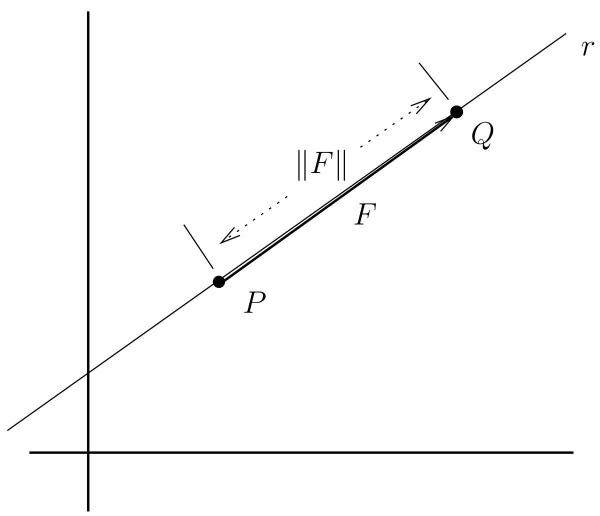

FIGURA 1. Fuerzas del plano.

Dos fuerzas F y G con punto de aplicación P se suman con la *regla del paralelogramo*: la fuerza $F + G$ es la fuerza con punto de aplicación P, dirección la diagonal por P del paralelogramo determinado por F y G, sentido de P al vértice opuesto, y módulo la longitud de la diagonal. Dado un número real positivo $\alpha > 0$, la fuerza αF tiene igual dirección y sentido que F, y módulo $\alpha \|F\|$. Si $\alpha < 0$, la fuerza αF tiene la dirección de F, módulo $|\alpha|\|F\|$ y sentido opuesto a F. Ver figura 2.

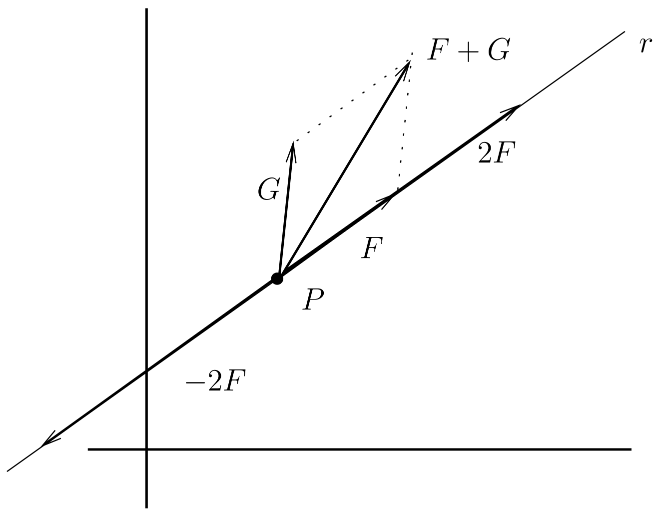

Figura 2. Suma de fuerzas y producto de una fuerza por un número real.

Es fácil ver que dado un punto P, el conjunto de los vectores fuerza con punto de aplicación P y las operaciones descritas anteriormente es un espacio vectorial.

A veces es necesario poder "liberarse" del punto de aplicación, en el sentido que no se desea considerar un vector fuerza aplicado a un punto determinado. Para ello realizamos la siguiente construcción:

Consideremos el conjunto A de *todos* los vectores fuerza del plano, independientemente de su punto de aplicación. En A definimos la relación $F \mathcal{R} G$ si F y G tienen la misma dirección, sentido y módulo. Entonces $\mathcal{R}$ es una relación de equivalencia. Intuitivamente, estamos considerando los vectores fuerza independientemente de su punto de aplicación, ver Figura 3. Llamamos *espacio vectorial de los vectores libres del plano* al conjunto cociente $\mathcal{F} = A/\mathcal{R}$.

En $\mathcal{F}$ consideramos las operaciones $+ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $[F] + [G] = [F + G]$, $F, G \in A$, ambas con punto de aplicación P, y $\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$, $\alpha \cdot [F] = [\alpha F]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $F \in A$. Es fácil ver que el resultado de estas operaciones no depende del representante de la clase de equivalencia elegido, por lo que están definidas. Con estas operaciones, $\mathcal{F}$ es un espacio vectorial real. Obsérvese que para sumar vectores libres, estamos aplicando los vectores fuerza sobre un mismo punto de aplicación, y sumándolos con la regla del paralelogramo, ver Figura 4.

Cuando se consideran los vectores fuerza del espacio, se realiza un construcción similar:

Un vector fuerza del espacio se representa dando una *dirección*, un *sentido*, un *módulo* y eventualmente un *punto de aplicación*. El espacio de los *vectores libres del espacio* se defina como el conjunto cociente por la relación de equivalencia *2 vectores fuerza están relacionados si tienen la misma dirección, módulo y sentido.*

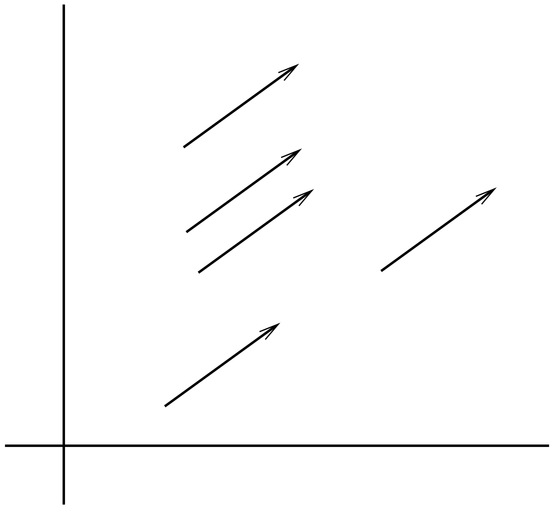

FIGURA 3. Vectores del plano. Todos los vectores de la figura están relacionados entre sí, por lo que representan al mismo vector libre.

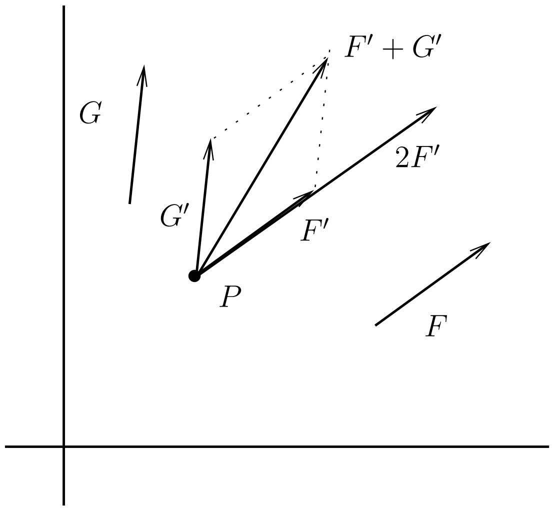

FIGURA 4. Suma de vectores libres del plano. Si F y G son dos vectores del plano, para sumar los vectores libres correspondientes se consideran F' y G' relacionados con F y G respectivamente, con mismo punto de aplicación P. Tenemos entonces que $[F+G] = [F'+G']$ y $2[F] = [2F']$.

Para sumar dos vectores libres v, w del espacio, se eligen representantes de cada uno de ellos con el mismo punto de aplicación, y se suman con la ley del paralelogramo. El vector obtenido es un representante de la suma $v+w$. Si $a > 0$ es un número real, el vector libre av es la clase de los vectores con dirección y sentido los de v, y módulo $\|av\| = a\|v\|$. Si $a < 0$, av tiene dirección de v, el sentido opuesto a v, y módulo $\|av\| = a\|v\|$.

2. Geometría del plano

Si en el plano euclídeo consideramos dos rectas perpendiculares, podemos obtener un *sistema de coordenadas* del siguiente modo:

Llamemos Ox y Oy a las rectas consideradas, y O a su intersección. Identificamos Ox y Oy con la recta real $\mathbb{R}$, del siguiente modo: primero orientamos cada una de dichas rectas; en el sentido positivos designamos como el 1 al punto que dista 1 del origen. Por convención, el ángulo formado por los semiejes positivos se recorre de Ox a Oy en sentido anti-horario (ver Figura 5). Obsérvese que asumimos la existencia de una distancia en el plano.

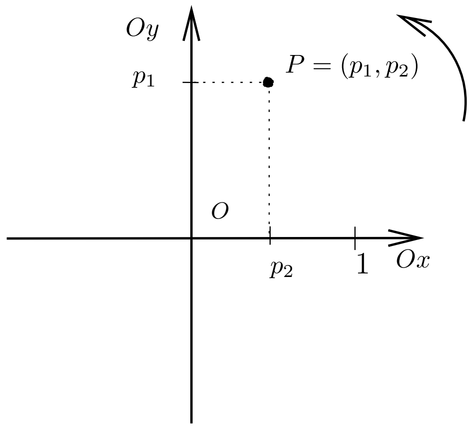

FIGURA 5. El plano visto como $\mathbb{R}^2$.

Asociamos a P un elemento $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ como sigue: p_1 será la proyección ortogonal de P sobre la recta Ox, y p_2 la proyección ortogonal de P sobre Oy. Diremos que (p_1, p_2) son las *coordenadas* del punto P (en el *sistema de coordenadas* Ox, Oy). Los axiomas de Euclides nos garantizan que la correspondencia que asocia a P sus coordenadas es una función biyectiva entre el plano y $\mathbb{R}^2$. A partir de este momento identificaremos entonces un punto del plano con el correspondiente elemento de $\mathbb{R}^2$.

Del mismo modo, dado un vector libre del plano, podemos asociarle el vector de $\mathbb{R}^2$ de coordenadas (v_1, v_2), de modo que el segmento orientado de $O = (0, 0)$ a (v_1, v_2) sea un representante del vector libre v. Es fácil ver que de este modo obtenemos una biyección entre el espacio de los vectores libres y $\mathbb{R}^2$, de modo que la suma de vectores libres se corresponde con la suma de elementos de $\mathbb{R}^2$, y el producto de un vector libre por un escalar se corresponde con el producto por un escalar en $\mathbb{R}$. Más precisamente, si

$$\varphi : \{\text{vectores libres}\} \to \mathbb{R}^2$$

denota la biyección construida, entonces $\varphi(v + w) = \varphi(v) + \varphi(w)$ y $\varphi av) = a\varphi(v)$ para todo par de vectores libres v, w y para todo número real a.

Con las asociaciones anteriores, dados dos puntos del plano $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$ podemos asociarles el vector libre del plano determinado por el segmento orientado de P a Q, que notaremos como la resta de los puntos Q y P:

$$v = Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Obsérvese que si bien la dirección de este vector no depende del orden en que consideramos los puntos, su sentido sí depende de esta elección. En cuando al módulo del vector $Q - P$, recordemos que está dado por la longitud del segmento que une P con Q. Para calcular dicha longitud a partir de las coordenadas de P y Q, alcanza con aplicar el teorema de Pitágoras:

$$\|P - Q\| = \mathrm{d}(A, P) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2}.$$

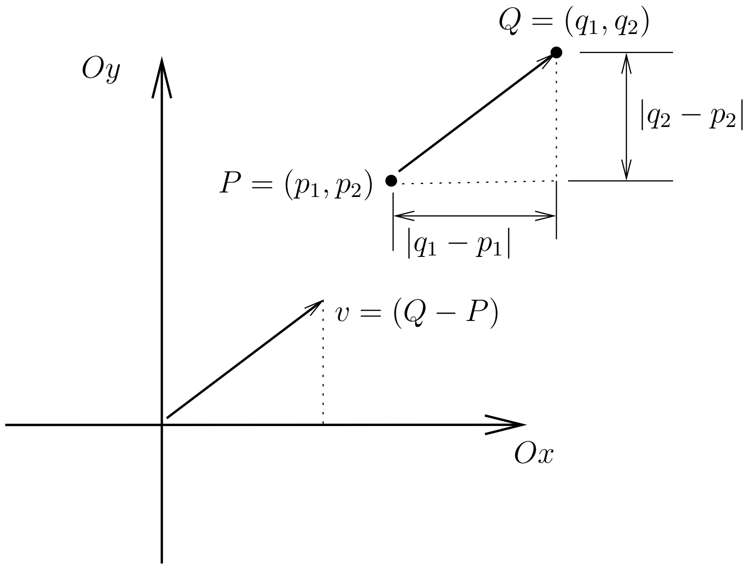

FIGURA 6. Puntos y vectores en el plano.

NOTACIONES

- Notaremos los puntos del plano con letras mayúsculas y los vectores libres con letras minúsculas.
- La resta $Q - P$ entre dos puntos da lugar a un vector (ver Figura 6).
- La suma de un punto P y un vector v da lugar al punto Q tal que $Q - P = v$.

Sea ahora $r \subset \mathbb{R}^2$ la recta que une P con Q. Un punto $A = (x, y) \in r$ determina el vector $A - P$, de coordenadas $(x - a, y - b)$. Si pensamos al vector $A - P$ con punto de aplicación P, dicho vector tiene dirección la recta r y sentido el de P a A. Deducimos entonces que $A - P$ es colineal con $Q - P$, por lo que existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $A - P = t(Q - P)$. despejando, obtenemos que $A = P + t(Q - P)$, lo que en coordenadas da la siguiente ecuación

$$A = (x, y) \in r \iff \exists\, t \in \mathbb{R} \ : \ \begin{cases} x = p_1 + t(q_1 - p_1) \\ y = p_2 + t(q_2 - p_2) \end{cases} \tag{6.2.1}$$

El razonamiento hecho para deducir la ecuación (6.2.1) puede generalizarse para la recta l que pasa por el punto $P = (a, b)$ de dirección dada por un vector $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, obteniendo:

$$A = (x, y) \in l \iff \exists\, t \in \mathbb{R} \ : \ \begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \end{cases} \tag{6.2.2}$$

Antes de seguir estudiando la ecuación de la recta, estudiaremos el ángulo entre dos rectas l y s que pasan por el punto $P = (p_1, p_2)$, de direcciones $v = (v_1, v_2)$ y $w = (w_1, w_2)$ respectivamente. Sea $A = P + v = (p_1 + v_1, p_2 + v_2) \in \mathbb{R}^2$ el punto del plano tal que $A - P$ es el vector v, y $B = P + w = (p_1 + w_1, p_2 + w_2)$ el punto tal que $B - P$ es el vector w. El ángulo θ entre l y s es el ángulo $\widehat{APB}$ en el vértice P del triángulo APB.

El teorema del coseno nos dice que

$$\|A - B\|^2 = \|A - P\|^2 + \|B - P\|^2 - 2\|A - P\|\|B - P\| \cos\theta,$$

lo que en coordenadas nos da:

$$\begin{aligned}\big\|\big((p_1 + v_1) - (p_1 + w_1),(p_2 + v_2 - (p_2 + w_2)\big)\big\|^2 &= \\ \big\|(v_1, v_2)\big\|^2 + \big\|(w_1, w_2)\big\|^2 &- 2\big\|(v_1, v_2)\big\|\, \big\|(w_1, w_2)\big\| \cos\theta\end{aligned}$$

Despejando obtenemos que

$$\cos\theta = \frac{2v_1w_1 + 2v_2w_2}{2\|v\|\|w\|}. \tag{6.2.3}$$

La ecuación (6.2.3) nos lleva a definir el siguiente concepto.

Definición 6.1. Dados dos vectores $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$, definimos el *producto escalar* de v con w como

$$\langle v, w\rangle = v_1w_1 + v_2w_2.$$

Observación 6.2. (1) La ecuación (6.2.3) dice que $\langle v, w\rangle = \|v\|\,\|w\| \cos\theta$, con θ el ángulo formado por dos rectas l y s de dirección v y w respectivamente, que pasan por un punto en común P.

(2) En el caso en que $v = w$, tenemos que $\langle v, v\rangle = \|v\|^2$.

(3) Cálculos explícitos (que dejamos como ejercicio al lector) permiten probar producto escalar es lineal en cada una de las variables, es decir que para todo $v, v', w \in \mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \alpha v + \beta v', w\rangle &= \alpha\langle v, w\rangle + \beta\langle v', w\rangle \\ \langle w, \alpha v + \beta v'\rangle &= \alpha\langle w, v\rangle + \beta\langle w, v'\rangle\end{aligned}$$

(4) La noción de producto escalar puede generalizarse a espacios vectoriales reales y complejos, obteniendo de ese modo una noción de "ángulo entre vectores". Esta generalización cae fuera del alcance de este primer curso — ver sin embargo la Definición 6.4 más adelante para el caso de $\mathbb{R}^3$.

2.1. Ecuación de la recta en el plano.

Sea $r \subset \mathbb{R}^2$ la recta que pasa por los puntos $P = (p_1, p_2)$ y $Q = (q_1, q_2)$, y sea $v = (v_1, v_2) = Q - P$. La ecuación (6.2.1) — o equivalentemente la ecuación (6.2.2) — se denomina la *ecuación paramétrica de la recta* r. Recordémosla:

$$A = (x, y) \in r \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, t \in \mathbb{R} \;:\; \begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \end{cases} \tag{6.2.4}$$

Hemos visto cómo obtener esta ecuación a partir de las coordenadas de P y Q.

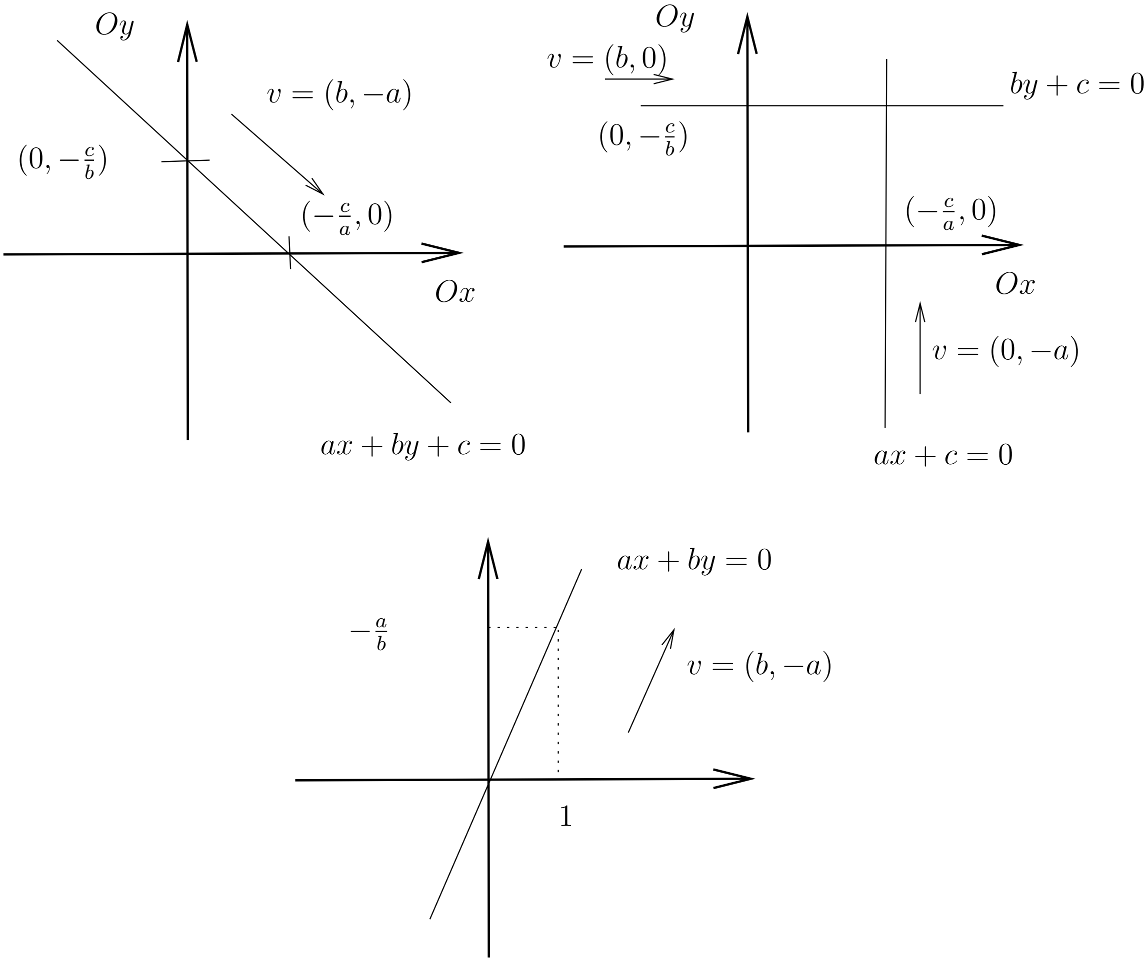

Figura 7. Ecuación cartesiana de la recta en el plano.

Nuestro objetivo es encontrar una ecuación no paramétrica (es decir que no presente parámetros) que determine los puntos de $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que pertenecen a la recta r. Para ello "eliminamos" el parámetro t de la ecuación (6.2.4).

Los valores v_1 y v_2 no pueden ser simultáneamente cero, pues en ese caso $x = p_1$ e $y = p_2$ (y no queda determinada una recta). Si $v_1 \neq 0$, entonces $t = \frac{x-p_1}{v_1}$. Sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos $y = p_2 + \frac{x-p_1}{v_1} v_2$, de donde

$$(x, y) \in r \quad \Longleftrightarrow v_1(y - p_2) = v_2(x - p_1) \tag{6.2.5}$$

o equivalentemente,

$$(x, y) \in r \quad \Longleftrightarrow v_2 x - v_1 y + v_1 p_2 - v_2 p_1 = 0 \tag{6.2.6}$$

Si $v_2 \neq 0$, un razonamiento análogo permite obtener la misma ecuación.

Consideremos ahora la ecuación

$$ax + by + c = 0 \tag{6.2.7}$$

donde a y b no son simultáneamente iguales a cero. Afirmamos que los puntos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que verifican esta ecuación conforman una recta del plano, ver Figura 7.

En efecto, supongamos primeramente que a, b y c son no nulos. En ese caso, el punto $P = (-\frac{c}{a}, 0)$ es la única solución de (6.2.7) perteneciente al eje Ox, y del mismo modo $Q = (0, -\frac{c}{b}) \in Oy$ es el único punto de Oy solución de (6.2.7). Debemos entonces probar que el conjunto solución es la recta que pasa por P y Q. Dicha recta tiene dirección $(\frac{c}{a}, -\frac{c}{b})$, o lo que es lo mismo, dirección $(b, -a) = \frac{ab}{c}(\frac{c}{a}, -\frac{c}{b})$. Sustituyendo $P = (-\frac{c}{a}, 0)$ y $v = (b, -a)$ en (6.2.6), deducimos que la recta por P y Q tiene ecuación $ax + by + c = 0$.

Observemos que si $a = 0$ y $c, b \neq 0$ entonces la ecuación (6.2.7) es $by + c = 0$, cuyas soluciones conforman la recta horizontal que pasa por $(0, -\frac{c}{b})$, de dirección $(1, 0) = \frac{1}{b}(b, 0) = \frac{1}{b}(b, -a)$. Del mismo modo, si $b = 0$, el conjunto de soluciones de (6.2.7) es la recta vertical por $(-\frac{c}{b}, 0)$, que es nuevamente una recta de dirección $(b, -a)$.

Si $c = 0$ y $a \neq 0$, tenemos que $(0, 0)$ y $(-\frac{b}{a}, 1)$ son soluciones de (6.2.7), y es fácil ver que en este caso el conjunto de soluciones de (6.2.7) es la recta por el origen de dirección $(b, -a)$.

Resumiendo, hemos probado que las souciones de la ecuación (6.2.7) conforman en todos los casos una recta de dirección $(b, -a)$. En particular, al variar el valor de c dejando fijos los valores de a, b, obtenemos rectas paralelas.

La ecuación (6.2.7) se denomina *ecuación cartesiana de la recta.*

Observación 6.3. Es fácil ver que dos ecuaciones

$$a_1 x + b_1 y = c_1 \tag{6.2.8}$$

y

$$a_2 x + b_2 y = c_2 \tag{6.2.9}$$

dan lugar a la misma recta si y sólo si existe $\alpha \neq 0$ tal que $(a_2, b_2) = \alpha(a_1, b_1)$ y $c_2 = \alpha c_1$. Si $(a_2, b_2) = \alpha(a_1, b_1)$ y $c_2 \neq \alpha c_1$, las rectas son paralelas, ver Figura 8. Si los vectores (a_2, b_2) y (a_1, b_1) no son colineales, entonces las rectas se cortan en un único punto.

En efecto, si existe α tal que $(a_2, b_2) = \alpha(a_1, b_1)$ y $c_2 = \alpha c_1$ entonces las ecuaciones (6.2.8) y (6.2.8) son equivalentes. Del mismos modo, si si existe α tal que $(a_2, b_2) = \alpha(a_1, b_1)$ y $c_2 \neq \alpha c_1$, entonces el sistema

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = & c_1 \\ a_2 x + b_2 y = & c_2 \end{cases} \quad \text{es equivalente a} \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y = & c_1 \\ a_1 x + b_1 y = & \frac{c_2}{\alpha} \end{cases},$$

siendo este último sistema claramente incompatible. En otras palabras, las rectas no se cortan.

Recíprocamente, supongamos que las ecuaciones (6.2.8) y (6.2.9) son equivalentes, con $a_1, a_2 \neq 0$. Entonces despejando x, tenemos que las ecuaciones

$$x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} y$$

y

$$x = \frac{c_2}{a_2} - \frac{b_2}{a_2} y$$

son equivalentes. Ambas ecuaciones tiene una única solución con $y = 0$. Evaluando en $y = 0$ llegamos a que $x = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2}$, $y = 0$ es la dicha solución, de donde $c_2 = \frac{c_2}{a_1} c_1$.

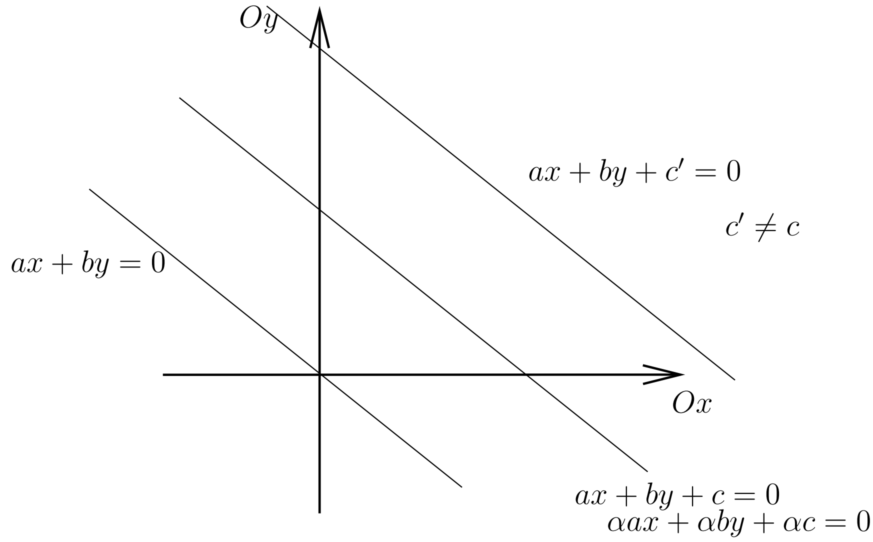

FIGURA 8. Ecuación cartesiana de la recta en el plano. Rectas paralelas.

Evaluando en $y = 1$ vemos que

$$x = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_1}{a_1} = \frac{c_1}{a_1} - \frac{b_2}{a_2}\ ,\ y = 1$$

es la única solución de ambas ecuaciones tal que $y = 1$, de donde $\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2}$, por lo $b_2 = \frac{a_2}{a_1} b_1$. En otras palabras, $\alpha = \frac{a_2}{a_1}$ es el escalar buscado. Otros casos se resuelven de modo análogo.

2.2. Ecuación de la recta perpendicular a una dirección dada.

Veamos ahora cómo hallar la ecuación de una recta perpendicular a otra por un punto dado. Esta construcción nos permitirá dar otra interpretación de la ecuación cartesiana de una recta en el plano euclídeo. Consideremos la recta r que pasa por el punto $P = (p_1, p_2)$, de dirección dada por el vector $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$. Sea $n = (n_1, n_2)$ perpendicular a v; si ℓ es la recta por P de dirección n, entonces r es la recta perpendicular a ℓ por P.

Tenemos entonces que el punto $A = (x, y)$ pertenece a r si y solamente si $A - P$ es perpendicular a n. Deducimos entonces que la ecuación de la recta r está dada por

$$\big\langle (x - p_1, y - p_2), (n_1, n_2) \big\rangle = 0$$

es decir

$$n_1 x + n_2 y = n_1 p_1 + n_2 p_2 \tag{6.2.10}$$

La relación entre las ecuaciones (6.2.6) y (6.2.10) es inmediata, una vez que se observa que $(v_2, -v_1)$ es un vector perpendicular a v, ver Figura 9. En otras palabras, la ecuación (6.2.10) nos da la ecuación de la recta perpendiculara la dirección $(n >_1, n_2)$, que pasa por el punto $P = (p_1, p_2)$.

2.3. Distancia de un punto a una recta.

Dada una recta r de ecuación $ax + by + c = 0$ y un punto $Q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2$, queremos establecer la distancia del punto Q a la recta r. Ésta se define como la longitud del

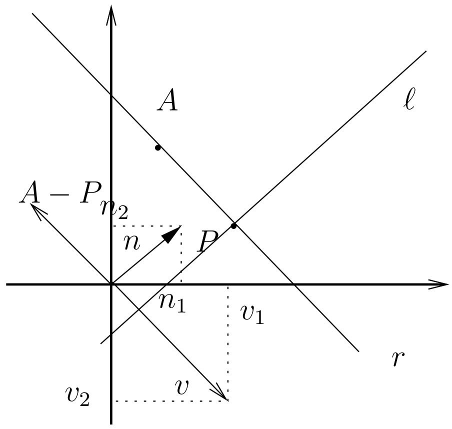

FIGURA 9. Ecuación cartesiana de la recta. Rectas perpendiculares.

segmento PQ, donde P es el punto de corte de r con la perpendicular a r que pasa por Q, ver Figura 10.

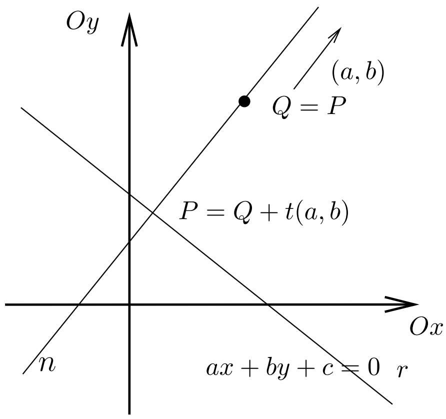

FIGURA 10. Distancia de un punto a una recta.

Para calcular la ecuación de la recta n perpendicular a r por Q observamos que la recta n tiene dirección (a,b), por lo que tiene ecuación

$$n) \quad \begin{cases} x = q_1 + ta \\ y = q_2 + tb \end{cases} \quad , \quad t \in \mathbb{R} \tag{6.2.11}$$

Para encontrar el punto P, intersección de n con r, hallamos el valor del parámetro t correspondiente a P, sustituyendo el valor de (x,y) dado por la ecuación (6.2.11) en la ecuación cartesiana de n:

$$a(q_1+ta)+b(q_2+tb)+c=0$$

de donde obtenemos que $t = -\frac{c+aq_1+bq_2}{a^2+b^2}$. La longitud del segmento PQ es entonces

$$\begin{aligned} \|Q-P\| = \big\|Q-(Q+t(a,b))\big\| = \big\|t(a,b)\big\| = |t|\big\|(a,b)\big\| = \\ \left|-\frac{c+aq_1+bq_2}{a^2+b^2}\right|\sqrt{a^2+b^2} = \\ \left|\frac{c+aq_1+bq_2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \frac{|aq_1+bq_2+c|}{\|(a,b)\|}. \end{aligned} \tag{6.2.12}$$

3. Geometría del espacio

Las mismas consideraciones hechas en la sección anterior nos permiten trabajar en el espacio euclídeo.

En el espacio euclídeo fijamos un origen O y tres rectas por O perpendiculares dos a dos, que notamos Ox, Oy, Oz y llamamos los *ejes coordenados*. Identificamos cada eje con la recta real orientada (con 0 el origen O). Nuevamente, el 1 de cada eje se corresponde con el punto de la semirrecta positiva tal que dista 1 del origen. Convenimos asimismo que los ejes cumplen la “regla de la mano de derecha”: si cerramos la mano derecha yendo desde el semieje positivo Ox al semieje positivo Oy, entonces el pulgar indica la dirección positiva del eje Oz[1], ver Figura 11.

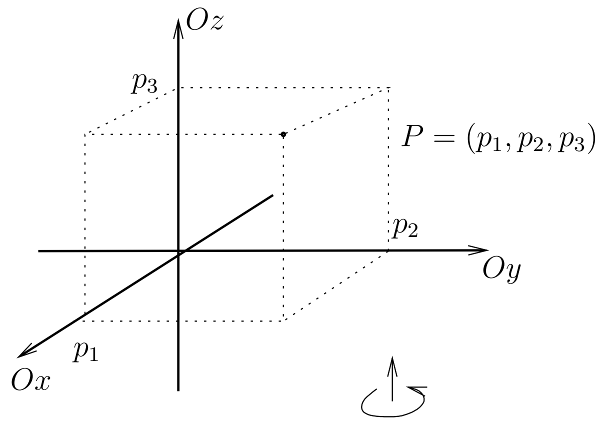

FIGURA 11. El espacio euclídeo visto como $\mathbb{R}^3$.

Dado un punto P del espacio, le asociamos un elemento (p_1, p_2, p_3) de $\mathbb{R}^3$, considerando las proyecciones ortogonales sobre cada uno de los ejes coordenados según el plano determinado por los otros dos. Así, p_1 es la proyección de P sobre el eje Ox según el plano determinado por Oy y Oz (la intersección del plano paralelo al plano yOz por P con la recta Ox).

Nuevamente, notaremos los puntos del espacio con letras mayúsculas y los vectores libres con letras minúsculas, identificándolos con un vector del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Dos puntos $P = (p_1, p_2, p_3)$ y $Q = (q_1, q_2, q_3)$ determinan el vector

$$Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3),$$

[1] La necesidad de estas convenciones está relacionada con el concepto de orientación de las bases de un espacio vectorial, ver Definición ??.

y un vector $v = (v_1, v_2, v_3)$ sumado al punto P determina el punto R tal que $R - P = v$.

La longitud del segmento PQ es igual a la norma del vector $Q - P$:

$$d(P, Q) = \|Q - P\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}.$$

Del mismo modo que en el plano, el ángulo que conforman las direcciones de dos vectores puede calcularse en términos de sus coordenadas.

Definición 6.4. Sean $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ dos vectores del espacio. Definimos el *producto escalar* entre v y w como

$$\langle v, w\rangle = v_1w_1 + v_2w_2 + v_3w_3.$$

Observación 6.5. (1) Es fácil probar que el producto escalar es lineal en ambas variables, es decir

$$\langle av + v', bw + w'\rangle = ab\langle v, w\rangle + a\langle v, w'\rangle + b\langle v', w\rangle + \langle v', w'\rangle \quad \forall a, b \in \mathbb{R}\ ,\ v, v', w, w' \in \mathbb{R}^3.$$

(2) Es claro que además el producto escalar es simétrico, es decir

$$\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^3.$$

(3) Si $v \in \mathbb{R}^3$, entonces $\|v\|^2 = \langle v, v\rangle$.

(4) Considerando el plano que determinan v y w (asumiendo el mismo punto de apoyo), puede mostrarse que si θ es el ángulo determinado por las direcciones de v y w, entonces

$$\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\theta.$$

Nuevamente, v y w determinan direcciones perpendiculares si y solamente si su producto escalar es cero.

3.1. Ecuación de la recta en el espacio.

La recta que pasa por el punto $P = (p_1, p_2, p_3)$ de dirección determinada por el vector $v = (v_1, v_2, v_3) \neq (0, 0, 0)$ tiene *ecuación paramétrica*

$$A = (x, y, z) \in r \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, t \in \mathbb{R}\ :\ \begin{cases} x = p_1 + tv_1 \\ y = p_2 + tv_2 \\ z = p_3 + tv_3 \end{cases} \tag{6.3.1}$$

Del mismo modo que antes, la ecuación paramétrica de la recta r que une dos puntos P y Q puede calcularse considerando el vector $v = Q - P$:

$$A = (x, y, z) \in r \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, t \in \mathbb{R}\ :\ \begin{cases} x = p_1 + t(q_1 - p_1) \\ y = p_2 + t(q_2 - p_2) \\ z = p_3 + t(q_3 - p_3) \end{cases} \tag{6.3.2}$$

Veamos cómo hallar la *ecuación cartesiana de la recta*. Del mismo modo que para el caso plano, el vector v es no nulo, por lo que podemos suponer que $v_1 \neq 0$ (los otros casos se resuelven de modo análogo, obteniendo ecuaciones similares). Eliminamos entonces de la ecuación (6.3.1) el parámetro t, obteniendo la ecuación

$$A = (x, y, z) \in r \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} y = p_2 + \frac{x - p_1}{v_1} v_2 \\ z = p_3 + \frac{x - p_1}{v_1} v_3 \end{cases}$$

de donde

$$A = (x, y, z) \in r \quad \iff \quad \begin{cases} v_1(y - p_2) = v_2(x - p_1) \\ v_1(z - p_3) = v_3(x - p_1) \end{cases} \tag{6.3.3}$$

Si $v_1 = 0$, se puede despejar el parámetro t de la segunda ecuación de (6.3.3)(si $v_2 \neq 0$) o de la tercera (si $v_3 \neq 0$). En ambos casos se obtiene una ecuación *análoga* a (6.3.3). En la seccón siguiente veremos que la ecuación (6.3.3) puede interpretarse como la intersección de dos planos, lo que explica que no se llegue a la misma ecuación al despejar de otra forma el parámetro t. De todos modos, los sistemas obtenidos serán equivalentes, es decir tendrán el mismo conjunto de soluciones: la recta r.

3.2. Ecuación del plano en el espacio.

A continuación veremos cómo generalizar los razonamientos realizados hasta ahora para obtener la ecuación de un plano en el espacio. Posteriormente, utilizaremos la nueva información para obtener una interpretación geométrica de la ecuación cartesiana de la recta.

Un plano π está determinado por dos rectas que se cortan en un punto P. Si $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ son vectores con la dirección de las rectas, entonces la *ecuación paramétrica del plano* π está dada por

$$A = (x, y, z) \in \pi \quad \iff \quad \exists\, t, s \in \mathbb{R} \ : \begin{cases} x = p_1 + tv_1 + sw_1 \\ y = p_2 + tv_2 + sw_2 \\ z = p_3 + tv_3 + sw_3 \end{cases} \tag{6.3.4}$$

Dejaremos esta afirmación sin prueba.

Si el plano está determinado por tres puntos no colineales $P = (p_1, p_2, p_3)$, $Q = (q_1, q_2, q_3)$ y $S = (s_1, s_2, s_3)$, entonces podemos considerar los vectores $Q - P$ y $S - P$ y así obtener la ecuación

$$A = (x, y, z) \in \pi \quad \iff \quad \exists\, t, s \in \mathbb{R} \ : \begin{cases} x = p_1 + t(q_1 - p_1) + s(s_1 - p_1) \\ y = p_2 + t(q_2 - p_2) + s(s_2 - p_2) \\ z = p_3 + t(q_3 - p_3) + s(s_3 - p_3) \end{cases} \tag{6.3.5}$$

ver la Figura 12.

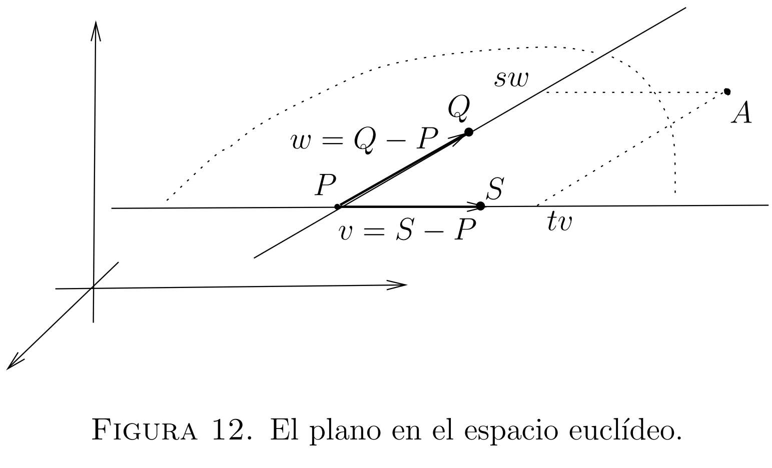

FIGURA 12. El plano en el espacio euclídeo.

Nuevamente, para obtener una ecuación libre de parámetros, podemos eliminarlos de la ecuación (6.3.4). Para ello observemos que como los vectores v y w no son colineales, son linealmente independientes, por lo que si $A = (x, y, z) \in \pi$, existen únicos $t, s \in \mathbb{R}$ tales que se verifica (6.3.4). Sería entonces posible realizar cálculos similares a los del caso de una recta. Sin embargo, resulta más simple generalizar el razonamiento que dio lugar a la ecuación (6.2.10).

Para ello, definiremos primero una nueva operación entre vectores del espacio.

Definición 6.6. Sean $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ dos vectores del espacio. Definimos el *producto vectorial* de v con w como el vector

$$v \wedge w = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).$$

Observación 6.7. (1) Es fácil ver que el producto vectorial $\wedge : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es bilineal, es decir lineal en ambas variables:

$$(av+v')\wedge(bw+w') = ab(v\wedge w)+a(v\wedge w')+b(v'\wedge w)+v'\wedge w' \quad \forall a, b \in \mathbb{R}\ ,\ v, v', w, w' \in \mathbb{R}^3.$$

(2) El producto vectorial de vectores es antisimétrico, es decir

$$v \wedge w = -(w \wedge v) \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^3.$$

(3) Es posible dar una interpretación geométrica del producto vectorial entre dos vectores v y w: el producto vectorial $v \wedge w$ es el vector de dirección perpendicular al plano determinado por v y w, con $\|v \wedge w\| = \|v\|\|w\| \operatorname{sen}\theta$, con θ el ángulo que forman las direcciones de v y w, y sentido determinado por la "regla de la mano derecha". En particular, v, w son colineales si y sólo si $v \wedge w = 0 \in \mathbb{R}^3$. Observemos que $\|v\|\|w\| \operatorname{sen}\theta$ es el área del paralelogramo determinado por v y w.

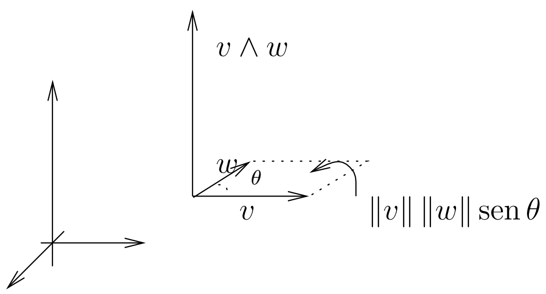

Figura 13. Producto vectorial de dos vectores.

Definición 6.8. Dados 3 vectores v, w, s del espacio, el *producto mixto* de v, w, s se define como

$$(v, w, s) = \langle v \wedge w, s\rangle$$

Es fácil ver que el producto mixto es igual al determinante de la matriz cuyas filas son v, w, s:

$$(v, w, s) = \det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ s_1 & s_2 & s_3 \end{pmatrix}$$

Observación 6.9. El valor absoluto del producto mixto de 3 vectores $v, w, s \in \mathbb{R}^3$ da el valor del volumen paralelepípedo determinado por ellos. En efecto,

$$\big|(v, w, s)\big| = \big|\langle v \wedge w, s\rangle\big| = \big|\|v \wedge w\|\|s\| \cos\alpha\big| = |v\|\|w\|\theta \operatorname{sen}\theta\|s\|\big|cos\alpha\big|$$

donde θ es el ángulo que forman las direcciones de v y w y α al ángulo que forman s con $v \wedge w$, ver figura 14,

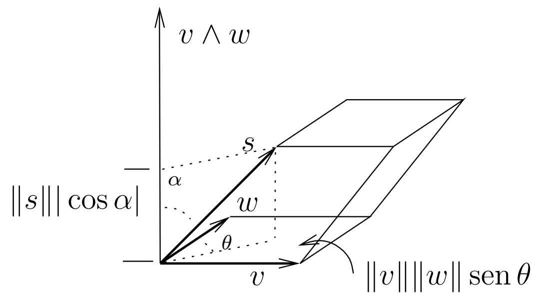

Figura 14. Producto mixto de los vectores $u, v, w \in \mathbb{R}^3$.

Estamos en condiciones ahora de determinar la *ecuación cartesiana del plano* π determinado por el punto P y los vectores v, w. Dicho plano puede verse como el plano perpendicular al vector $v \wedge w$ que pasa por el punto P, ver Figura 15. Luego, $A = (x, y, z)$ es un punto del plano π si y solamente si $A - P$ es perpendicular al vector $v \wedge w = (n_1, n_2, n_3)$, es decir

$$A = (x, y, z) \in \pi \iff \langle v \wedge w, A - P\rangle = 0, \tag{6.3.6}$$

lo que en coordenadas se expresa como

$$A = (x, y, z) \in \pi \iff n_1(x - p_1) + n_2(y - p_2) + n_3(z - p_3) = 0.$$

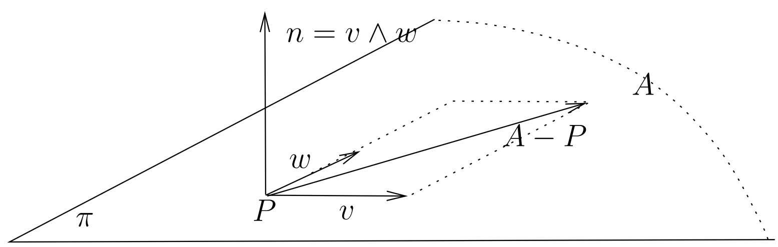

Figura 15. Ecuación del plano perpendicular a n por P.

La ecuación (6.3.6) puede expresarse como $(v, w, P - A) = 0$ (producto mixto). Operando llegamos a

$$A = (x, y, z) \in \pi \iff n_1x + n_2y + n_3z - n_1p_1 - n_2p_2 - n_3p_3 = 0 \tag{6.3.7}$$

Observemos que la ecuación (6.3.7) es de hecho la ecuación de un plano perpendicular a la dirección de (n_1, n_2, n_3) por el punto P. Para obtener la ecuación del plano determinado por P, v y w, basta recordar que

$$(n_1, n_2, n_3) = v \wedge w = (v_2w_3 - v_3w_2, v_3w_1 - v_1w_3, v_1w_2 - v_2w_1).$$

Observación 6.10. Recíprocamente, es fácil ver que los puntos del espacio que son solución del sistema

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{6.3.8}$$

conforman un plano perpendicular al vector (a, b, c). Para determinar el plano alcanza con hallar un punto en particular de él.

En particular, dos planos de ecuaciones $ax+by+cz+d = 0$ y $a'x+b'y+c'z+d' = 0$ respectivas son paralelos si y solamente si $(a', b', c') = \alpha(a, b, c)$ para algún $\alpha \in \mathbb{R}$. Los planos coinciden si además $d' = \alpha d$. En otras palabras, el vector (a, b, c) determina la dirección del plano, y d permite determinar el mismo, ya que permite hallar un punto concreto del plano.

3.3. La recta como intersección de dos planos.

Dos planos distintos que se cortan lo hacen según una recta. Sean entonces π y π' dos planos de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ respectivamente, que se cortan en una recta — este hecho se detecta en las ecuaciones observando que (a, b, c) y (a', b', c') no son colineales. Entonces la recta $r = \pi \cap \pi'$ está dada por la ecuación cartesiana:

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \tag{6.3.9}$$

Dada la ecuación (6.3.9), es posible encontrar la dirección de la recta r. En efecto, (a, b, c) y (a', b', c') son vectores perpendiculares a los planos que determinan r, luego r es perpendicular a ambos vectores. Entonces la recta r tiene dirección $(a, b, c) \wedge (a', b', c')$, ver Figura 16.

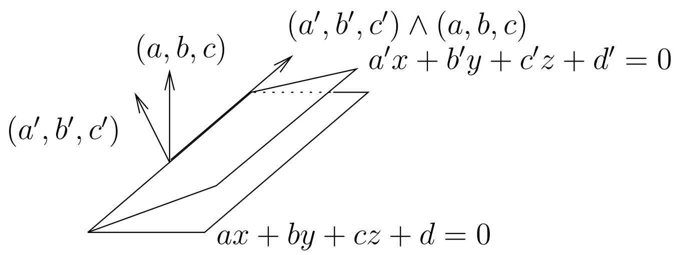

Figura 16. La recta como intersección de dos planos.

Consideremos ahora una recta r; nos interesamos en los planos que la contienen. Es claro que hay infinitos de estos. Supongamos que la recta r tiene ecuación (6.3.9), y sea $a''x + b''y + c''z + d'' = 0$ la ecuación de un plano π. Es claro que $r \subset \pi$ si y sólo si toda solución de (6.3.9) verifica la ecuación de π. Luego, para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, el plano de ecuación

$$(\alpha a + \beta a')x + (\alpha b + \beta b')y + (\alpha c + \beta c')z + \alpha d + \beta d' = 0 \tag{6.3.10}$$

contiene a la recta r. Afirmamos, sin probarlo, que de este modo obtenemos todos los planos que contiene a r. La ecuación (6.3.10) se denomina la ecuación del *haz de planos (que pasan) por la recta r*.

Observación 6.11. Observemos que si consideramos los planos de ecuación $(a+\lambda a')x+(b+\lambda b')y+(c+\lambda c')z+d+\lambda d'=0$, obtenemos todos los planos que contienen a r salvo el plano de ecuación $a'x+b'y+c'z+d'=0$.

3.4. Distancia de un punto al plano.

Del mismo modo que en el caso del plano euclídeo, es posible determinar la distancia de un punto $P=(p_1,p_2,p_3)$ al plano π de ecuación $ax+by+cz+d=0$, ver Figura 17.

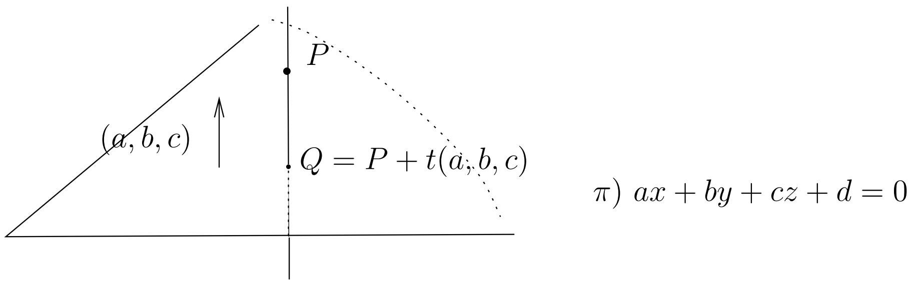

Figura 17. Distancia de un punto al plano.

Primero observamos que la recta perpendicular a π por P tiene dirección (a,b,c). Luego, queremos hallar $t\in\mathbb{R}$ tal que el punto $(p_1+ta,p_2+tb,p_3+tc)\in\pi$, es decir buscamos t tal que

$$a(p_1+ta)+b(p_2+tb)+c(p_3+tc)+d=0.$$

Despejando, obtenemos $t=\frac{ap_1+bp_2+cp_3+d}{a^2+b^2+c^2}$ (nótese que el denominador es no nulo).

La distancia de p a π está dada entonces por

$$\begin{aligned} d(P,\pi) &= \left\|\big(P+t(a,b,c)\big)-P\right\| = \left\|\Big(P+\frac{ap_1+bp_2+cp_3+d}{a^2+b^2+c^2}(a,b,c)\Big)-P\right\| = \\ &\left\|\frac{ap_1+bp_2+cp_3+d}{a^2+b^2+c^2}(a,b,c)\right\| = \left|\frac{ap_1+bp_2+cp_3+d}{a^2+b^2+c^2}\right|\|(a,b,c)\| = \\ &\frac{|ap_1+bp_2+cp_3+d|}{\|(a,b,c)\|} \end{aligned} \tag{6.3.11}$$

Observación 6.12. Procedimientos similares permiten obtener otras distancias. Por ejemplo, la distancia de un punto P a una recta r puede obtenerse intersectando la recta r con el plano perpendicular a r que pasa por P; llamando Q a dicho punto, tenemos que $d(P,r)=\|Q-P\|$.

4. Ejercicios

1. (a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P=(2,-1)$ que es paralela a la recta que pasa por los puntos $Q=(2,0)$ y $R=(1,3)$.

(b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a $r: 3x-4y+1=0$ y pasa por el punto $P=(1,0)$.

(c) Hallar la ecuación de la recta perpendicular al vector $w = (2,1)$ y que corta a la recta $r : y = x - 2$ en el punto de ordenada 3.

2. Hallar un punto P sobre la recta $r : -3x + 4y + 1 = 0$, tal que la recta que contiene al segmento OP (O: origen de coordenadas) pase por el punto medio del segmento AB, siendo $A = (2,1)$ y $B = (1,1)$.

3. Dados los puntos $A = (3,6)$ y $B = (1,0)$ y la recta $r : x - y + 1 = 0$, hallar

1. El simétrico de A respecto a B.
2. El simétrico de B respecto a r.

4. Hallar la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A = (1,2)$ y $B = (3,4)$.

5. Calcular la distancia entre las rectas paralelas $r : 3x + 4y - 15 =$ y $s : 3x + 4y = 40$.

6. Hallar un punto de la recta $r : x + y - 2 = 0$ que equidista de los puntos $A = (1,3)$ y $B = (1,1)$.

7. Hallar el valor de k par que los puntos $A = (2,-1)$, $B = (1,4)$ y $C = (k,9)$ estén alineados.

8. Hallar el valor de a y b par que las rectas $r : ax - y + 2 = 0$ y $s : bx + 6y - 9 = 0$ sean perpendiculares y además la segunda recta pase por el punto $P = (1,1)$.

9. Hallar el valor de $q \in \mathbb{R}$ para que las rectas $r : qx - 2y + 4 = 0$ y $s : x + (q-3)y - 7 = 0$ sean paralelas.

10. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas

$$\begin{array}{rrcl} r: & 2x + y & = & 0 \\ s: & x - y - 2 & = & 0 \end{array}$$

y es perpendicular a la recta $t : \frac{x}{5} + \frac{y}{3} = 1$.

11. Determinar los valores de m y n sabiendo que la recta $r : 2x + ny = 0$ pasa por el punto $P = (1,2)$ y es paralela a la recta $s : mx - 2y + 3 = 0$.

12. Demuestre que dos vectores $u, v \in \mathbb{R}^3$ verifican $v \cdot u = w \cdot u$ para todo $u \in \mathbb{R}^3$ si y sólo si $v = w$.

13. (a) Demuestre que para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$: $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$. Interpretar geométricamente el resultado anterior.

(b) Demuestre que para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$: $\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + \|w\|^2$. Interpretar geométricamente el resultado anterior.

14. Demuestre que para todos $v, w \in \mathbb{R}^3$: $-\|v - w\| \leq \|v\| - \|w\| \leq \|v - w\|$.

15. Sean u, v dos vectores en $\mathbb{R}^3$.

(a) Hallar $\|v\|$ sabiendo que: $\widehat{uv} = \pi/4$, $\|u\| = 3$, $(u - v) \perp u$.

(b) Hallar $\|v\|$ y $\|v + u\|$ sabiendo que: $\widehat{uv} = \pi/4$, $\|u\| = 3$, $\widehat{(u + v)u} = \pi/6$.

16. Dados los vectores u_0 y v, $u_0 \neq 0$, se define el vector $w = \frac{u_0 \cdot v}{\|u_0\|^2} u_0$.

(a) Probar que $(v - w) \perp u_0$.

(b) Probar que para todo λ real se cumple: $\|v-\lambda u_0\|^2 = \|v-w\|^2 + \|w-\lambda u_0\|^2$.

17. Sea $u, v \in \mathbb{R}^3$. Probar que $\|u \wedge v\|^2 + (u \cdot v)^2 = \|u\|^2\|v\|^2$.

Deducir que si $u \perp v$ entonces $\|u \wedge v\| = \|u\|\|v\|$.

18. Sean $u, v \in \mathbb{R}^3$. Probar que $|u \cdot v| = \|u\|\|v\|$ si y sólo si $\{u, v\}$ es linealmente dependiente.

19. Investigar si los siguientes conjuntos de $\mathbb{R}^3$ son ortogonales.

(a) $A = \{(1,0,0),(0,2,0),(0,0,3)\}$.
(b) $B = \{(1,0,1),(2,1,-2),(1,2,4)\}$.
(c) $C = \{(1,1,0),(1,-1,1),(-1,1,2)\}$.
(d) $D = \{(0,1,-1),(0,1,1),(1,0,0),(1,1,0)\}$.

20. Sean $v, w \in \mathbb{R}^3$. Probar que si $v \perp w$ entonces $\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2$.

21. En cada caso hallar $u \cdot v$, $u \wedge v$, $\|u\|$, $\|v\|$ y $\|u \wedge v\|$.

(a) $u = (2,3,1)$ y $v = (1,-1,0)$.
(b) $u = (1,0,4)$ y $v = (2,1,0)$.
(c) $u = (2,0,5)$ y $v = (0,-2,0)$.

22. Hallar la ecuación de la recta r sabiendo que:

(a) Pasa por el punto $P = (1,2,5)$ y es paralela al vector $v = (2,1,3)$.
(b) Pasa por los puntos $A = (4,3,0)$ y $B = (1,0,1)$.
(c) Pasa por el punto $Q = (-1,2,0)$ y es paralela a la recta $s)\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+\lambda \\ y & = & -2\lambda \\ z & = & 1 \end{array}\right.$
(d) Pasa por el punto $A = (1,0,1)$ y es perpendicular al plano $\pi)2 + y + 3z = 1$.
(e) Pasa por el punto $B = (-1,2,-3)$, se cruza perpendicularmente con la recta $s)\left\{\begin{array}{l} x = -1+6\lambda \\ y = -3-2\lambda \\ z = 2-3\lambda \end{array}\right.$ y se intersecta con la recta $s')\left\{\begin{array}{l} x = -1+3\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = 3-5\lambda \end{array}\right.$.
(f) Pasa por el punto $C = (-4,-5,3)$ y se intersecta con las rectas $s)\left\{\begin{array}{l} x = -1+3\lambda \\ y = -3-2\lambda \\ z = 2-\lambda \end{array}\right.$ y $s')\left\{\begin{array}{l} x = 2+2\lambda \\ y = -1+3\lambda \\ z = 1-5\lambda \end{array}\right.$.

23. Hallar la ecuación del plano π sabiendo que:

(a) Pasa por el punto $P = (1,1,1)$ y es paralelo a los vectores $u = 2e_1 - e_2 + e_3$ y $v = e_1 - e_3$.
(b) Pasa por los puntos $A = (1,1,1)$, $B = (2,2,3)$ y $C = (1,1,-2)$.
(c) Pasa por el punto $Q = (5,2,0)$ y es paralelo al plano de la parte anterior.
(d) Pasa por el punto $M = (1,1,1)$ y contiene a la recta r de ecuación general $r)\left\{\begin{array}{lcl} x+y+z+2 & = & 0 \\ x-y-z-2 & = & 0 \end{array}\right.$

24. Calcular en los siguientes casos la distancia del punto al plano.

(a) $M = (-2, -4, 3)$ y $\pi_1)\ 2x - y + 2z = 0$.
(b) $O = (0, 0, 0)$ y $\pi_2)\ 2x + 1 = 0$.

25. Verificar que los siguientes planos son paralelos y hallar la distancia entre ellos.

(a) $\pi_1)\ x - 2y - 2z = 12,\ \ \pi_2)\ x - 2y - 2z = 6$
(b) $\pi_1)\ 2x - 3y + 6z = 14,\ \ \pi_2)\ 4x - 6y + 12z = -21$

26. Probar que las siguientes rectas son perpendiculares.

(a) $r)\left\{\begin{array}{l} x + y - 3z - 1 = 0 \\ 2x - y - 9z - 2 = 0 \end{array}\right.,\ s)\left\{\begin{array}{l} 2x + y + 2z + 5 = 0 \\ 2x - 2y - z + 2 = 0 \end{array}\right.$

(b) $r)\left\{\begin{array}{l} 2x + y - 4z + 2 = 0 \\ 4x - y - 5z + 4 = 0 \end{array}\right.,\ s)\left\{\begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 + 3\lambda \\ z = 1 - 6\lambda \end{array}\right.$

27. Se considera las rectas $r)P = A + \lambda v$ y $r')P' = B + \lambda' w$ donde λ y λ' son parámetros reales.

(a) Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos PP' con $P \in r$ y $P' \in r'$.
(b) Decir que representa esta ecuación cuando v y w son colineales.
(c) Decir que representa esta ecuación cuando v y w no son colineales.

28. Dados los puntos $A = (0, 1, 0)$, $B = (1, 1, 1)$, $C = (-1, -1, 2)$ y $D = (2, 0, 1)$. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio que:

(a) equidistan de A y B.
(b) equidistan de A, B y C.
(c) equidistan de A, B, C y D.

29. Hallar la ecuación del lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de los planos $2x + y - 1 = 0$ y $x + y + x = 0$.

30. Consideremos los planos definidos por las ecuaciones

$$\begin{array}{ll} \pi_1 : & x - y = 2 \\ \pi_2 : & x + 3y + 2z = 2 \\ \pi_3 : & -2x + y - z = 2 \end{array}$$

Determinar la ecuación del plano π que satisface las siguientes condiciones:

1. π contiene a la recta r, que es la intersección de los planos π_1 y π_2.
2. π es perpendicular al plano π_3.

31. Hallar la ecuación de la recta r que satisface las siguientes condiciones:

1. Es perpendicular al plano π que contiene a los puntos $A = (3, 4, 2)$, $B = (-1, 5, 3)$ y $C = (2, 1, 4)$.
2. Pasa por el punto de intersección de la recta $\frac{x}{2} = y - 1 = \frac{z+1}{-1}$ con el plano $2x - y - z = 1$.