CAPíTULO 4

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

4.1. Introducción

El propósito del presente capítulo -y del capítulo denominado *Producto Escalar y Vectorial*- es dar una presentación sucinta de la Geometría Analítica del Espacio, que permita trabajar matemáticamente con los objetos del **espacio ambiente**. En un sentido muy vago y deliberadamente informal entendemos por tal al modelo espacial en que transcurren la mayoría de los fenómenos analizados por la Mecánica y otras teorías científicas Clásicas. Estas teorías se refieren a los acontecimientos más o menos directamente percibidos por los seres humanos.

Esta presentación incluirá la formalización del concepto de vector que el lector conoce de sus cursos de Nivel Secundario. Por un lado, en los cursos de Geometría ha trabajado con las traslaciones que, como recordará, están determinadas por vectores. En general el vector se define en esos cursos como una clase de equivalencia de segmentos orientados con la misma dirección, sentido y congruentes (dos figuras son congruentes si se corresponden por una isometría).

Por otro lado, en Física ha trabajado con ciertas "magnitudes" (fuerza, velocidad, aceleración, etc.) llamadas "vectoriales". Estas se distinguen claramente de otras llamadas "escalares" (masa, temperatura, etc.) porque las últimas quedan determinadas por un único dato numérico, en cambio las primeras requieren más información para caracterizarlas: "módulo", "dirección" y "sentido". Las magnitudes vectoriales se representan además gráficamente mediante una "flecha" y a pesar de las diferencias que ya marcamos con los "escalares" tienen algo en común: con ambos se realizan operaciones.

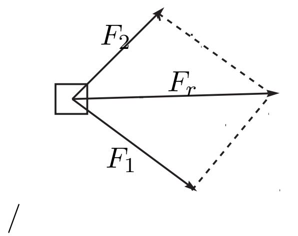


FIGURA 1

Por ejemplo cuando se aplican dos fuerzas $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ sobre un mismo cuerpo el resultado es el mismo que si se aplicara una única fuerza $\vec{F_r}$ con módulo, dirección y sentido igual a la diagonal del paralelogramo de lados $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$ (ver figura 4.1). Se dice entonces que

$$\vec{F_r} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$$

o que $\vec{F_r}$ es la resultante de $\vec{F_1}$ y $\vec{F_2}$, de este modo la "suma de vectores" cobra sentido. Si $\vec{F_1} = \vec{F_2}$ entonces $\vec{F_r} = 2\vec{F_1}$ con lo cual también cobra sentido la multiplicación de escalares por vectores.

Nuestra intención es introducir el concepto de "vector" de una manera más rigurosa y utilizarlo para desarrollar algunas aplicaciones a la Geometría Analítica del Espacio. Al mismo tiempo queremos destacar que este concepto de vector servirá de fuente de inspiración para uno de los objetos fundamentales de este curso. Más adelante daremos una definición más general y abstracta de vector perteneciente a un **espacio vectorial** con múltiples aplicaciones dentro y fuera de la matemática. Este tipo de procesos de generalización desde ejemplos hacia conceptos abstractos permite dar un tratamiento unificado a múltiples objetos a menudo de apariencia disímil pero con propiedades esenciales comunes. Para poder hacerlos se debe estudiar con cuidado los ejemplos sencillos tratando de destacar estas propiedades.

4.2. Vectores

El espacio ambiente, que denotaremos con la letra E, está formado por puntos designados en general con letras mayúsculas $A, B, P, Q, ...$ Dos puntos distintos definen una única recta y tres puntos no contenidos en una recta definen un plano. En este capítulo se dará una descripción analítica de recta, plano y sus relaciones de intersección.

La longitud del segmento entre dos puntos de E define la **distancia entre dos puntos** $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, que satisface
$d(A, B) = d(B, A) \quad \forall A \in E$
$d(A, B) = 0 \quad$ si y sólo si $A = B$
$d(A, C) \leq d(A, B) + d(B, C) \quad \forall A, B, C \in E.$

A este concepto elemental de distancia agregamos ahora el de **vector**. Pretendemos formalizar lo que antes hemos denominado una “flecha” como un objeto que tenga “modulo”, “dirección” y “sentido”. ¿Qué datos son necesarios para dibujarla? En principio basta indicar un par de puntos ordenados (A, B) el punto A será el origen y el punto B el extremo del segmento orientado (“flecha”). Consideremos dos segmentos orientados como en la figura

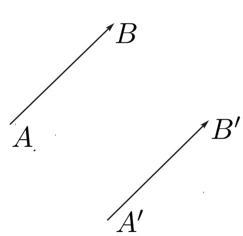
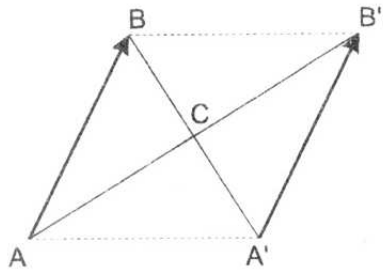


Figura 2

4.2 de modo que $AA'B'B$ sea un paralelogramo, el par (A, B) es distinto de (A', B'). Sin embargo por ser $AA'B'B$ un paralelogramo ambas segmentos orientados tienen igual dirección (las rectas AB y $A'B'$ son paralelas), módulo ($d(A, B) = d(A', B')$) y sentido. Solo se diferencian en el punto de base o de “aplicación”. No estamos interesados en que nuestro concepto de vector distinga objetos por su punto de aplicación así que deberemos ser más cuidadosos en nuestra definición y adoptar una que **no** distinga entre dos flechas como (A, B) y (A', B'). Una manera de lograr esto es identificándolas mediante una relación de equivalencia.

Para ello definimos una relación de equivalencia entre pares ordenados de puntos de E: $AB \sim /A'B'$ si y sólo si $ABB'A'$ es un paralelogramo. Ésta es una relación de equivalencia de acuerdo con la definición dada en el Capítulo 0.



Obsérvese que:

1) Es fácil probar que $AB \sim A'B'$ si y sólo si el punto medio C de AB' / coincide con el de $A'B$; o sea que una misma simetría central de centro C lleva A en B' y A' en B.

2) También se puede dar una definición de la relación de equivalencia en término de traslaciones.

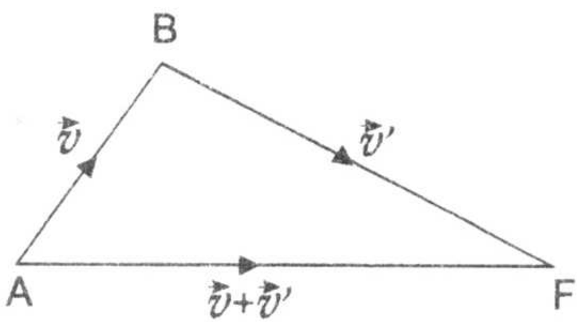
3) Todas estas definiciones sólo utilizan elementos de la geometría plana.

Llamaremos **vector del espacio** E a una clase de equivalencia determinada por esta relación. Cualquier pareja de puntos de una clase de equivalencia representa al correspondiente vector. Si la pareja es AB, el vector por ella representado se escribirá de cualquiera de las siguientes maneras $v = \overrightarrow{AB} = B - A$. Dada una representación AB de un vector v llamaremos **origen (o punto base)** al punto A, y **extremo** al punto B.

Denominaremos con la letra V al conjunto de estos vectores. Obsérvese que el espacio V incluye al vector nulo $\overrightarrow{o} = \overrightarrow{AA}$, para cualquier $A \in E$. Dado un punto $P \in E$ y un vector $v \in V$, es claro que existe un único punto $Q \in E$ tal que $\overrightarrow{PQ} = v$, o sea que hay un único representante de v que tiene origen en P: ese representante es PQ. Dado P, y si v está dado por una pareja AB (o sea $v = \overrightarrow{AB}$) para hallar Q alcanza con construir el paralelogramo $PABQ$. De esta manera hemos definido una función que a pareja de punto de E y vector de V, le hace corresponder otro punto de E , de la siguiente manera: $(P, v) \longrightarrow Q \Longleftrightarrow \overrightarrow{PQ} = v$. Escribiremos / $Q = P+v$ y diremos que Q es la **suma de P más** v.

4.3. Operaciones con vectores.

La **suma de dos vectores** es otro vector, o sea que se trata de definir una función que a parejas de vectores le haga corresponder otro vector: $(v, w) \longrightarrow v + w$. Dados dos vectores $v, w \in V$, se tomarán representantes de cada uno de ellos de modo que el extremo del representante de v sea el origen del de w. O sea, que si $v = \overrightarrow{AB}$, tomamos $w = \overrightarrow{BC}$. Decimos que $\overrightarrow{AC}$ representa al vector suma $v + w$; o sea que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.



Es fácil ver que el vector suma no depende del representante elegido para v ; o sea que si $\overrightarrow{A'B'} = v$ (y $\overrightarrow{B'C'} = w$) entonces $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC}$. Para verificar esta independencia de los representantes, se recomienda -como para casi todas las pruebas de este capítulo- hacer los dibujos correspondientes.

Conviene observar desde ya que para cualquier $v = \overrightarrow{AB}$, resulta $\overrightarrow{o} + v = v + \overrightarrow{o} = v$ (alcanza con tomar el representante AA o BB, según el caso, de $\overrightarrow{o}$). Además el vector $\overrightarrow{BA}$ sumado a v da $\overrightarrow{o}$: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{o}$.

Llamaremos **opuesto de v** al vector representado por BA, y lo escribiremos $-v$. Además (háganse los dibujos), para todo $A, B, C, D \in E$ vale $A - B = C - D \Longrightarrow A - C = B - D$.

Para definir el **producto de un número real por un vector** se debe andar con más cuidado, distinguiendo diferentes casos y utilizando el concepto de distancia. Se trata de definir una función $(a, v) \longrightarrow av$, para todo $a \in \mathbb{R},\ v \in V$. Obsérvese que no hemos indicado el producto del número real a por el vector v con ningún símbolo; sencillamente hemos colocado av juntos. Esto podría dar lugar a confusiones, pero siendo a y v elementos de conjuntos en general distintos, hemos preferido la simplificación de no usar símbolo explícito para este producto. Sea $v = \overrightarrow{AB}$,
- si $a \geq 0$, en la semirrecta AB se elige el único C tal que $d(A, C) = ad(A, B)$. O sea que C está del mismo lado que B respecto a A, en la recta determinada por A y B
- Si $a < 0$, se elige C en el lado opuesto al que está B respecto de A, de modo que $d(A, C) = |a|d(A, B)$.

En ambos casos se define $\overrightarrow{AC} = a\overrightarrow{AB} = av$. Se observa fácilmente que esta definición no depende del representante de v que se haya elegido. Obsérvese también que la multiplicación del número cero por cualquier vector da el vector nulo: $0v = \overrightarrow{o}$, para todo $v \in V$. Igualmente, el vector opuesto $-v$ se obtiene multiplicando v por el número -1; o sea que $(-1)v + v = \overrightarrow{o}$. Diremos que dos vectores u, v son **colineales** (o **paralelos** o que tienen la **misma dirección**) si $u = av$ para algún número real a. También diremos que u es **múltiplo** de v. Si $a > 0$ diremos que además tienen el **mismo sentido**. Si $a = \pm 1$ tienen el mismo **módulo**. Esta definición lleva a que el vector nulo sea colineal con todo vector de V, porque el número real puede ser el cero.

Estas dos operaciones de suma de vectores y producto por un real, verifican las siguientes ocho propiedades (u, v, w son cualesquiera vectores de V y a, b son cualesquiera números reales):

[S1] [Conmutativa] $u + v = v + u$,
[S2] [Asociativa] $u + (v + w) = (u + v) + w$, $\forall\, X, Y, Z \in \mathbb{R}^n$.

[S3] [Neutro de la suma] Existe un vector $\overrightarrow{o}$ tal que $v + \overrightarrow{o} = v$,
[S4] [Existencia de opuesto] Existe $-v$ tal que $v + (-v) = \overrightarrow{o}$;
[P1] [Asociativa del producto] $a(bv) = (ab)v$,
[P2] [Neutro del producto] $1v = v$
[P3] [Distributiva] $(a + b)v = av + bv$,
[P4] [Distributiva] $a(u + v) = au + av$.

Obsérvese los distintos significados que tienen los productos (sus símbolos están omitidos) en P1; y las sumas, en P3. Para probar estas propiedades para los vectores de V recomendamos una vez más hacer dibujos claros, aplicar bien las definiciones de cada una de las operaciones y luego aplicar propiedades elementales de geometría plana y de los números reales. Como ejemplo daremos la prueba de P1. Si $v = \overrightarrow{AB}$, sean $(ab)v = \overrightarrow{AC}$ y $a(bv) = \overrightarrow{AD}$ con C, D en la recta AB. Si a ó b es cero, el resultado es $A = C = D$ o sea $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{o}$. Si a, b tienen el mismo signo, C y D están en la semirrecta de origen A por B y $d(A, C) = d(A, D) = ab$, por lo que $C = D$. Si $a > 0,\ b < 0,\ \ C$ está en el lado opuesto a B y D también porque bv tiene sentido opuesto a v y $a(bv)$ tiene el sentido de bv; además $d(A, C) = d(A, D) = |ab|$; por tanto C y D coinciden. Más adelante se considerarán entes matemáticos entre cuyos elementos se pueden definir operaciones que verifican este conjunto de propiedades. Se verá que con sólo ellas se puede desarrollar la teoría más simple, abstracta y abarcativa de **espacios vectoriales**. También es importante tener presente las siguientes propiedades que relacionan la suma de punto y vector con la suma de vectores ($\forall\ A, B, C, D \in E,\ v, w \in V$):
1. $A + (v + w) = (A + v) + w$.
2. $A + (B - A) = B; \quad (A + w) - A = w$.
3. $A + \overrightarrow{o} = A;\ A - A = \overrightarrow{o}$.
4. $(B - A) + u = (B + u) - A = B - [A + (-u)]$. Como ejemplo, veremos la prueba de 4. Si $w = (B - A) + u$, resulta $A + w = [A + (B - A)] + u = B + u$, por 2. Luego $w = (B + u) - A$ por la segunda parte de 2. Esto prueba la primera igualdad. Además $[A + (-u)] + w = A + [-u + (B + u) - A] = A + [-u + (B - A) + u] = A + (B - A) = B$; se han usado sucesivamente

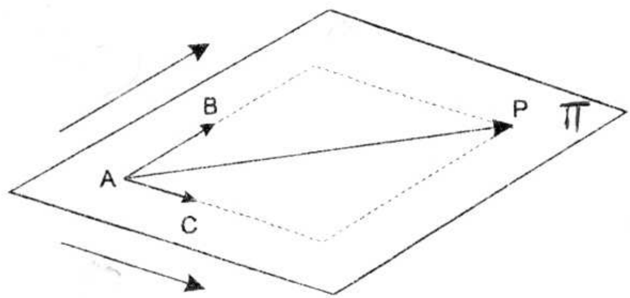
1., la definición de w, la primera igualdad de 4. y la primera de 2. Entonces $w = B - (A + (-u))$ y queda demostrada la segunda igualdad de 4.

4.4. Ecuaciones vectoriales de rectas y planos. Paralelismo

Recta. Sea r la recta de E definida por los puntos A y B. De acuerdo con lo visto en la definición de producto de un vector por un número real, todos los puntos de esa recta quedan descriptos por $A + \lambda\overrightarrow{AB}$, al variar λ entre los números reales. O sea que todo punto $P \in r$ es de la forma $P = A + \lambda\overrightarrow{AB}$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}$. También se puede dar una recta s por un punto $A \in E$ y un vector no nulo $v \in V$, llamado **vector director** de la recta s. En este caso resulta $s = \{P \in E : P = A + \lambda v, \lambda \in \mathbb{R}\}$. Dos rectas con vectores directores v, w son **paralelas** si y sólo si v es colineal con w. Si además, ambas rectas paralelas tienen un punto en común, ellas son la misma recta. En efecto si las rectas son de la forma $A + \lambda v, \quad B + \mu w$ con $w = a_1 v$ y $B = A + \lambda_1 v$, resulta que todo punto de la segunda recta es de la forma $B + \mu w = A + (\lambda_1 + a_1\mu)v$, o sea que es de la primera recta.

Plano. Dados tres puntos no pertenecientes a la misma recta (no colineales) $A, B, C \in E$, el plano π por ellos definido esta formado por el conjunto de puntos de la forma $A + \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. De igual manera que en caso de las rectas, un plano también queda bien definido por un punto A y dos vectores u, v no colineales. En este caso $\pi = \{P \in E : P = A + \lambda u + \mu v, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$. Cualquier pareja de vectores u, v no colineales que definan un plano de esa manera se denominarán **vectores directores** del plano.

Dos planos π, π' son **paralelos** si todo vector con representantes definidos por dos puntos de π, tiene también representantes con dos puntos de π'. Diremos, un tanto imprecisamente, que los vectores **son** de π y π'. Hallaremos una condición necesaria y suficiente para que dos planos π, π' de las formas $P = A + \lambda u + \mu v, \quad P' = A' + au' + bv', \quad u, v$ no colineales, u', v' no colineales, sean paralelos. Obsérvese primero que todos los vectores determinados por dos puntos del plano π son de la forma $\overrightarrow{AP} = \lambda u + \mu v$. Para que los dos planos sean paralelos no es necesario que u, u' y v, v' sean colineales,



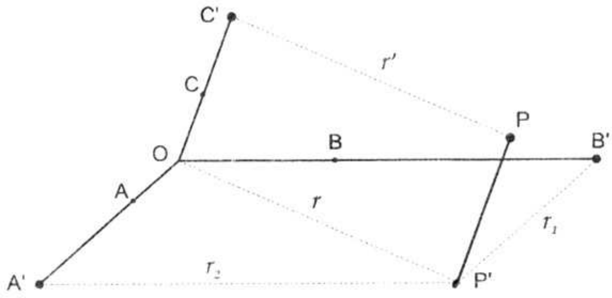
sino que los vectores u', v' se puedan escribir como suma de múltiplos de u, v. En efecto si $u' = \lambda_1 u + \mu_1 v,\ \ v' = \lambda_2 u + \mu_2 v$ resulta que todo vector de π' es de la forma $au' + bv' = (a\lambda_1 + b\lambda_2)u + (a\mu_1 + b\mu_2)v$; o sea que también lo es de π. Si u' y v' se escriben de aquella manera como combinaciones lineales de $u,\ v$, se pueden despejar u y v de la siguiente manera

$$v = \frac{\lambda_2 u' - \lambda_1 v'}{\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2}, \quad u = \frac{-\mu_2 u' + \mu_1 v'}{\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2}$$

(que tiene sentido porque si fuera $\lambda_2\mu_1 - \lambda_1\mu_2 = 0$ resultaría $\lambda_2 u' - \lambda_1 v' = 0$ y serían u', v' colineales, lo cual va contra una suposición inicial); por un razonamiento igual que el anterior resulta que todo vector de π también es vector de π'.

4.5. Sistemas de coordenadas

Comencemos con dos definiciones de gran trascendencia. v es una **combinación lineal de los vectores** $v_1, v_2, \cdots, v_n \in V$ si es de la forma $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ con $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$. Una **base** de V es un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\} \subset V$ tal que todo vector $v \in V$ se escribe *de manera única* como combinación lineal de ese conjunto. O sea, si para cada $v \in V$ existen únicos $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$. Destacamos la *unicidad* de la combinación lineal de vectores de la base, para generar cada uno de los vectores de V. En un sentido que se aclarará en capítulos posteriores, una/ base es un conjunto mínimo que permite escribir todos los vectores de V como combinación lineal de ellos. A continuación mostraremos cómo son las bases de V.



De acuerdo con las definiciones que venimos dando, es claro que se pueden elegir cuatro puntos $A, B, C, D \in E$ **no coplanares** (no pertenecientes a un mismo plano). Diremos también que los vectores por ellos determinados son no coplanares. O sea, los vectores $u, v, w \in V$ son no coplanares si $w \neq au + bv$ para cualesquiera dos números reales a, b. Esto equivale, si se toman representantes de los vectores con el mismo origen $O: \quad u = \overrightarrow{OA},\ v = \overrightarrow{OB}, w = \overrightarrow{OC}$, a que el punto C no esté en el plano determinado por O, A, B, o sea que $C \neq O + a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ para cualesquiera números reales a, b. Sean cuatro puntos no coplanares $O, A, B, C \in E$. Dado cualquier punto $P \in E$, consideremos la recta s paralela a OC por P. Ella corta al plano OAB en P' (que coincide con O si P esta en la recta OC). Por P' trazamos las paralelas r_1, r_2 a las rectas OA, OB, respectivamente, que cortan a OB y OA en B' y A', respectivamente. Por otro lado, el plano paralelo a OAB por P corta a la recta OC en el punto C' (que coincide con O si P esta en el plano OAB). No es difícil ver, utilizando propiedades elementales de paralelismo e intersecciones, que se habría llegado a los mismos puntos A', B', C' si se hubieran trazado recta y plano paralelos a por ejemplo la recta OA y el plano OBC, y seguido el procedimiento indicado anteriormente. Por la definición de suma de vectores aplicada dos veces, se deduce que $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$, y por la definición de producto de número real por vector, se ve el vector $\overrightarrow{OA'}$ es colineal con $\overrightarrow{OA}$, por lo que

$\overrightarrow{OA'} = a\overrightarrow{OA}$ para algún $a \in \mathbb{R}$. De igual manera $\overrightarrow{OB'} = b\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC'} = c\overrightarrow{OC}$ para $b, c \in \mathbb{R}$. Por tanto $v = \overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC}$. Para cada $P \in E$ (o lo que es lo mismo, cada $v \in V$) los números reales a, b, c son únicos pues si fuera $v = a'\overrightarrow{OA} + b'\overrightarrow{OB} + c'\overrightarrow{OC}$ resultaría, suponiendo que, por ejemplo $a \neq a'$: $(a - a')\overrightarrow{OA} = (b' - b)\overrightarrow{OB} + (c' - c)\overrightarrow{OC}$ por lo que

$$\overrightarrow{OA} = \frac{b' - b}{a - a'}\overrightarrow{OB} + \frac{c' - c}{a' - a}\overrightarrow{OC}.$$

Entonces el punto A estaría en el plano OBC lo cual contradice la hipótesis de que los puntos O, A, B, C no son coplanares. Esta demostración vale para cualesquiera tres vectores $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ no coplanares. Por tanto hemos demostrado que *tres vectores no coplanares cualesquiera forman una base del espacio* V. Recíprocamente, *si tres vectores forman una base de* V *ellos deben ser no coplanares.* En efecto, si fueran coplanares, tomando representantes con un mismo origen O, sus extremos determinarían un plano π, y ningún vector $\overrightarrow{OP}$ con $P \in \pi$ se podría escribir como combinación lineal de ellos.

A continuación generalizaremos el concepto de sistema de coordenadas –que el estudiante ha estudiado en el plano– al espacio E, que es el objeto principal de esta parte del curso. El estudiante recordará que los puntos de una recta se ponen en correspondencia biunívoca con los números reales, eligiendo un origen y una unidad; y que los puntos de un plano se ponen en correspondencia biunívoca con las parejas ordenadas de números reales ($\mathbb{R}^2$) eligiendo un origen y dos ejes transversales que se cortan en ese origen.

Un **sistema de coordenadas o referencial de E** está formado por un punto O, el **origen de coordenadas** y una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ de V. Las rectas determinadas por O y v_1, v_2, v_3 se denominan **ejes coordenados**. Si los ejes coordenados son perpendiculares se dice que el sistema de coordenadas es **ortogonal**. Se suele representar por Ox, Oy, Oz a los ejes coordenados definidos por O y v_1, v_2, v_3, respectivamente. Se llamará **plano coordenado xOy** al plano determinado por Ox, Oy. De igual manera se definen los planos coordenados yOz, zOx.

Por lo que antecede resulta que dado un sistema de coordenadas $\{O, v_1, v_2, v_3\}$, para cada $P \in E$ existen números únicos x_1, x_2, x_3 tales que

$P-O = x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$; luego, $P = O+x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3$. Decimos que x_1, x_2, x_3 son las **coordenadas de P en el sistema** $\{O, v_1, v_2, v_3\}$. De igual manera, si $v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$, llamaremos **coordenadas de v en la base** $\{v_1, v_2, v_3\}$ a la terna (a_1, a_2, a_3) por lo que esta terna, dependiendo del contexto al que se refiera, indicará a las coordenadas del punto $A = O+v \in E$, o del vector $v \in V$. La determinación de un sistema de coordenadas establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los puntos del espacio E y $\mathbb{R}^3$, el conjunto de las ternas ordenadas de números reales. Como ejemplos destacamos que el punto elegido como origen de coordenadas tiene coordenadas $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ y el punto $O + v_1$ tiene coordenadas $(1, 0, 0)$. Se suele escribir $P = (x_1, x_2, x_3)$, para indicar que x_1, x_2, x_3 son las coordenadas de P en un sistema de coordenadas en el que se está trabajando, o que se da por sobreentendido.

Observaciones

1. Si $A = O + a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3$ y $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$, entonces $A-O = a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3$ y $A-O+v = (a_1+x_1)v_1+(a_2+x_2)v_2+(a_3+x_3)v_3$, por lo que $A + v = O + (a_1 + x_1)v_1 + (a_2 + x_2)v_2 + (a_3 + x_3)v_3$. Por tanto las coordenadas del punto $A + v$ son: $(a_1 + x_1), (a_2 + x_2), (a_3 + x_3)$.

2. Si $A = O + a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3//$ y $B = O + b_1v_1 + b_2v_2 + b_3v_3$, entonces $B - A = (b_1 - a_1)v_1 + (b_2 - a_2)v_2 + (b_3 - a_3)v_3$ y las coordenadas del vector $B - A$ son $(b_1 - a_1,\ b_2 - a_2,\ b_3 - a_3)$.

4.6. Ecuaciones paramétricas de rectas y planos

Veamos que forma toman las ecuaciones de rectas y planos en un referencial $\{O, v_1, v_2, v_3\}$. Sea la recta $r :\ P = A + \lambda(B - A)$. Supongamos $A = (a_1, a_2, a_3),\ B = (b_1, b_2, b_3)$; entonces por la última observación de la sección anterior resulta $B - A = (b_1 - a_1)v_1 + (b_2 - a_2)v_2 + (b_3 - a_3)v_3$, y por la observación 1., si P tiene coordenadas (x, y, z) los puntos de la recta r tienen coordenadas

$$x = a_1+\lambda(b_1-a_1), \qquad y = a_2+\lambda(b_2-a_2), \qquad z = a_3+\lambda(b_3-a_3). \tag{4.33}$$

Si r es de la forma $P = A + \lambda v$ con $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$ se obtiene:

$$x = a_1 + \lambda x_1, \qquad y = a_2 + \lambda x_2, \qquad z = a_3 + \lambda x_3. \tag{4.34}$$

Estas ecuaciones se suelen llamar **ecuaciones paramétricas de la recta**, y se suele pedir, por ejemplo "hallar las ecuaciones paramétricas de la recta"que pasa por los puntos $P = (1, 0, 1)$ y $Q = (-2, 1, 2)$. En realidad debiera decirse, "hallar unas ecuaciones paramétricas de la recta"porque dependiendo del punto que se tome como base, y del vector director elegido (uno o cualquier múltiplo -no nulo- de él) se obtendrán diferentes ecuaciones paramétricas. Sin embargo, dado que la recta es la misma, independientemente de la presentación analítica elegida, seguiremos refiriéndonos a *las* ecuaciones, en todos los casos. La respuesta al ejemplo que antecede es

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + \lambda(-3, 1, 1)$$

Sean tres puntos no alineados $A = (a_1, a_2, a_3)$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $C = (c_1, c_2, c_3)$. Consideramos el plano de ecuación $P = A + \lambda(B - A) + \mu(C - A)$. Llamando (x, y, z) a las coordenadas de P, por un razonamiento análogo al utilizado para obtener (4.33), se obtiene

$$\begin{aligned} x &= a_1 + \lambda(b_1 - a_1) + \mu(c_1 - a_1), \\ y &= a_2 + \lambda(b_2 - a_2) + \mu(c_2 - a_2), \\ z &= a_3 + \lambda(b_3 - a_3) + \mu(c_3 - a_3). \end{aligned} \tag{4.35}$$

Si el plano es de la forma $P = A + \lambda v + \mu w$ con $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3$, $w = y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3$ se obtiene:

$$x = a_1 + \lambda x_1 + \mu y_1, \qquad y = a_2 + \lambda x_2 + \mu y_2, \qquad z = a_3 + \lambda x_3 + \mu y_3. \tag{4.36}$$

4.7. Ecuaciones implícitas de rectas y planos

Rectas Las ecuaciones (4.33), si $a_1 \neq b_1$, $a_2 \neq b_2$, $a_3 \neq b_3$, se pueden escribir de la siguiente manera

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3} \tag{4.37}$$

Análogamente, de (4.34) se deduce, si $x_1, x_2, x_3 \neq 0$:

$$\frac{x-a_1}{x_1} = \frac{y-a_2}{x_2} = \frac{z-a_3}{x_3} \tag{4.38}$$

En ambos casos, si alguno de los denominadores fuera cero, el correspondiente numerador también es cero. También por eliminación de λ, μ en (4.35), se obtiene la forma general de la ecuación de un plano (usando determinantes de matrices dos por dos):

$$(x-a_1)\begin{vmatrix} b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} - (y-a_2)\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_3-a_3 \end{vmatrix} +$$

$$+(z-a_3)\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_2-a_2 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 \end{vmatrix} = 0.$$

La expresión que antecede al signo de igual puede tomarse como la definición del determinante de una matriz 3 por 3 -que será vista en detalle más adelante en el curso-, pudiéndose escribir más compactamente de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ b_1-a_1 & b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.39}$$

Partiendo de (4.36) se obtiene otra forma de la ecuación implícita de un plano. Así, si el plano está dado por el punto $A = (a_1, a_2, a_3)$ y los vectores $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3,\ w = y_1v_1 + y_2v_2 + y_3v_3$, la ecuación implícita toma la forma

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.40}$$

Desarrollando estos determinantes tenemos, por ejemplo para (4.39)

$$a(x-a_1) + b(y-a_2) + c(z-a_3) = 0, \quad \text{o también } \ ax + by + cz + d = 0,$$

$$\text{donde } a = k\begin{vmatrix} b_2-a_2 & b_3-a_3 \\ c_2-a_2 & c_3-a_3 \end{vmatrix}, b = k\begin{vmatrix} b_1-a_1 & b_3-a_3 \\ c_1-a_1 & c_3-a_3 \end{vmatrix},$$

$$c = k \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 \end{vmatrix}.$$

Recíprocamente toda ecuación de la última forma, en la que por lo menos uno de los coeficientes a, b, c es distinto de cero, representa un plano porque, suponiendo, por ejemplo $c \neq 0$, ella equivale a las tres ecuaciones

$$x = \lambda, \quad y = \mu, \quad z = -\frac{d}{c} - \lambda\frac{a}{c} - \mu\frac{b}{c}$$

que son de la forma(4.36). Obsérvese que los coeficientes a, b, c sólo dependen de los vectores directores del plano. Dado que planos paralelos se pueden determinar con los mismos vectores directores, resulta que dos planos

$$ax + by + cz + d = 0, \qquad a'x + b'y + cz + d' = 0.$$

son paralelos si y sólo si $a = pa'$; $b = pb'$; $c = pc'$ para algún real p. Si, además, $d = pd'$ ambas ecuaciones representan el *mismo* plano. Observamos también que, por ejemplo de (4.38) se puede deducir

$$\frac{x - a_1}{x_1} = \frac{y - a_2}{x_2}, \quad \frac{x - a_1}{x_1} = \frac{z - a_3}{x_3}$$

que se reduce a

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a'x + b'y + c'y + d' = 0. \tag{4.41}$$

Estas dos ecuaciones indican la propiedad bien conocida de toda recta puede determinarse por dos planos que se cortan en ella.

Ej. 1. En el ejemplo de la sección anterior, las ecuaciones implícitas de la recta por P y Q (recordar las disquisiciones sobre *las* y *unas* ecuaciones) son

$$\frac{x-1}{-3} = y = z - 1, \text{ o bien } x + 3y = 1, \;\; y - z = -1$$

Ej. 2. Las ecuaciones implícitas de la recta por $(2, 1, 0)$, $(3, 1, 5)$ son $x - 2 = z - 5/5$, $y = 1$

Ej. 3. Las ecuaciones pàramétricas del plano por $(1, 1, 0)$ que tiene por vectores directores $u = (-1, 0, 2)$ y $v = (1, 3, 3)$ son

$$x = 1 - \lambda + \mu, \;\; y = 1 + 3\mu \;\; z = 2\lambda + 3\mu.$$

Su ecuación implícita es $-6x + 5y - 3z + 1 = 0$.
Ej. 4. $x - 2y = 0$ es la ecuación de un plano paralelo al eje coordenado Oz, que corta al plano xOy según la recta $z = 0, \;\; x - 2y = 0$.
Ej. 5. Ecuación del plano paralelo al de ecuación $x+y+z = 0$ por el punto (1,1,1). Será de la forma $x + y + z + d = 0$, por el punto $(1, 1, 1)$; por tanto $1 + 1 + 1 + d = 0$ y resulta $d = -3$.

El lector atento ya habrá percibido que si (x, y, z) designa las coordenadas genéricas de cualquier punto del espacio, dado un cierto sistema de coordenadas,la ecuación implícita de un plano viene dado por *una* ecuación lineal en (x, y, z); en general la ecuación de cualquier superficie vendrá dada por una ecuación. Y una recta, vendrá dada por *dos* ecuaciones. Los puntos que verifican las dos ecuaciones serán los de la recta.

4.8. Posiciones relativas de rectas y planos.

En esta sección se verá que el estudio de las posiciones relativas de rectas y planos llevan naturalmente a plantearse la resolución de sistemas de ecuaciones.

Dadas dos rectas en el espacio, podemos simplificar sus posiciones relativas en tres categorías. O bien se cruzan sin cortarse (esta es la posición genérica, la más común), o bien se cortan en un solo punto, o bien son paralelas (este caso incluye el de las rectas coincidentes. El caso de que sean paralelas ya fue analizado: son rectas con vectores directores colineales (uno múltiplo del otro) y coinciden o no según tengan algún punto común o no. Si los vectores directores no son colineales se trata de encontrar puntos comunes a las dos rectas. Para ello se estudia el sistema de ecuaciones formado al igualar las ecuaciones de sus coordenadas. Si las rectas se dan en forma paramétrica se tendrá un sistema con tres ecuaciones y dos incógnitas (los parámetros de cada una de las rectas). Este sistema, si los vectores directores no son colineales, puede ser compatible determinado (una solución formada por una pareja de números correspondientes a cada parámetro) o incompatible (sin solución). El primer caso corresponde al caso de corte (y la solución en cada parámetro dará el mismo punto en el espacio, pero al moverse por cada una de las rectas); el segundo caso corresponde a las rectas que se cruzan.

Ej. 1. Determinar las posiciones relativas de las rectas

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=(1,0,1)+\lambda(-1,1,0)\\(x,y,z)&=(0,1,2)+\mu(2,0,1).\end{aligned}$$

Al igualar las coordenadas resulta

$$1-\lambda=2\mu;\;\;\lambda=1;\;\;0=2+\mu$$

que no posee ninguna solución: las rectas se cruzan.
Ej. 2. Determinar las posiciones relativas de las rectas

$$(x,y,z)=(1,0,1)+\lambda(-1,1,0);\;\;(x,y,z)=(0,1,2)+\mu(-4,4,0).$$

Los vectores directores son colineales y al igualar las coordenadas se obtiene

$$(1,0,1)+\lambda(-1,1,0)=(0,1,2)+\mu(-4,4,0)$$

que no tiene solución pues en la tercera coordenada resulta la igualdad de los números distintos 1 y 2: las rectas son paralelas.

Dados dos planos en el espacio podemos simplificar sus posiciones relativas en dos categorías. O bien se cortan en una recta, o bien son paralelos (este caso incluye el de los planos coincidentes). La posición relativa se manifestará analíticamente en que el sistema dado por las dos ecuaciones implícitas sea o bien indeterminado con las soluciones dependientes de un parámetro (un grado de libertad) en el caso de corte en una recta, o bien incompatible (no tiene soluciones) en e caso de planos paralelos no coincidentes, o bien indeterminado con las soluciones dependientes de dos parámetros (dos grados de libertad) en el caso de coincidencia. Si los planos estuvieran dados en forma paramética tendríamos, al igualar las coordenadas de los dos planos, un sistema de tres ecuaciones con cuatro incógnitas (dos por cada plano).

Ej. 3. Posición relativa de los planos

$$2x+3y-z=1, \;\; -x-2y+z=0.$$

Para resolver el sistema dado por las dos ecuaciones, se escaleriza, obteniéndose el sistema $2x+3y-z=1$, $-y+z=1$. Este sistema tiene infinitas soluciones que dependen de un solo parámetro (un grado de libertad) y por tanto los planos se cortan en una recta. Para determinar las ecuaciones paramétricas de esa recta, se puede tomar $y=\lambda$, resultando $z=1+\lambda$, $x=1-\lambda$.

Ej. 4. Posiciones relativas de los planos de ecuaciones paramétricas

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=(1,0,1)+\lambda(1,1,0)+\mu(0,1,-1)\\(x,y,z)&=(0,0,3)+t(1,2,-1)+s(2,1,1).\end{aligned}$$

Igualando las correspondientes coordenadas resulta

$$\begin{array}{lcl}1+\lambda=t+2s & & \lambda+0\mu-t-2s=-1\\ \lambda+\mu=2t+s & \Longrightarrow & \lambda+\mu-2t-s=0\\ 1-\mu=3-t+s & & 0\lambda-\mu+t-s=2.\end{array}$$

Si ahora omitimos de escribir las variables, pero mantenemos su orden λ,μ,t,s, y agregamos una columna con los términos independientes, tendremos las siguientes matrices de coeficientes (primero la original, y luego la escalerizada)

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-2&-1\\1&1&-2&-1&0\\0&-1&1&-1&2\end{array}\right)\Longrightarrow\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-1&-2&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&0&0&3\end{array}\right).$$

El sistema es por tanto incompatible dado que sumando cero de cada una de las variables deberíamos obtener 3. Los planos no se cortan, ellos son paralelos. Observar que de acuerdo con lo observado en la sección tres los vectores directores del segundo plano son combinación lineal de los vectores directores del primer plano:

$$\begin{aligned}(1,2,-1)&=(1,1,0)+(0,1,-1),\\(2,1,1)&=2(1,1,0)-(0,1,-1).\end{aligned}$$

CAPíTULO 5

PRODUCTO ESCALAR Y VECTORIAL

5.1. Producto escalar

DEFINICIÓN 5.1. Dado un vector $v \in V$ llamamos **norma** de v al número $d(A,B)$ con $v = \overrightarrow{AB}$,que notaremos: $\|v\|$ (Observar que $d(A,B)$ no depende del par de puntos (A,B) que se elija como representante de v).

Propiedades:

1) $\|v\| \geqslant 0$; $\|v\| = 0$ si y solo si $v = 0$.

2) $\|av\| = |a|\,\|v\|$ para todo $a \in \mathbb{R}$ y para todo $v \in V$

3) $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$, para todo $u,\ v \in V$

DEMOSTRACIÓN

1) Es inmediato. □

2) Si $a = 0$ es trivial. Si $a \neq 0$ y $v = \overrightarrow{AB}$, por definición del producto de un número por un vector , $av = \overrightarrow{AC}$, donde $d(A,C) = |a|\,d(A,B)$. Luego $\|av\| = d(A,C) = |a|\,d(A,B) = |a|\,\|v\|$. □

3) Un lado de un triángulo es menor o igual que la suma de los otros dos (es la propiedad triangular de geometría métrica). □

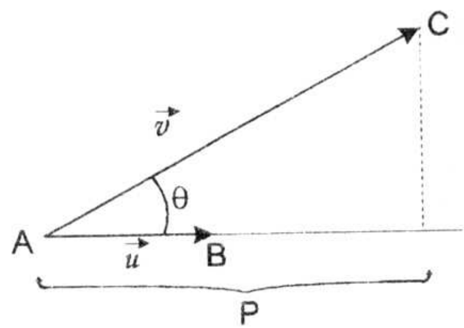
Diremos que v es un **versor** si $\|v\| = 1$. Para todo $v \neq 0$ se tiene que $\frac{v}{\|v\|}$ es un versor pues $\left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| = \frac{1}{\|v\|}\,\|v\| = 1$.

DEFINICIÓN 5.2. Dados los vectores u y v de V llamamos **producto interno o producto escalar** de u por v al número $\|u\|\,.\,\|v\|\,cos\,\theta$ donde θ es el ángulo BAC de tres puntos tales que $\overrightarrow{AB} = u$ y $\overrightarrow{AC} = v$. Observar que el producto escalar no depende de los puntos A, B, C que se elijan para representar u y v.

Notación: u.v ; $< u, v >$, (u, v) ; etc.

En particular $v.v = \|v\|^2$; luego $\|v\| = \sqrt{v.v}$.

Si u es un versor, es decir, si $\|u\| = 1$, entonces $u.v = \|v\| \, cos\, \theta = p$ es la proyección del segmento AC sobre la recta AB de la figura.



Propiedades:

4) $u.v = v.u$

5) $(a.u)\,.v = u.\,(a.v) = a.\,(u.v)$

6) $(u_1 + u_2)\,.v = u_1.v + u_2.v$; $u.\,(v_1 + v_2) = u.v_1 + u.v_2$.

7) $v.v \geqslant 0$ y $v.v = 0$ si y sólo si $v = 0$

Demostración:

4) Es inmediato. □

5) Si $a = 0$ la demostración es trivial . Si $a \geqslant 0$, $\text{áng}\,(au, v) = \text{áng}\,(u, v) = \theta$, luego

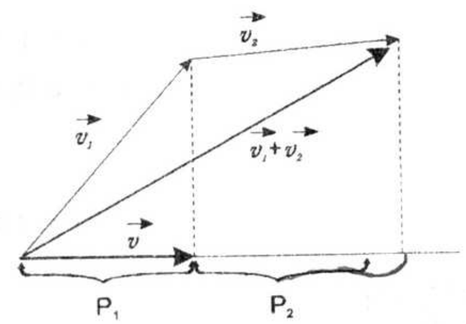
$(\,a.u\,)\,.v = \|au\|\,.\,\|v\|\,cos\theta = |a|\,.\,\|u\|\,.\,\|v\|\,cos\,\theta = a\,(u.v)$.

Si $a < 0$, $\text{áng}\,(au, v) = \pi + \text{áng}\,(u, v) = \pi + \theta$, luego $(\,a.u\,)\,v = \|a.u\|\,\|v\|\,cos\;(\pi + \theta) = -\,|a|\,\|u\|\,\|v\| \cos\,\theta = a\,\|u\|\,\|v\|\,cos\,\theta = a(u.v)$. □

6) Consideremos primero el caso $\|u\| = 1$. Entonces $v_1.u = p_1$, $v_2.u = p_2$. $(v_1 + v_2)\,u = p$ (proyección de $u_1 + u_2$). Es claro que $p = p_1 + p_2$, luego $(v_1 + v_2)\,.u = v_1.u + v_2.u$. (ver figura)

Consideremos ahora el caso general. Por el razonamiento anterior, como $\left\| \frac{u'}{\|u\|} \right\| = 1$, tenemos $(v_1 + v_2) \cdot \frac{u}{\|u\|} = v_1 \cdot \frac{u}{\|u\|} + v_2 \cdot \frac{u}{\|u\|}$, luego $(v_1 + v_2) .u = v_1.u + v_2.u$ $\square$

7) Es inmediata pues $v.v = \|v\|^2$. $\square$



DEFINICIÓN 5.3. Dos vectores u, v se dicen **ortogonales** si $u.v = 0$.

Una base $\left\{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \right\}$ (a partir de aquí no escribiremos la flecha $\vec{\cdot}$) se dice **ortogonal** si $i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$. La base se dice **ortonormal** si además de ser ortogonal verifica que $\|i\| = \|j\| = \|k\| = 1$.

Diremos que $\{O, i, j, k\}$ es un **sistema ortogonal de coordenadas** si $\{i, j, k\}$ es ortonormal.

En el resto de esta sección supondremos que todos los sistemas de coordenadas son ortonormales. En tal caso dados:

$$v = a_1 i + a_2 j + a_3 k \text{ y } w = b_1 i + b_2 j + b_3 k \text{ se tiene} v.w = \sum_{i=1,2,3} a_i b_i.$$

En particular: $\|v\| = \sqrt{v.v} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

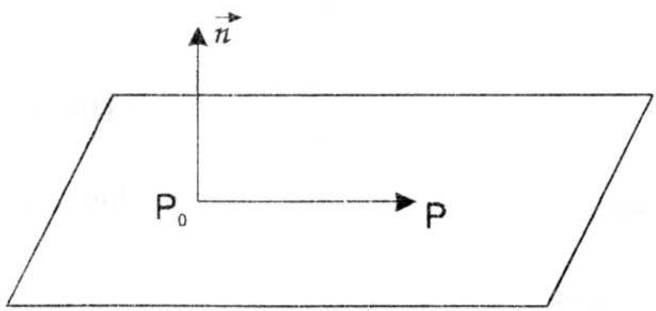
Si $P = O + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ y $Q = O + b_1 i + b_2 j + b_3 k$ entonces $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (b_1 - a_1) v_1 + (b_2 - a_2) v_2 + (b_3 - a_3) v_3$, luego
$d(P, Q) = \|PQ\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_1 - a_1)^2 + (b_3 - a_3)^2}$.

5.2. Aplicaciones a la geometría: ángulos y distancias

Ya vimos que toda ecuación de la forma $ax + by + cz + d = 0$ representa un plano y recíprocamente. Suponiendo que el sistema de coordenadas sea ortogonal volveremos a obtener esa ecuación y mostraremos que en ese caso se puede obtener más información de esta ecuación.

Sea $\{O, i, j, k\}$ un sistema ortogonal de coordenadas, $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ un punto de un plano π y $n = ai + bj + ck \neq 0$ un vector de la dirección de una perpendicular a π (para abreviar diremos que n es un vector normal a π). Entonces, para todo $P \in \pi$, $P = (x, y, z)$, vale $n \cdot (P - P_0) = 0$, de aquí resulta:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$



Esta es entonces la ecuación del plano dado por un punto y la dirección de la normal. Es claro que esa ecuación también se escribe en la forma: $ax + by + cz + d = 0$.

Recíprocamente, dada una ecuación $ax+by+cz+d = 0$, con $a^2+b^2+c^2 \neq 0$ (por ejemplo, c$\neq$ 0), resulta : $ax + by + c\left(z + \frac{d}{c}\right) = 0$. Si el sistema de coordenadas es ortogonal esto equivale a:

$$(av_1 + bv_2 + cv_3) . \left(xv_1 + yv_2 + \left(z + \frac{d}{c}\right) v_3\right) = 0.$$

Poniendo $P = (x, y, z)$, $P_0 = (0, 0, -d/c)$ y $n = av_1 + bv_2 + cv_3$, esta ecuación se escribe: $n.(P - P_0) = 0$. Por tanto, es la ecuación del plano perpendicular a π por P_0.

OBSERVACIÓN 5.1. Si el sistema de coordenadas no es ortogonal, la ecuación $ax + by + cz + d = 0$ también representa un plano como vimos antes, pero en ese caso el vector $av_1 + bv_2 + cv_3$ no tiene por que ser normal al plano.

Veremos ahora algunas consecuencias de esto, siempre con la hipótesis de que el sistema de coordenadas es ortonormal.

a) condición para que dos planos sean paralelos: $ax+by+cz+d = 0$ y $a'x + b'y + c'z + d' = 0$ son paralelos si y sólo si $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$ para algún $\lambda \in \mathbb{R}, (\lambda \neq 0)$.

b) condición para que una recta y un plano sean paralelos: Dados el plano y la recta de ecuaciones $ax + by + cz + d = 0$ y $\frac{x-x_0}{p} = \frac{y-y_0}{q} = \frac{z-z_0}{r}$, son paralelos si y sólo si $pa + qb + rc = 0$, pues esto significa que $n.v = 0$, donde n es normal al plano y v es un vector de la dirección de la recta.

c) ángulo entre dos planos: Para dos vectores cualesquiera, $u \neq 0$, $v \neq 0$, tenemos $\frac{u.v}{\|u\|.\|v\|} = cos\,\theta$. Como el ángulo θ entre dos planos es igual al que forman sus vectores normales respectivos, tendremos: $cos\,\theta = \frac{n_1.n_2}{\|n_1\|\,\|n_2\|}$ donde n_1 y n_2 son vectores normales a esos planos: luego el ángulo θ entre los planos de ecuaciones $ax+by+cz+d=0$ y $a'x+b'y+c'z+d'=0$ verifica:

$$cos\,\theta = \frac{aa' + bb' + cc'}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.\sqrt{a'^2 + b'^2 + c'^2}}$$

d) Ángulo de una recta con un plano: Sean n un vector normal al plano y v un vector de la dirección de la recta . El ángulo del plano con la recta es entonces $\theta = \pi/2 - \varphi$ donde φ es el ángulo determinado por n

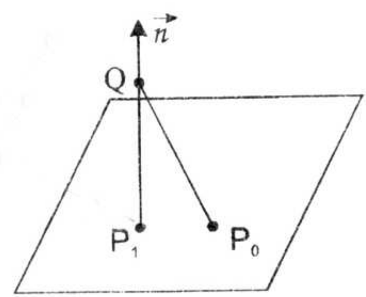
y v. Luego el ángulo de $ax+by+cz+d=0$ con $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ se puede calcular mediante:

$$sen\,\theta = cos\,\varphi = \frac{ap+bq+cr}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{p^2+q^2+r^2}}$$

e) Ángulo de dos rectas: El ángulo θ de $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=\frac{z-z_0}{r}$ con $\frac{x-x_1}{p'}=\frac{y-y_1}{q'}=\frac{z-z_1}{r'}$ se calcula mediante la fórmula

$$cos\,\theta = \frac{pp'+qq'+rr'}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}\sqrt{p'^2+q'^2+r'^2}}.$$

f) Distancia de un punto a un plano: Definimos la distancia $d\,(Q,\pi)$ de Q al plano π como el mínimo de *d(Q,P)* donde $P\in\pi$. Es claro que el mínimo de *d(Q,P)* se obtiene cuando $P=P_1=\pi\cap r$, donde r es la perpendicular a π por Q. Luego : $d\,(Q,\pi)=d\,(Q,P_1)=\left|(Q-P_0)\,.\frac{n}{\|n\|}\right|$, siendo P_0 un punto cualquiera del plano π.



Como la ecuación del plano es $(P-P_0)\,.n=0$, esto significa que d se obtiene reemplazando P por *O=(0,0,0)* en el primer miembro de la ecuación del plano.

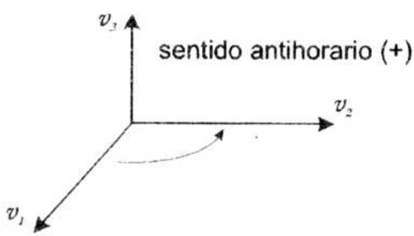
Consideremos ahora un sistema ortonormal de coordenadas. Si $P_0=(x_0,y_0,z_0)$, $Q=(\overline{x},\overline{y},\overline{z})$, $P=(x,y,z)$, $n=ai+bj+ck$ entonces:

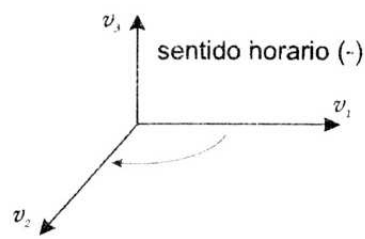
$$(Q-P_o)\cdot n \;=\; a\,(\overline{x}-x_o)+b\,(\overline{y}-y_o)+c\,(\overline{z}-z_o)\;=\;a\overline{x}+b\overline{y}+c\overline{z}+d.$$

Luego : $d\left(Q,\pi\right)=\left|\left(Q-P_0\right)\cdot\frac{n}{\|n\|}\right|=\left|\frac{\overline{a}x+\overline{b}y+\overline{c}z+d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$

5.4. Producto vectorial.

Consideremos la terna ordenada de vectores de V, $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$, que constituye una base de V. Estas las vamos a clasificar en dos grupos: uno formado por las ternas $\{i, j, k\}$ tales que para un observador parado en v_3, la rotación de ángulo convexo (o sea, de medida $< \pi$) que lleva i en j es de sentido antihorario; el otro formado por las ternas en las que esa rotación tiene sentido horario.





Para definir el producto vectorial necesitamos elegir uno de los dos tipos como terna preferida. Nos quedaremos para esto con las ternas del primer tipo que llamaremos **positivas**.

Esta convención sirve para definir el producto vectorial como una función de $V \times V$ *en* V (así como el producto escalar era una función de $V \times V$ *en* $\mathbb{R}$) que a cada par de vectores v, w le asocia un vector, que denotaremos $v \wedge w$, que cumple:

a) $\|v \wedge w\| = \|v\| . \|w\| .sen\, \theta$ (θ ángulo de v con w)

b) $(v \wedge w) .v = 0$ y $(v \wedge w) .w = 0$

c) Si $v \neq 0$ y $w \neq 0$ la terna $\{v, w, v \wedge w\}$ es positiva.

Propiedades:

1) $\|v \wedge w\|$ es el doble del área del triángulo determinado por esos vectores.

2) $v \wedge w = 0$ si y sólo si v y w son colineales (en particular, si alguno de ellos es el vector 0).

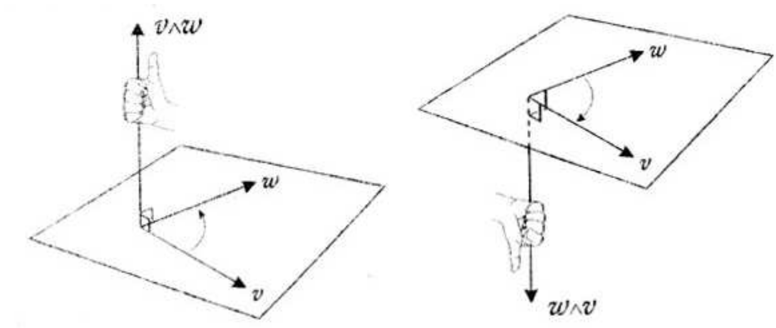
3) Respecto de la condición c) de la definición, corresponde observar que si $v \wedge w \neq 0$ la terna $\{v, w, v \wedge w\}$ es una base, pues por b) esos vectores no son coplanares salvo que v y w sean colineales, en cuyo caso $v \wedge w = 0$

4) $v \wedge w = -(w \wedge v)$ (en particular, esta operación no es conmutativa) Para verificar esto basta notar que si para cierto observador la rotación del ángulo $< \pi$ que lleva v en w es de sentido antihorario, para el mismo observador la que lleva w en v es de sentido horario. De modo que el observador debe ubicarse del lado opuesto del plano u,w para que esa rotación aparezca de sentido trigonométrico . Luego esa debe ser la ubicación de $w \wedge v$ para que la terna $[w, v, w \wedge v]$ sea positiva.

5) Este producto no es asociativo. Se puede deducir que:

$$(u \wedge v) \wedge w + (v \wedge w) \wedge u + (w \wedge u) \wedge v = 0$$

de donde, usando 4), $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w) + v \wedge (w \wedge u)$, y como en general $v \wedge (w \wedge u) \neq 0$, la propiedad asociativa no vale.



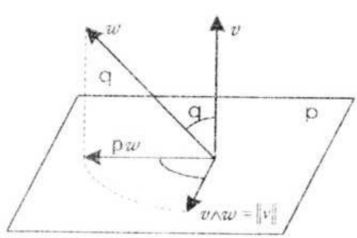
6) Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda\,(v \wedge w) = (\lambda v) \wedge w = v \wedge (\lambda w)$. Esta propiedad se deduce directamente de la definición en el caso $\lambda \geqslant 0$. Para el caso $\lambda < 0$, hay que observar que del hecho que la terna $\{v, w, v \wedge w\}$ es positiva se deduce que $\{-v, w, -(v \wedge w)\}$ y
$\{v, -w, -(v \wedge w)\}$ son también positivas.

7) El producto vectorial es distributivo respecto de la suma de vectores. Esto es:

a) $(v_1 + v_2) \wedge w = v_1 \wedge w + v_2 \wedge w$.

b) $v \wedge (w_1 + w_2) = v \wedge w_1 + v \wedge w_2$.

Para demostrar esta propiedad hacemos algunas observaciones previas. En primer lugar, observamos que llamando π al plano con vector normal v e indicando por $p\ w$ la proyección de w sobre ese plano, y con $r(pw)$ el vector que se obtiene rotando esa proyección un ángulo de medida $\pi/2$ en sentido antihorario observado desde v, se verifica que: $v \wedge w = \|v\|\,.r\,(pw)$ pues $\|r\,(pw)\| = \|pw\| = \|w\|\,.sen\,\theta$ (ver figura)



Como $p(w_1 + w_2) = pw_1 + pw_2$ y $r(pw_1 + pw_2) = r(pw_1) + r(pw_2)$ tendremos que: $v \wedge (w_1 \wedge w_2) = \|v\| .r(p(w_1 + w_2)) = \|v\| .r(pw_1) + \|v\| .r(pw_2) = v \wedge w_1 + v \wedge w_2$.

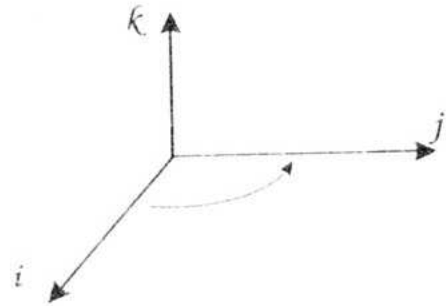
Así se prueba b) y análogamente se obtiene a).

8) Si $\{i, j, k\}$ es una base ortonormal positiva de V , entonces:

$$i \wedge i = j \wedge j = k \wedge k = 0;$$
$$i \wedge j = k; \quad j \wedge k = i; \quad k \wedge i = j$$

(es decir, en la sucesión $(i, j, k, i, j, \cdots)$ el producto de dos vectores sucesivos da el que le sigue):

$$j \wedge i = -k, \; k \wedge j = -i; \; i \wedge k = -j$$



9) De 4.6), 4.7) y 4.8) resulta que si $v = a_1 i + a_2 j + a_3 k$ y $w = b_1 i + b_2 j + b_3 k$. entonces:

$$v \wedge w = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, k.$$

Obsérvese que este resultado puede recordarse pensando en el desarrollo por la primer fila de un determinante:

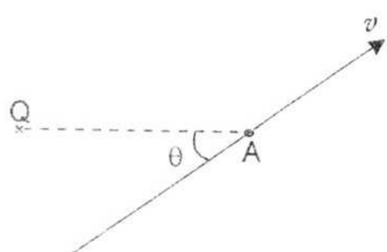
$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\, i - (a_1 b_3 - a_3 b_1)\, j + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\, k$$

Esta expresión del producto vectorial puede también tomarse como su definición. Más precisamente, dada una terna ortonormal cualquiera $\{i,j,k\}$ (positiva o negativa), puede definirse el producto de dos vectores por la expresión dada en 4.9). Se comprueba entonces sin dificultad que el vector: $u = (a_2b_3 - a_3b_2)\,i - (a_1b_3 - a_3b_1)\,j + (a_1b_2 - a_2b_1)\,k$ verifica $\|u\| = \|v\|\,.\,\|w\|\,.sen\,\theta$ y $u.v = u.w = 0$. Si además $\{i,j,k\}$ es una terna positiva puede verificarse, que $\{v,w,u\}$ es también positiva. Luego $u = v \wedge w$, por lo tanto esta definición de $v \wedge w$ coincide con la inicial.

5.5. Aplicaciones geométricas.

a) Distancia de un punto a una recta: sea r una recta dada por un punto A y un vector v. La distancia de Q a r es:

$$d\,(Q,r) = |d\,(Q,A)\,.sen\,\theta| = \|AQ\|\,.sen\,\theta = \frac{\|AQ \wedge v\|}{\|v\|}$$



Si $A = (x_o, y_o, z_o)$; $Q = (\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$; $v = ai + bj + ck$ entonces la distancia es $d(Q,r) =$

$$\frac{\sqrt{[(\overline{y}-y_0)c-(\overline{z}-z_0)b]^2+[(\overline{x}-x_0)c-(\overline{z}-z_0)a]^2+[(\overline{x}-x_0)b-(\overline{y}-y_0)a]^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

EJEMPLO 5.4. En el punto 3 de este capítulo se vieron algunas superficies de revolución particulares. Sea $r\begin{cases} x=y \\ z=0 \end{cases}$ $C:\begin{cases} x=0 \\ zy=1 \end{cases}$. Hallar la superficie de revolución de eje r y generatriz C.

Las ecuaciones son:

$$\begin{cases} x_0=0, \ \ P_0\in C \\ z_0y_0=1, \ \ P_0\in C \\ x-x_0+y-y_0=0, \ \ plano, \ \ \pi, \ \ por, \ \ P_0\perp r \\ 2z^2+(x-y)^2=2z_0^2+(x_0-y_0)^2\,, \ \ dist\,(P,r)=dist\,(P_0,r) \end{cases}$$

eliminando x_0, y_0, z_0 resulta $(x+y)^2\left(z^2-2xy\right)=1$ ■

b)**Intersección de dos planos no paralelos:**

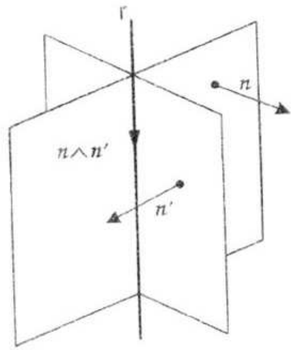
Sea $r:\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$ una recta (dada como intersección de dos planos no paralelos). Supongamos que queremos las ecuaciones paramétricas de esa recta, es decir, las de la forma: $x=x_0+\lambda p, \ y=y_0+\lambda q, \ z=z_0+\lambda r$ (o también $P=P_0+\lambda v$). Para esto se necesita hallar un punto $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ de la recta y un vector $v=p\,i+q\,j+r\,k$ de la dirección de r. Esto se puede hacer sin usar el producto vectorial, resolviendo el

sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$$

Usando el producto vectorial: tomar $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ una solución particular del sistema de ecuaciones. Si el sistema de coordenadas es ortogonal, entonces: $n=ai+bj+ck$ y $n'=a'i+b'j+c'k$ son vectores normales a los planos, y entonces $n\wedge n'$ es un vector de la intersección de ambos planos (luego, está en la dirección de la recta de intersección de ambos).

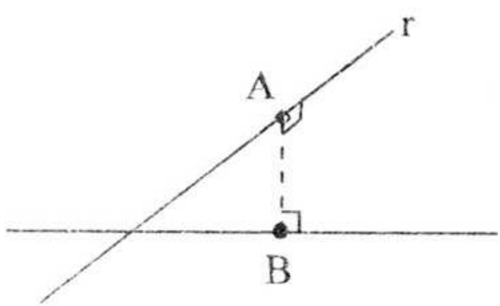
Luego: $n\wedge n'=(bc'-b'c)\,i-(ac'-ca')\,j+(ab'-ba')\,k$ es de la dirección de r.



c) Distancia entre dos rectas: Se define la distancia $d(r, r')$ entre dos rectas r, r' como el mínimo de $d(P, P')$ donde $P \in r$ y $P' \in r'$.

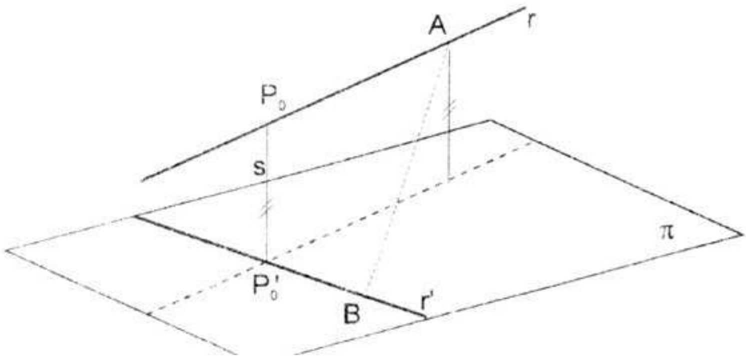
Es claro que este mínimo se obtiene cuando la recta PP' es perpendicular al mismo tiempo a r y a r'. Sea r dada por un punto $A \in r$ y un vector v de su dirección y r' por $B \in r$ y un vector w.

Para tener $d(r, r')$: si r y r' son paralelas: basta tomar el punto A y hallar $dist(A, r')$; si r y r' se cortan: $d(r, r')= 0$.



Supongamos ahora que r y r' no son coplanares. Si s es la perpendicular común , $P_o = s \cap r$ y $P_0' = s \cap r'$, entonces: $d(r, r') = d\left(P_0, P_0'\right) = d(A, \pi)$ donde π es el plano paralelo a r que contiene a r'. (ver figura) . Como versor de la dirección de s puede tomarse $n = \frac{v\wedge w}{\|v\wedge w\|}$. Luego :

$$d\left(r, r'\right) = d\left(A, \pi\right) = \frac{1}{\|v\wedge w\|}\left|\left(v\wedge w\right).\overrightarrow{AB}\right|$$

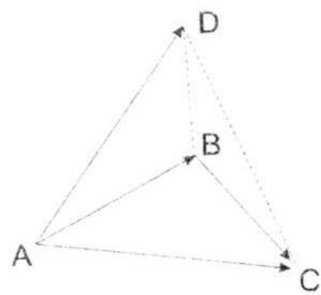


d) Perpendicular común a dos rectas: Si las dos rectas son paralelas, una perpendicular común es la recta perpendicular a una de ellas trazada por un punto de la otra. Si se interceptan , el problema es también fácil de resolver. Supongamos ahora que las dos rectas no son coplanares. La perpendicular común s está en el plano π de s y r, y en el π' determinado por s y r'. Luego $s = \pi \cap \pi'$. Dada la dirección v de r y la w de r', y $A \in r,\ B \in r'$, el plano π queda determinado por A,v y $v \wedge w$. El π' por B,w,$v \wedge w$, pues $v \wedge w$ es un vector de la dirección de s. Las ecuaciones de π y π' así obtenidas constituyen un par de ecuaciones que representan la recta s.

e) Volumen de un tetraedro: Consideremos un tetraedro dado por sus vértices A, B, C, D. Su volumen es $V = \frac{1}{3}$ área de la base $\times$ altura. Tendremos: área base $= 1/2\,\|(B-A)\wedge(C-A)\|$.

Si n es el versor normal a la base, la altura es $|n.(D-A)|$ con $n = \frac{(B-A)\wedge(C-A)}{\|(B-A)\wedge(C-A)\|}$. Luego $V = 1/6.\,\|(B-A)\wedge(C-A)\|\,.\frac{|[(B-A)\wedge(C-A)].(D-A)|}{\|(B-A)\wedge(C-A)\|}$

$$\text{por lo que } \ V = 1/6.\,|[(B-A)\wedge(C-A)]\,.(D-A)|$$



5.6. Producto mixto

Es una operación definida de $V \times V \times V$ en $\mathbb{R}$. Dados tres vectores $u, v,$ y w, llamamos producto mixto al número $(v \wedge w) .u$ que indicamos $v \wedge w.u$, o también $u. (v \wedge w)$. Consideremos un sistema ortonormal $\{i, j, k\}$ y sean:

$$v = a_1 i + a_2 j + a_3 k, w = b_1 i + b_2 j + b_3 k, u = c_1 i + c_2 j + c_3 k.$$

Entonces:

$$v \wedge w = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} k.$$

$$v \wedge w.u = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} c_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} c_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} c_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

(Por desarrollo por la primer fila de ese determinante)

Usando el hecho de que si se permutan dos filas de una matriz entre sí el determinante sólo cambia de signo, resulta que dos de esas permutaciones no cambian el determinante; luego:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

En consecuencia: $(v \wedge w) .u = (u \wedge v) .w = (w \wedge u) .v$. Es decir, que en la sucesión (u,v,w,u,v,w) el producto vectorial de dos vectores sucesivos multiplicado escalarmente por el siguiente, da lo mismo cualesquiera sean los tres vectores sucesivos. Se puede entonces hablar del producto mixto de u, v, w sin indicar si se trata de $(u \wedge v) .w$ o de $u. (v \wedge w)$, pues el resultado es el mismo. Es por esto que se escribe (u,v,w) como notación para $(u \wedge v) .w = u. (v \wedge w)$.

Observamos que $(v,w,u) = 0$ si y sólo si $\text{áng}(v \wedge w, u) = \pi/2$ o alguno de los vectores es el nulo. Como $\text{áng}\ (v \wedge w, v) = \text{áng}\ (v \wedge w, w) = \pi/2$, para que $(v,w,u) = 0$ es necesario y suficiente que v, w y u sean coplanares. (Obsérvese que esto podría sacarse como conclusión del cálculo del volumen del tetraedro. $(v, w, u) = 0$ si y sólo si el volumen del tetraedro determinado por esos vectores es 0, esto es equivalente a decir que los vectores son coplanares).

Esta condición permite escribir la ecuación vectorial del plano dado por tres puntos A, B, C en otra forma. Decir que P pertenece a ese plano equivale a decir que los vectores $P - A, B - A$ y $C - A$ son coplanares, o sea $(P - A, B - A, C - A) = 0$.

Pasando a coordenadas, si P=(x,y,z),A=(a_1, a_2, a_3), $B = (b_1, b_2, b_3)$ y $C = (c_1, c_2, c_3)$ esta ecuación se escribe:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{ó también:} \quad \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Para ver esto obsérvese que si se le resta la 2da. fila a la 1ra., la 3da. y la 4ta. filas, el determinante no cambia. Así se tiene:

$$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 & 0 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0.$$