Álgebra Lineal I. Curso 2020 **Facultad de Ciencias**

Actividad 2: Geometría lineal I

1. En clase: **Introducción**

2. Se consideran los puntos $A = (3, 0), B = (5, 1), C = (0, -2)$ en el plano y el vector $v = \vec{AB}, w = \vec{AC}$

   a) Hallar las coordenadas de los vectores $v, 3w, v - w, 2v + 3w$.

   b) Dar una justicación de que los vectores w y $3w$ tienen la misma dirección.

   c) Hallar las coordenadas del punto D que verifique $v = \vec{CD} = v$. ¿Cómo se calculan las coordenadas de D a partir de las de C y las de v?

   d) Hallar las coordenadas de un punto X tal que el $ABXC$ es un paralelogamo y escribir $\vec{AX}$ como combinación lineal de v y w.

3. Se consideran los puntos $A = (3, 0, 1), B = (1, 2, 1), C = (0, -2, 1)$ en el espacio y el vector $v = \vec{AB}, w = \vec{AC}$, hallar

   a) Hallar las coordenadas de los vectores $v, 3w, v - w, 2v + 3w$.

   b) Hallar las coordenadas del punto D que verifica $v = \vec{CD} = v$.

   c) Hallar las coordenadas de un punto X tal que el $ABXC$ es un paralelogamo y escribir $\vec{AX}$ como combinación lineal de v y w.

4. Definición En las condiciones de los dos ejercicios anteriores, se nota $D = C + v$ y se dice que D es **el trasladado de C según el vector v.**

5. *a*) Probar (siendo A, v, w los del Ejercicio 2) que cualquier punto de $\mathbb{R}^2$ puede escribirse como $A + \lambda v + \mu w$ para ciertos reales λ y μ.

   b) Considerar la afirmación anterior para A, v, w los del Ejercicio 3.

6. Dados los puntos $A = (3, 6), B = (1, 0)$ y la recta r de ecuación $x - y + 1 = 0$, hallar

   a) el simétrico de A respecto a B,

   b) el simétrico de B respecto a r.

7. Consideremos la recta r que pasa por el punto $P = (1, 3)$ y tiene la dirección del vector $v = (2, -1)$.

   a) ¿Cuál es la pendiente de r?

   b) Hallar tres puntos de r.

   c) ¿Cómo es un punto genérico de r?

   d) Dar una ecuación lineal que represente a la recta r.

8. Repensar el ejercicio anterior para $P = (1, 3, 0)$ y $v = (2, -1, 1)$.

9. En clase: **ecuación paramétrica e implícita de la recta en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^3$.**

10. Hallas las ecuaciones paramétricas e implícitas de las siguientes rectas.

(a) la recta que pasa por el punto $P = (2, -1)$ que es paralela a la recta que pasa por los puntos $Q = (2, 0)$ y $R = (1, 3)$,

(b) la recta perpendicular a $r : 3x - 4y + 1 = 0$ y pasa por el punto $P = (1, 0)$,

(c) la recta perpendicular al vector $w = (2, 1)$ y que corta a la recta $r : y = x - 2$ en el punto de ordenada 3,

(d) la mediatriz del segmento determinado por los puntos $A = (1, 2)$ y $B = (3, 4)$,

(e) la recta que pasa por el punto $P = (1, 2, 3)$ y tiene la dirección del vector $v = (1, 0, -1)$,

(f) el eje Oz.

11. **Norma de un vector** La norma de un vector es lo que en física se conoce como módulo. Es la "medida" del vector y por tanto es un número real positivo. Se usa la notación $||v||$ para designar a la norma del vector v. Más precisamente,

$$||\vec{AB}||$$

es la distancia entre A y B (que vamos a notar $d(A, B)$).

a) Definir $||v||$ para $v = (a, b)$ y para $v = (a, b, c)$.

b) Probar que $||v|| = 0$ si y sólo si v es el vector nulo.

c) Probar que $||\lambda v|| = |\lambda|\ ||v||$, para cualquier número real λ.

d) Probar que $||v + u|| \leq ||v|| + ||u||$ (esta propiedad se conoce como *desigualdad triangular*). Interpretar geométricamente.

12. Para cada uno de los siguientes vectores

$$v = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}; \quad v = \mathbf{i} - \mathbf{j}; \quad v = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}; \quad v = a\mathbf{i} + a\mathbf{j},\ a \neq 0.$$

a) Hallar un vector de norma 1 (un vector de norma uno se califica como **versor**) con la misma dirección y sentido que v.

b) Hallar un versor con la misma dirección y sentido opuesto al de v.

13. Para cada uno de los siguientes vectores

$$v = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}; \quad v = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}; \quad v = -3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}.$$

a) Hallar un versor de norma 1 con la misma dirección y sentido que v.

b) Hallar un versor con la misma dirección y sentido opuesto al de v.

14. En clase: **producto escalar: definición, propiedades, expresión en coordenadas (a partir del teorema del coseno)**

15. Hallar el ángulo formado entre los vectores $u = (1, \sqrt{3})$ y $v = (1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3})$.

16. Se consideran los siguientes pares de vectores u y v:

$$u = 3\mathbf{i} - 5\mathbf{j},\ v = -6\mathbf{i} + 10\mathbf{j}; \qquad u = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j},\ v = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}; \qquad u = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j},\ v = -4\mathbf{i} + 3\mathbf{j}.$$

Para cada uno de ellos se pide:

a) Indicar si u y v son ortogonales, paralelos o ninguna de las dos cosas.

b) Dibujar u y v.

17. En los casos siguientes encontrar un vector v del plano que forme un ángulo θ con el vector $\mathbf{i}$ y tenga el módulo dado.

$$\|v\| = 3,\ \theta = \pi/6; \qquad \|v\| = 8,\ \theta = \pi/3; \qquad \|v\| = 1,\ \theta = 3\pi/4; \qquad \|v\| = 6,\ \theta = 4\pi/3.$$

18. Sean $u = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ y $v = \mathbf{i} + a\mathbf{j}$, siendo a un escalar arbitrario. En cada caso encontrar a para que:

    a) u y v sean ortogonales.

    b) u y v sean paralelos.

    c) El ángulo entre u y v sea $\pi/4$.

    d) El ángulo entre u y v sea $2\pi/3$.

19. Sean u, v dos vectores en $\mathbb{R}^3$.

    (a) Hallar $||v||$ sabiendo que: $\widehat{uv} = \frac{\pi}{4}$, $||u|| = 3$, $(u - v) \perp u$.

    (b) Hallar $||v||$ y $||v + u||$ sabiendo que: $\widehat{uv} = \frac{\pi}{4}$, $||u|| = 3$, $\widehat{(u + v)u} = \frac{\pi}{6}$.

    (c) ¿Es cierto que si v es un vector no nulo, entonces la igualdad $\langle u, w\rangle = \langle v, w\rangle$ implica $u = v$? ¿Qué puede decirse en este caso sobre la relación geométrica entre $u - v$ y w?

20. En clase: **ecuación implícita y paramétrica del plano**

21. Se consideran los puntos $A = (3, 5, 1), B = (0, 3, 0)$ y los vectores $u = (1, 3, 2), v = (2, 1, 0)$
    Hallar las ecuaciones paramétricas de:

    - La recta r que pasa por A y es paralela a u.
    - La recta h que pasa por B y es paralela a v.
    - El plano π que pasa por A y es paralelo a u y v.
    - La recta s que pasa por A y B.
    - El plano τ que pasa por A y B y es paralelo a v.

22. Hallar un punto de la recta $3x - y + 2 = 0$ que equidista de los puntos A y B del ejericio 6.

23. Calcular la distancia entre las rectas paralelas $r : 3x + 4y - 15 = 0$, y $s : 3x + 4y = 40$.

24. Hallar el valor de k para que los puntos $A = (2, -1)$, $B = (1, 4)$ y $C = (k, 9)$ estén alineados.

25. Hallar el valor de $q \in \mathbb{R}$ para que las rectas $r : qx - 2y + 4 = 0$ y $s : x + (q - 3)y - 7 = 0$ sean paralelas.