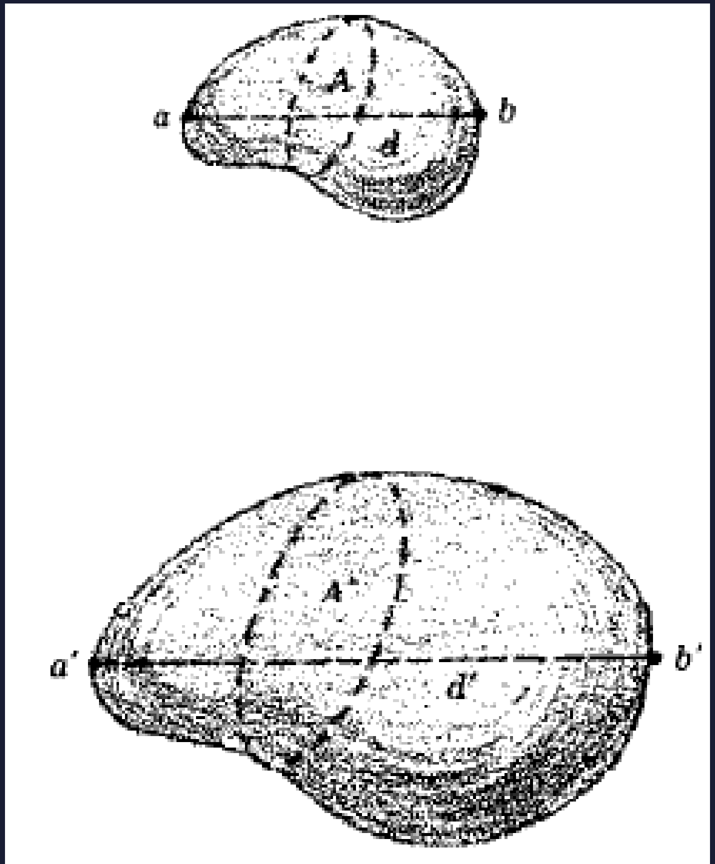
3- ANÁLISIS DIMENSIONAL Y ESCALAS



Repaso: ¿de qué hablamos la clase pasada?

La clase pasada trabajamos en:

- Cifras significativas, reglas y ejemplos
- Notación científica y repaso de operaciones con potencias
- Órdenes de magnitud y potencias de 10
- Conversión de unidades con ejemplos
- Estimaciones – problemas de Fermi con ejemplos

¿Preguntas de esto?

¿Qué trabajaremos hoy?

- Análisis dimensional
- Ejemplos de análisis dimensional
- Escalas
- Ejemplos de escalas

Análisis dimensional

La palabra ***dimensión*** denota la naturaleza física de una cantidad o magnitud

Si mido **una distancia**, ya sea en **metros**, **pies** o **pulgadas**, se trata de una magnitud distancia y **su dimensión es la longitud**.

Las **dimensiones fundamentales** de la mecánica son:

L longitud **M masa** **T tiempo**

Cuando hablamos de la dimensión de una magnitud, se suelen usar corchetes [ ]: velocidad [v]=L/T, volumen [Vol]=L^3

Muchas veces uno deduce ecuaciones o expresiones matemáticas (por ejemplo, resolviendo un ejercicio) y desea chequear la validez de esta.

Una poderosa herramienta con este fin es el ***análisis dimensional, que utiliza el hecho de que podemos tratar a las dimensiones como cantidades algebraicas.***

Análisis dimensional

Una poderosa herramienta con este fin es el ***análisis dimensional, que utiliza el hecho de que podemos tratar a las dimensiones como cantidades algebraicas:***

1. Solo tiene sentido **sumar o restar magnitudes de igual dimensión**. *¿Qué significaría 4metros+10segundos?*

2. Para que una **ecuación sea correcta**, sus **dos miembros** deben tener la **misma dimensión**. *"No podemos igualar peras con manzanas".*

3. Los **argumentos de funciones trascendentes** (trigonométricas, exponenciales, logaritmos) deben ser **adimensionados**.

4. La dimensión de cualquier magnitud física puede expresarse en términos de las siete dimensiones de las magnitudes fundamentales (Ver Clase 1). En nuestro caso, M, L y T

El **análisis dimensional** permite verificar la **coherencia** de una expresión, **no si es correcta, ni** tampoco determinar **constantes de proporcionalidad**.

Análisis dimensional: resumen

USOS:

- Verificar ecuaciones (útil en parciales, exámenes, y en la vida científica)
- Predecir comportamientos (nuevos modelos)
- Elaborar experimentos “a escala de laboratorio” (por ejemplo, para estudiar presas, canales, etc.)

REGLAS: dadas A y B magnitudes

- $A = B \Rightarrow [A] = [B]$ (igualdad de magnitudes implica igualdad de dimensiones)
- $[A + B] = [A] = [B]$ (solo se suman o restan magnitudes de igual dimensión)
- $[A \cdot B] = [A] \cdot [B]$ (dimensión del producto es el producto de las dimensiones)
- $[C] = 1$ si C es adimensionado, es decir, un número. Por ejemplo, π.

Análisis dimensional: ejemplos

Para entrar en calor, calculemos las dimensiones de la fuerza y la aceleración:

Velocidad: $[v] = \frac{L}{T} \Rightarrow$ Aceleración: $[a] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$

Fuerza: $[F] = [m \cdot a] = MLT^{-2}$

Entren la **cuestionario WOOCLAP: BCKXAO**

Ahora veamos como realmente usamos el análisis dimensional.

Suponga que la aceleración *a* de una partícula que se mueve con rapidez uniforme *v* en un círculo de radio *r* es proporcional a alguna potencia de *r*, por decir r^n, y alguna potencia de *v*, por decir v^m. Determine los valores de *n* y *m* y escriba la forma mas simple de una ecuación para la aceleración.

Análisis dimensional: ejemplos

Para entrar en calor, calculemos las dimensiones de la fuerza y la aceleración:

Velocidad: $[v] = \frac{L}{T} \Rightarrow$ Aceleración: $[a] = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$

Fuerza: $[F] = [m \cdot a] = MLT^{-2}$

Entren la **cuestionario WOOCLAP: BCKXAO**

Ahora veamos como realmente usamos el análisis dimensional.

Suponga que la aceleración *a* de una partícula que se mueve con rapidez uniforme *v* en un circulo de radio *r* es proporcional a alguna potencia de *r*, por decir r^n, y alguna potencia de *v*, por decir v^m. Determine los valores de *n* y *m* y escriba la forma mas simple de una ecuación para la aceleración. R: $a = k\, v^2/r$

Análisis dimensional: ejemplos

EJERCICIO 1.14

Imagine que se encuentra Ud. en un examen de física y le parece recordar una ecuación para obtener la velocidad v con que una piedra llega al piso después de caer una altura h. La fórmula que recuerda es la siguiente:

$$v = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

donde g es la aceleración de la gravedad.

¿La usaría Ud. en el examen o existen motivos para desconfiar de su memoria?

Análisis dimensional: ejemplos

EJERCICIO 1.19

Ondas superficiales en aguas profundas- Podemos utilizar el análisis dimensional para determinar la velocidad v de las ondas superficiales en aguas profundas. Las cantidades en el problema son la longitud de onda λ, la densidad ρ del fluido, y la aceleración de la gravedad g, ya que las fuerzas son gravitatorias. La ecuación dimensional es: $v = D.\lambda^a.\rho^b.g^c$ siendo D, una constante adimensionada.

Se asume que la profundidad del agua es tan grande en comparación con la longitud de onda como para que no afecte su movimiento y que las fuerzas viscosas pueden ser ignoradas.

¿Cuáles son los valores de a, b y c?

Escalas: ¿podrían existir estas criaturas?

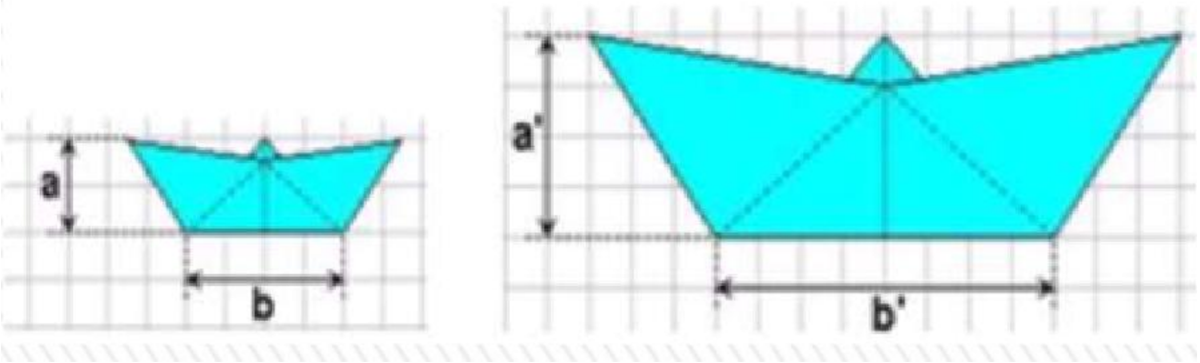
- ¿Podrían existir Shelob o Godzilla?
- O quizás más científicamente, ¿de qué modo se relaciona el tamaño de una estructura con su función?
- ¿Podríamos tener una célula del tamaño de una hormiga?
- ¿O una hormiga del tamaño de un hombre?
- ¿Porqué no hay mamíferos terrestres más pequeños que la musaraña o más grandes que el elefante?

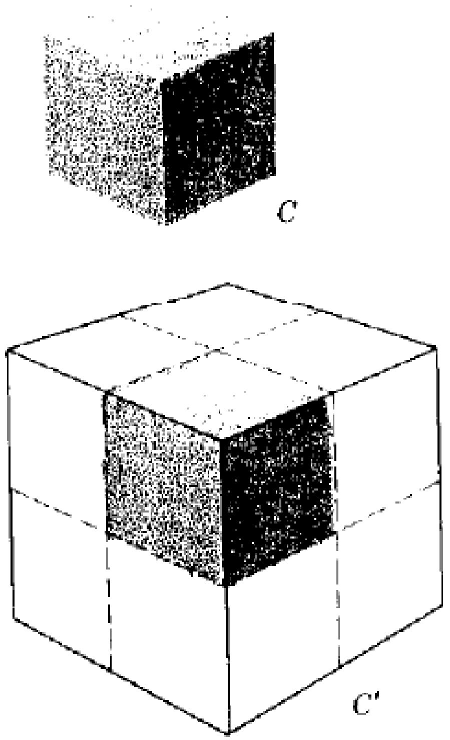
Son cuestiones relacionadas a la ***escala***, es decir, cómo las propiedades de las estructuras dependen de sus tamaños.

Escalas: semejanza geométrica

Decimos que dos objetos de misma forma, pero distinto tamaño, son **semejantes**. Podemos transformar uno en otro cambiando la escala de longitud.

Sus ángulos son iguales, y sus lados, proporcionales. Entre sus **magnitudes lineales** se mantiene una relación de proporcionalidad: a/b=a'/b'





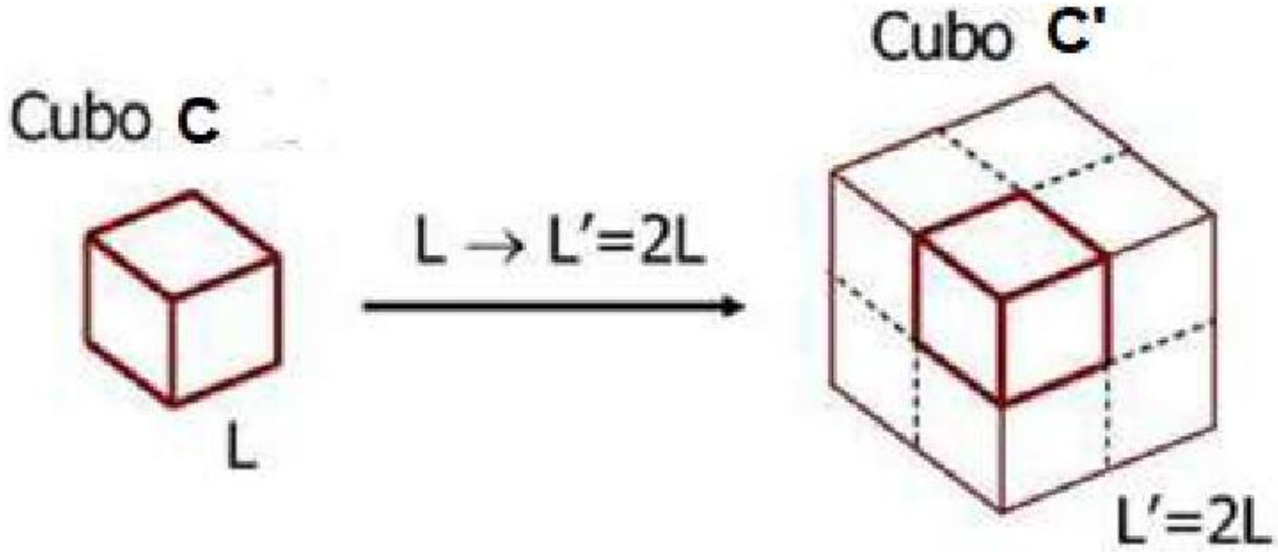
El factor de proporcionalidad se denomina **factor de escala k o razón de semejanza.**

$$k = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b}$$

Escalas: semejanza geométrica

Si C y C' son semejantes, entonces:

- $L' = kL$
- $S' = 6L'^2 = 6(kL)^2 = k^2(6L^2) = k^2S$
- $V' = L'^3 = (kL)^3 = k^3V$



Resumiendo, si $\boldsymbol{L' = kL}$ entonces:

$\boldsymbol{S' = k^2S}$ **y** $\boldsymbol{V' = k^3V}$

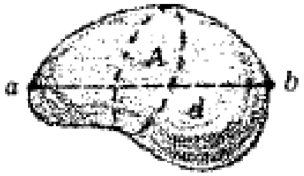
Para cualquier par de objetos semejantes.

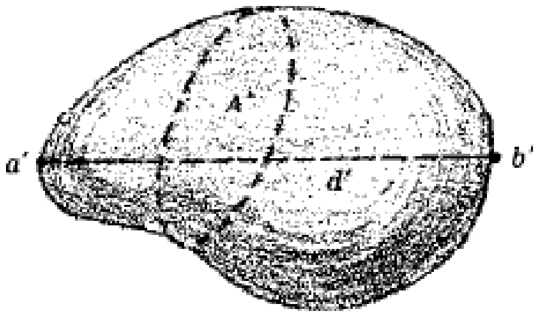
OBS: si queremos S en función de V, tenemos $S = 6L^2$ y usando $V = L^3 \rightarrow L = V^{1/3}$

llegamos a $S = 6V^{\frac{2}{3}} \approx 6V^{0,67}$

$S = \alpha V^{\frac{2}{3}}$ es la ley cuadrático-cúbica. Para un cubo vimos que $\alpha = 6$. Para una esfera, $\alpha = (36\pi)^{\frac{1}{3}} \cong 4,8360$

Leyes de escala





Dos figuras cualesquiera semejantes de distinto tamaño, tienen un factor de escala k, que es el cociente de longitudes correspondientes de las figuras:

$$k = \frac{d'}{d}$$

Como son semejantes, el factor de escala k es el mismo para dos longitudes cualesquiera.

La razón entre las áreas transversales A y A' vale: $\frac{A'}{A} = k^2$

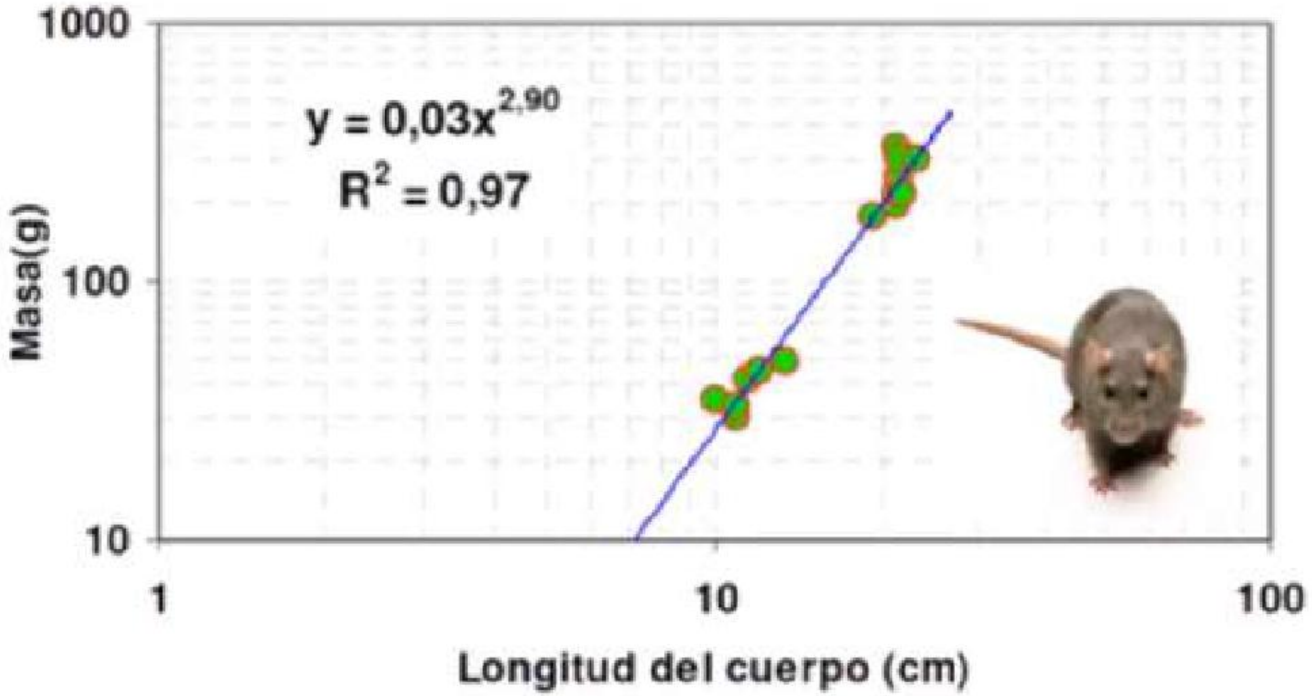
La razón entre los volúmenes V y V' vale: $\frac{V'}{V} = k^3$

¿Y por qué nos interesa? Ciertas propiedades físicas dependen del volumen, otras del área y otras de la longitud.

Por ejemplo, la masa depende del volumen (si la densidad media no varía).

Leyes de escala: ejemplos

El peso depende del volumen. Si W y W' son los pesos de dos animales semejantes, tendremos: $\frac{W'}{W} = \frac{aV'}{aV} = k^3$.



EJERCICIO 1.10

Una mujer de 1,55 m de altura pesa 50 kg. ¿Cuánto pesaría una mujer de 1,70 m y forma semejante?

Leyes de escala: fuerza relativa

La ***fuerza relativa de un animal*** se define como:

$$\mathrm{f}_{\mathrm{rel}} = \frac{\text{peso que puede levantar}}{\text{peso del animal}}$$

Ahora, el peso del animal, como vimos, depende de V (o de L^3) mientras que su **fuerza es proporcional a la sección transversal de sus músculos**, depende de S (o de L^2).

Luego se puede ver que entre un animal A y su semejante A', la relación entre fuerzas relativas es

$$\mathrm{f}'_{\mathrm{rel}} = \frac{1}{k}\mathrm{f}_{\mathrm{rel}}$$

Una hormiga del tamaño de un humano, apenas podría levantar una pequeña parte de su propio peso. Sería **muy débil**.

Leyes de escala: fuerza relativa

Lo dicho acerca de la fuerza de los músculos se aplica también a los huesos y cualquier otro material estructural.

Para un animal de forma dada, la resistencia de sus huesos con respecto a su propio peso depende de su tamaño, y cuanto mayor sea el animal, más pequeña es su fuerza relativa. La forma de los animales grandes es muy diferente a la de animales pequeños.

Un animal del tamaño de un elefante no puede tener la forma de un perro porque el cociente entre la resistencia de los huesos y el peso del cuerpo sería muy pequeño.

Los huesos y músculos de los animales grandes deben ser desproporcionadamente más anchos que huesos y músculos de animales pequeños.

Leyes de escala: división celular

EJERCICIO 1.12

La relación del área de superficie con el volumen (A/V) está relacionada con la división celular, ya que cuanto más grande es una célula, menos área de superficie tiene para su tamaño. Esto es importante si usted es una célula que depende de la difusión a través de la pared celular para obtener oxígeno, agua y alimentos y eliminar el dióxido de carbono y los materiales de desecho. A medida que creces, tu exterior no puede satisfacer las necesidades del interior. Finalmente tienes varias opciones: morir, cambiar a una forma alargada y delgada o plana y delgada o dividirte en células más pequeñas. Una elección fácil: ¡Divide o muere!

Así, una célula esférica de masa M y de $178\mu m^3$ que se divide en dos células hijas también esféricas de masa m = M/2 iguales.

a) ¿Cuántas veces mayor es el radio de la célula original con respecto al radio de las células hijas?

b) ¿Cuánto vale la razón, área de la superficie de la célula madre/área de la superficie de una célula hija?

c) ¿Cuánto vale la razón, volumen de la célula madre/volumen de una célula hija?

Leyes de escala: ejemplo

EJERCICIO 1.18

A) Considere dos animales de idéntica forma, es decir que son semejantes, pero uno de ellos es cuatro veces más alto que el otro (un ejemplo aproximado podría ser un gato de unos 25 cm de altura en la cruz y un tigre con una altura de 1,0 m en la cruz). ¿El más grande cuántas veces más masa tiene que el más pequeño?

a) 4 veces	b) 16 veces	c) 64 veces	d) 40 veces	e)72 veces

B) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones respecto a la fuerza relativa (es decir cuánta fuerza tienen en comparación con su masa corporal) de los dos animales anteriores es **la correcta**?

a) El más chico tiene más fuerza relativa que el más grande.

b) Ambos tienen la misma fuerza relativa porque sus formas son iguales.

c) La fuerza relativa del más grande es 4 veces mayor que la del más chico.

d) La fuerza relativa del más chico es 8 veces menor que la del más grande.

e) El más chico tiene una fuerza relativa 72 veces menor que el más grande.