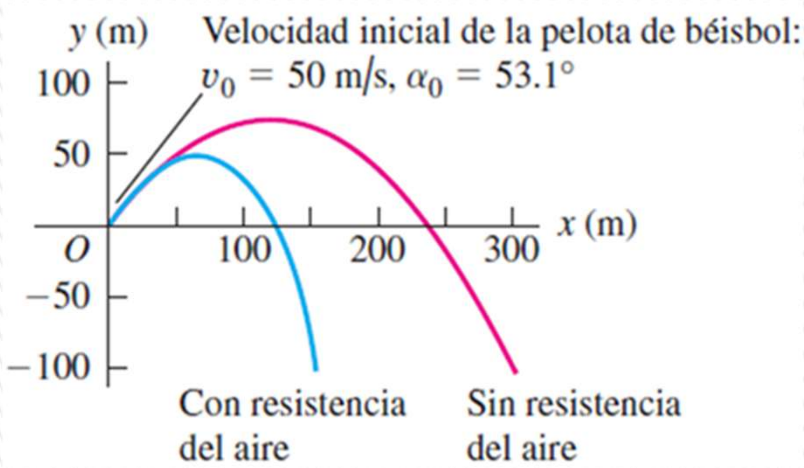
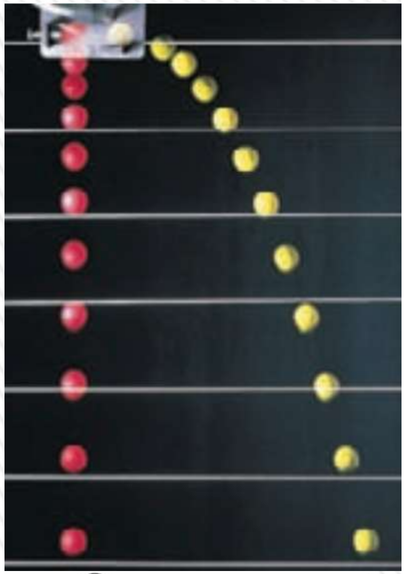
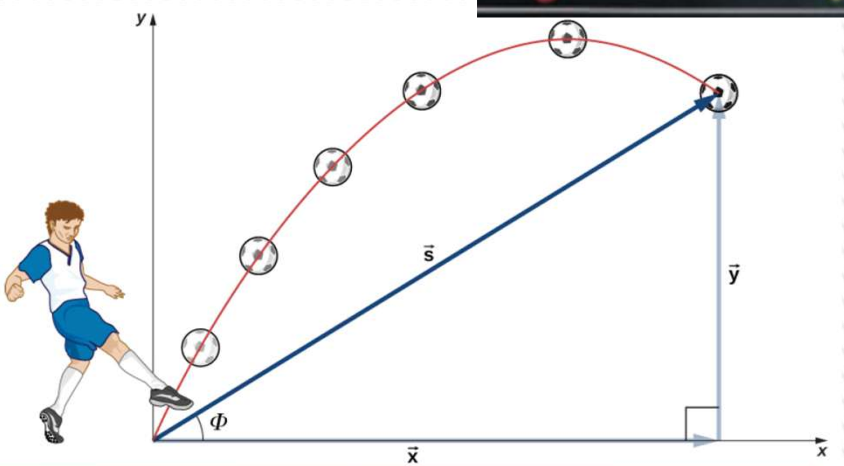
Curso Física 1 para Bio-Geociencias (FI252) 2026
Clase N° 7





La clase pasada: Hicimos ejemplos de caída libre, vimos salto vertical y propiedades de vectores y analizamos las variables para el movimiento en más de una dimensión.



Evaluación corta N° 1: la hacemos el jueves 16/04
Clases de consultas generales virtuales: miércoles de 17:30 a 19:00 por Zoom (enlace de clase teórica de los martes)

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

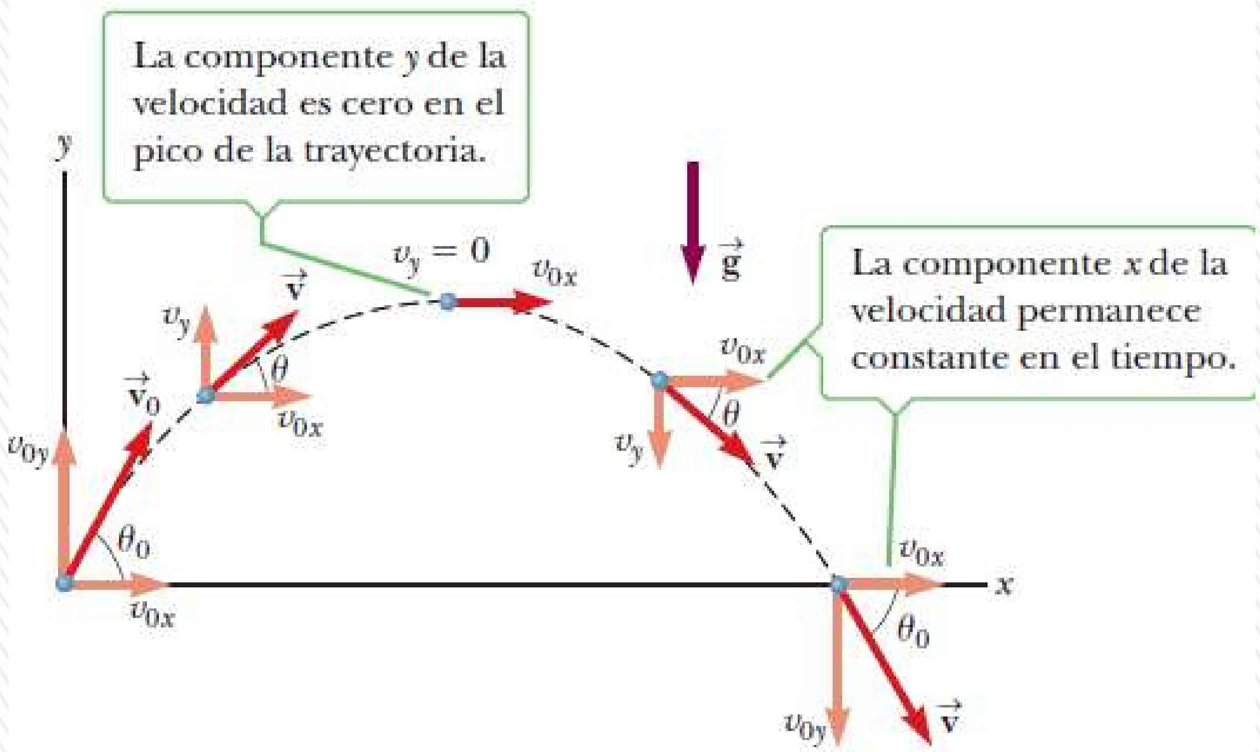
Objetos que se mueven en las direcciones *x* e *y de manera simultánea bajo aceleración constante.*

Un caso especial importante de este movimiento es el **movimiento de un proyectil**, Cuando lanzamos un objeto por el aire tenemos un movimiento de un proyectil.

Si se omiten: **efectos de la resistencia del aire**, la **variación de g con la altura y de su dirección** y **la rotación de la Tierra**, la **trayectoria del proyectil** dentro del campo de gravedad de la Tierra es una curva en forma de **parábola.**

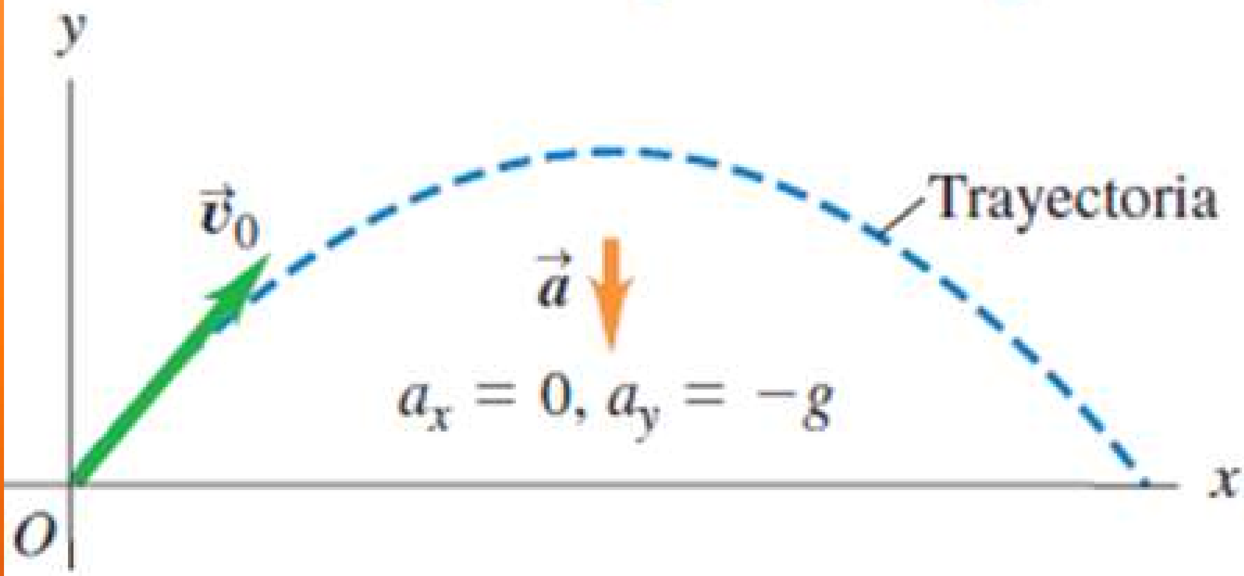
Trayectoria parabólica: la dirección *x positiva es horizontal y hacia la derecha, y la dirección y es vertical* y positiva hacia arriba.

El hecho experimental más importante acerca del movimiento de un proyectil en dos dimensiones es que **los movimientos horizontal y vertical son completamente independientes entre sí.**



MOVIMIENTO DE PROYECTILES

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que tiene un vector velocidad inicial $\vec{v}_0$.
- Su trayectoria depende solo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.



Modelo:

•Proyectil como partícula.

•Aceleración gravedad constante tanto en magnitud como en dirección.

•Se ignoran efectos de la resistencia del aire, como curvatura y rotación de la Tierra.

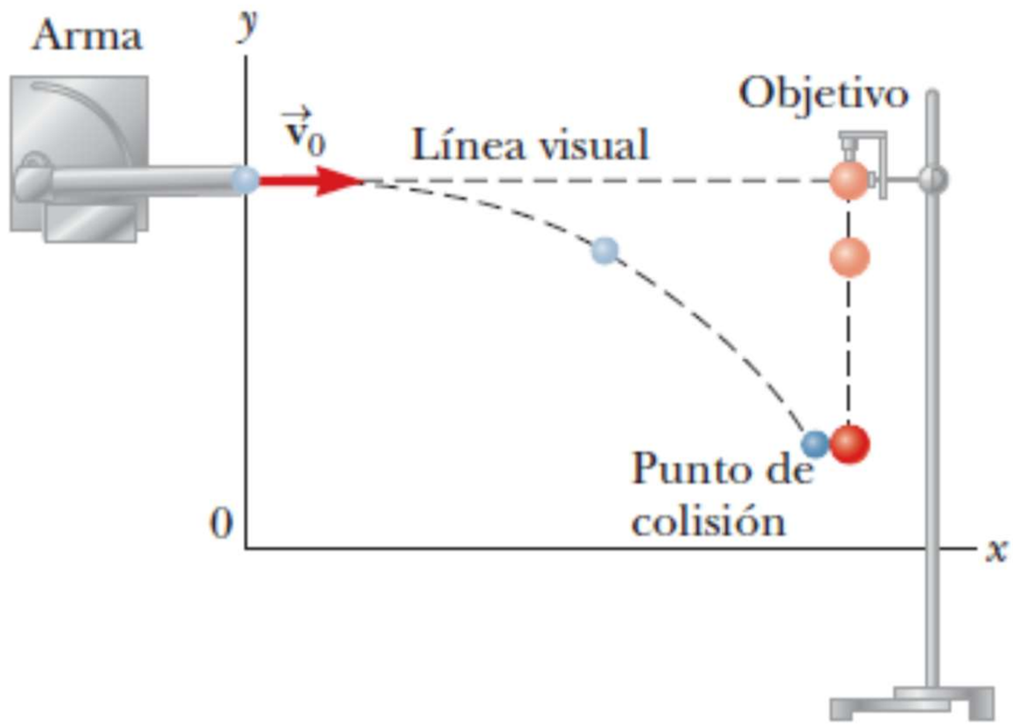
El movimiento del proyectil **siempre se limita a un plano vertical**, determinado por la dirección de la velocidad inicial.
La aceleración gravitatoria es exclusivamente vertical y no puede acelerar al proyectil de forma lateral.

Movimiento es *bidimensional*.

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

El movimiento de un proyectil es la superposición de dos movimientos uno horizontal y otro vertical independientes entre sí, y el movimiento en una dirección no tiene efecto sobre el movimiento en la otra dirección.

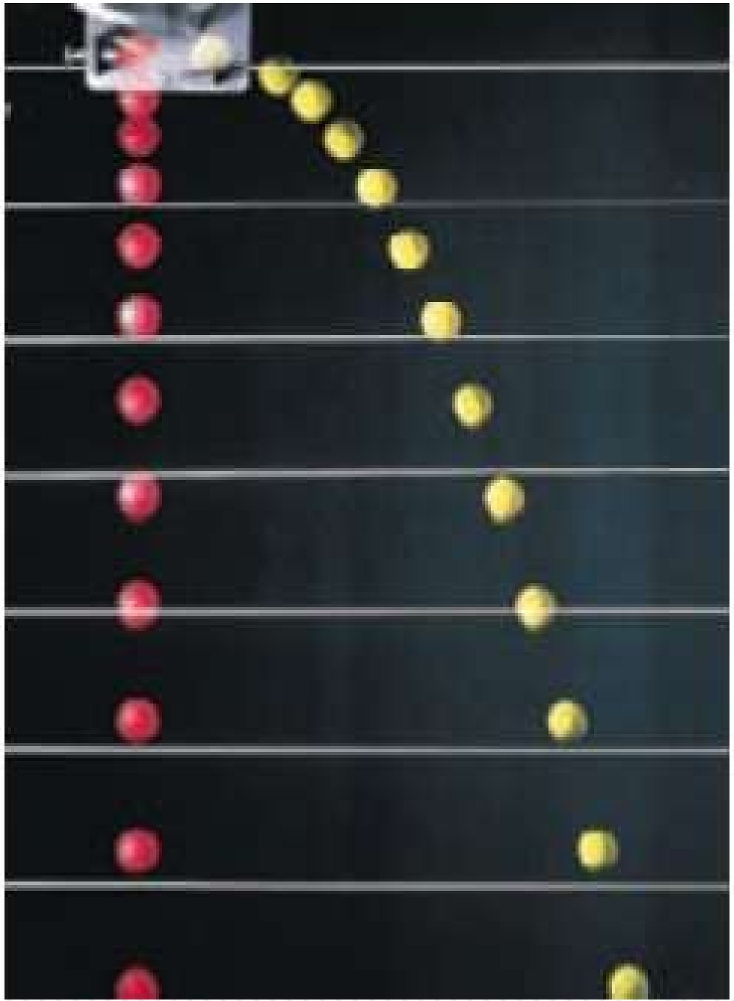
La figura muestra un experimento que ilustra la independencia del movimiento horizontal y vertical.
La pistola apunta directamente a la bola objetivo y es disparada en el instante en que ésta es liberada.
En ausencia de gravedad, el proyectil daría en el blanco porque el objetivo no se movería.
Sin embargo, el proyectil aún da en el blanco en presencia de la gravedad.



Eso significa que el proyectil está cayendo con el mismo desplazamiento vertical que el objetivo, a pesar de su movimiento horizontal.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

3.16 La pelota roja se deja caer desde el reposo y la amarilla se proyecta horizontalmente al mismo tiempo; las imágenes sucesivas en esta fotografía estroboscópica están separadas por intervalos de tiempo iguales. En un instante determinado, ambas pelotas tienen la misma posición y, velocidad y y aceleración y, a pesar de tener diferentes posición y velocidad en *x*.



Análisis del movimiento: trato por separado las coordenadas *x* y *y*.

Componente x de la aceleración es cero, y componente y es constante e igual a -g.

El movimiento de un proyectil es una combinación de:

- **movimiento horizontal con velocidad constante y,**
- **movimiento vertical con aceleración constante.**

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Ecuaciones de movimiento:

Como según x es un movimiento rectilíneo uniforme (a_x=0) y según y es un movimiento rectilíneo con aceleración constante (a_y= -g)

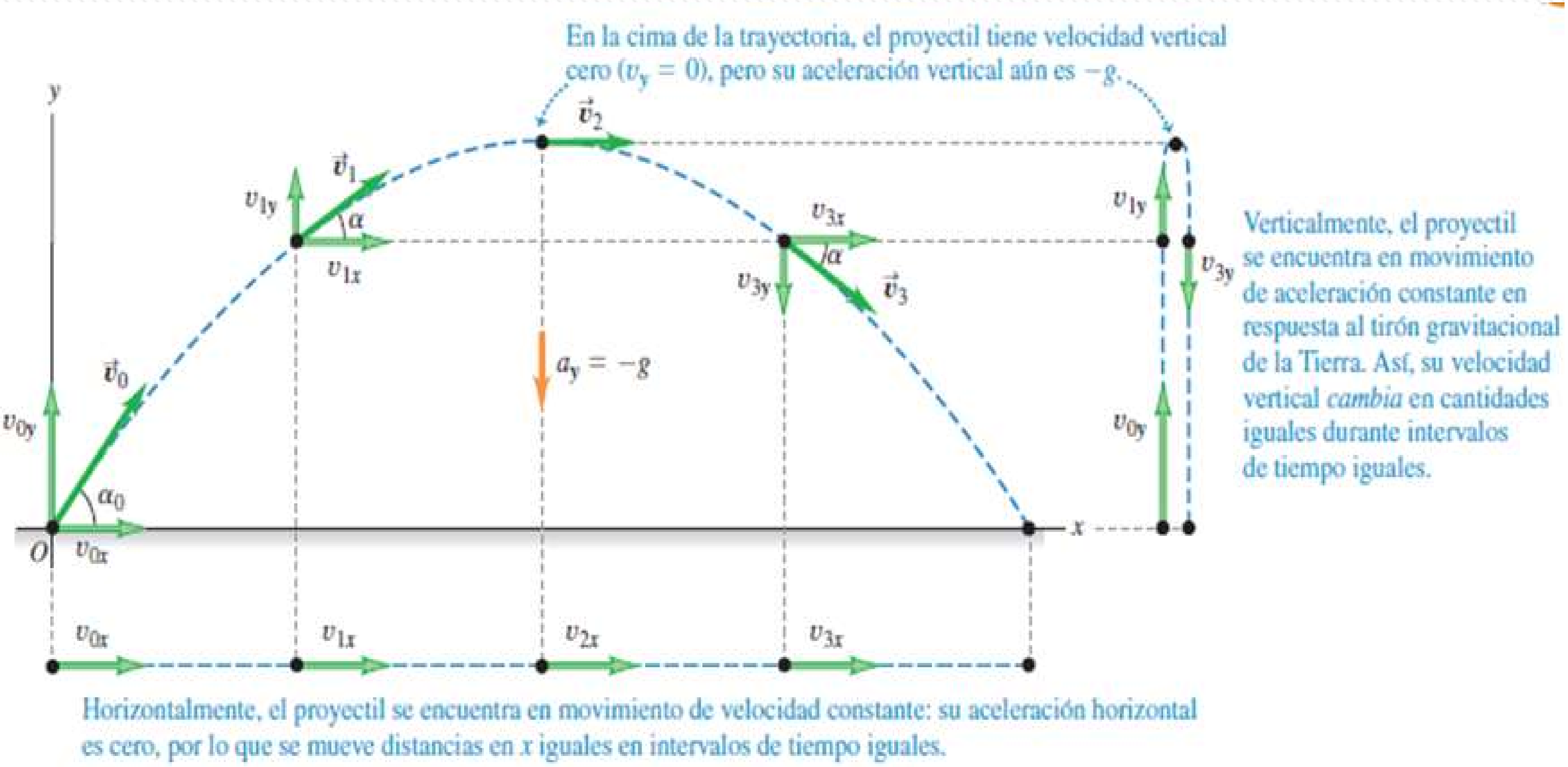
Aceleración: $a_x = 0$ $\quad$ $a_y = -g$

Velocidad: $v_x = v_{0x}$ $\quad$ $v_y = v_{0y} - gt$

Posición: $x = x_0 + v_{0x}\, t$ $\quad$ $y = y_0 + v_{0y}\, t - \frac{1}{2} g t^2$

$v_{0x} = v_o \cos \alpha_0$ $\quad$ $v_{0y} = v_o \sin \alpha_0$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES



Movimiento parabólico del modelo de proyectil

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Otras expresiones:

Módulo del vector posición: $$r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

Rapidez del proyectil (módulo de su velocidad): $$v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Dirección de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje +x: $$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

Ecuación de la trayectoria (parábola): $$y(x) = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha_0}x^2$$

Para lanzamiento con altura de lanzamiento igual al de llegada:

Tiempo en que se alcanza la altura máxima: $$t^* = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}$$

Altura máxima alcanzada: $$h_{max} = y(t^*) = \frac{v_0^2 sin^2\alpha_0}{2g}$$

Alcance: $$R = x(2t^*) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}$$

Alcance máximo para $\alpha_0 = 45º$ $$R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Deducción de ecuación de la trayectoria: $y(x) = (\tan \alpha_0)x - \dfrac{g}{2v_0^2 cos^2 \alpha_0} x^2$

$$x = v_0 \cos \alpha_0 \, t \qquad t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0}$$

$$y = v_0 \sin \alpha_0 \, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = v_0 \sin \alpha_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha_0} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha_0} \right)^2$$

$$y = \left(\frac{v_0 \sin \alpha_0}{v_0 \cos \alpha_0} \right) x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos \alpha_0)^2}$$

$$y = \tan \alpha_0 \, x - \frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2 \alpha_0} x^2$$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Los hechos importantes del movimiento de un proyectil se pueden resumir como sigue:

1. Siempre que se omita la resistencia del aire, la componente horizontal de la velocidad v_x permanece constante porque no existe componente horizontal de la aceleración.

2. La componente vertical de la aceleración es igual a la aceleración en caída libre -*g*.

3. La componente vertical de la velocidad v_y y el desplazamiento en la dirección *y* son idénticos a los de un cuerpo en caída libre.

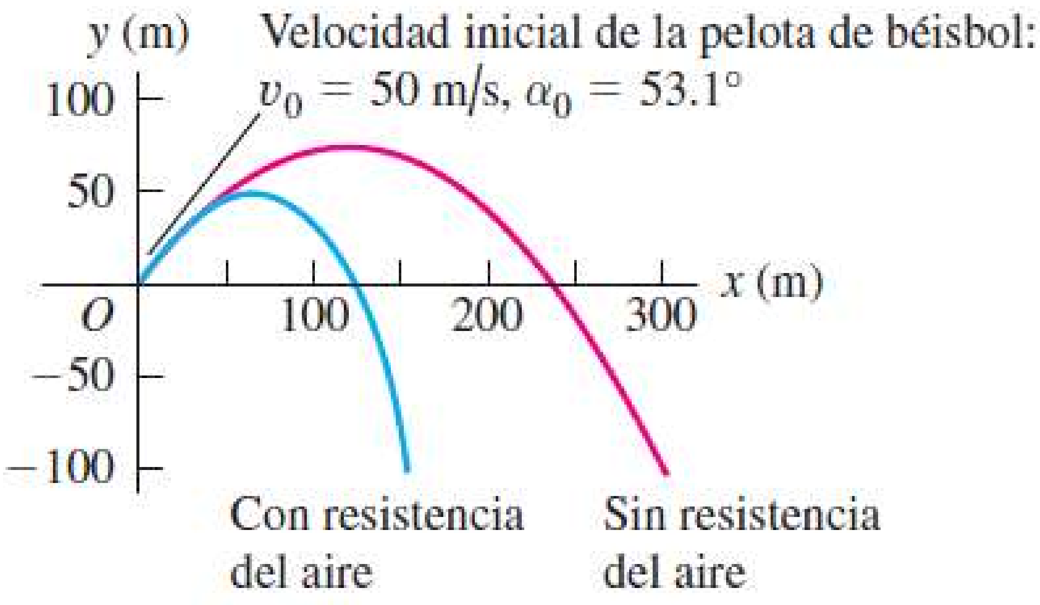
4. El movimiento de proyectil puede describirse como una superposición de dos movimientos independientes en las direcciones *x* y *y*.

ATENCIÓN: En la altura máxima que alcanza el proyectil sólo se anula la componente vertical de la velocidad, la componente horizontal permanece invariable.
La aceleración en la dirección *y* *tampoco* es cero en la parte superior de la trayectoria del proyectil. Sólo la componente *y* de la velocidad es cero.
Si la aceleración también fuera cero, ¡el proyectil jamás llegaría abajo!

BALÍSTICA CON RESISTENCIA DEL MUNDO REAL

Efecto de la resistencia del aire

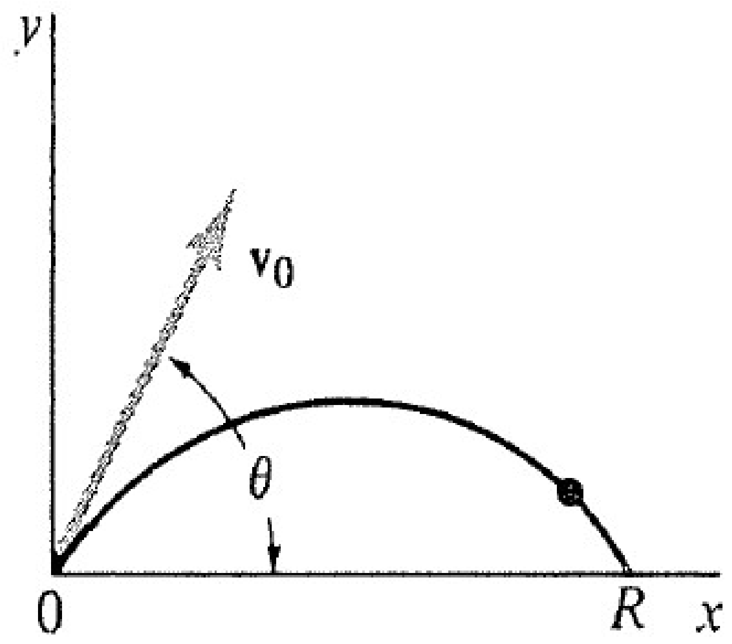
3.20 La resistencia del aire tiene un efecto acumulativo considerable sobre el movimiento de una pelota de béisbol. En esta simulación, permitimos que la pelota caiga por debajo de la altura desde la cual se lanzó (por ejemplo, la pelota podría haberse lanzado desde un acantilado).



La fricción del aire tiene un efecto apreciable sobre los proyectiles, en especial los que son *ligeros y rápidos;* **la resistencia es proporcional al *cuadrado de la velocidad.***
Una pelota de béisbol bien bateada, que dure mucho en el aire, puede perder hasta la mitad de su rapidez inicial, y llegar sólo un poco más allá de la mitad de lo que hubiera llegado sin fricción.
Una bala de rifle (sólo con unos 150 g de masa) disparada a 0,6 km/s, lo cual es bastante, sufrirá mucho la fricción. Si no hubiera resistencia, tendría un alcance máximo tremendo de unos 40km.
Debido a la resistencia del aire, no es probable que la bala llegue mucho más allá de 4 km.

ALCANCE DE UN PROYECTIL

Deduciremos las ecuaciones vinculadas a la altura máxima alcanzada y el alcance máximo cuando se dispara un proyectil, y la altura de disparo es la misma que la de llegada, como se muestra en la figura.



La altura máxima, se alcanza cuando la componente vertical de la altura se anula. Llamaremos t* al instante en que esto se produce.

$$v_y = v_o \sin\theta - g t^* = 0$$

$$t^* = \frac{v_o \sin\theta}{g}$$

La altura máxima se acanza para ese instante:

$$h_{máx} = y(t^*) = v_o \sin\theta\, t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = v_o \sin\theta \left(\frac{v_o \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o \sin\theta}{g}\right)^2 =$$

$$h_{máx} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

ALCANCE DE UN PROYECTIL

Como el tiempo de subida es el mismo que el de bajada, el alcance *R*= *x*(2*t**)

$$R = x(2t^*) = v_0 \cos\theta\,(2t^*) = v_0 \cos\theta \left(2\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)$$

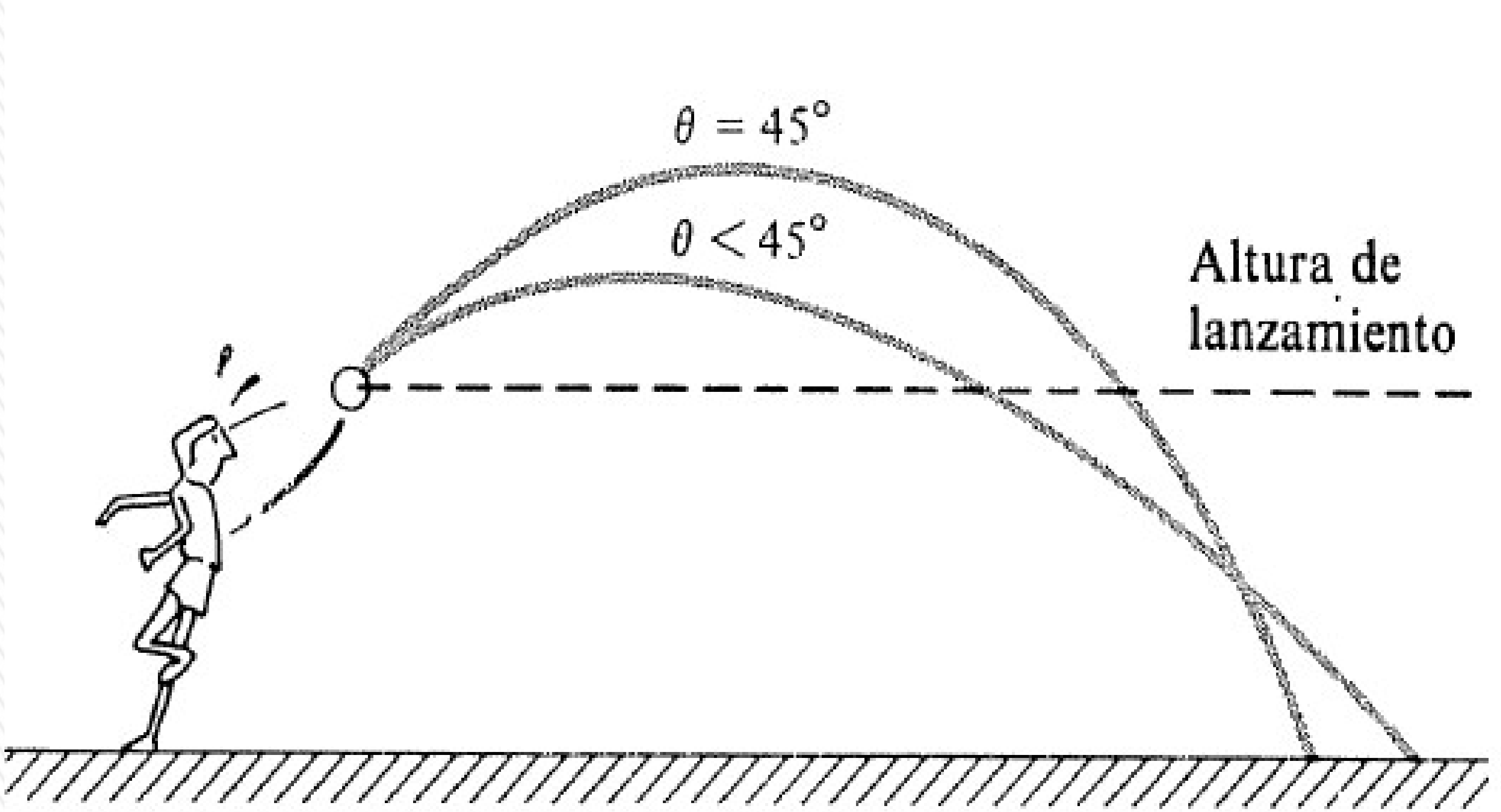
Teniendo en cuenta que: 2sinθ.cosθ= sin 2θ

$$R = 2\frac{v_0^2}{g}\sin\theta\,\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$

Puede verse que:
El alcance máximo es cuando θ =45° y vale: $R_{máx} = \frac{v_0^2}{g}$

Como el seno de un ángulo es igual al coseno del ángulo complementario, los proyectiles lanzados desde una superficie plana con un ángulo θ y con un ángulo 90- θ y con la misma rapidez tienen el mismo alcance, pero a mayor ángulo de tiro, mayor altura y mayor tiempo de vuelo.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

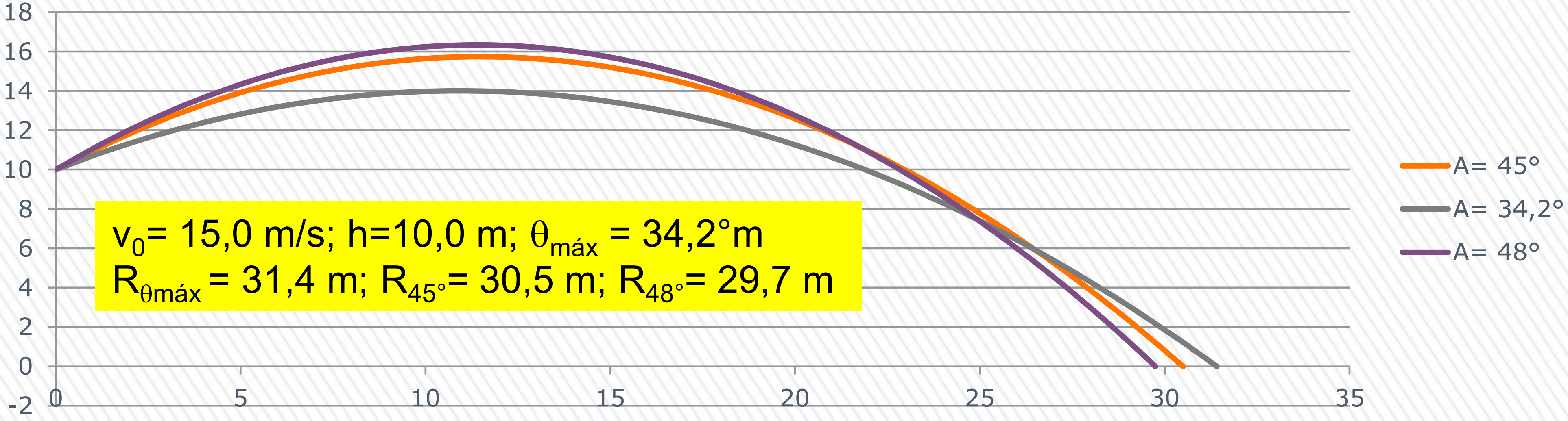


Lanzamiento efectuado por encima del nivel del suelo. La trayectoria para un ángulo de tiro de 45° y otro más pequeño se cortan por debajo de la altura de lanzamiento. La trayectoria más plana tiene un mayor alcance.
Si el punto de llegada está a mayor altura que el de lanzamiento, el alcance máximo se alcanza con un ángulo de lanzamiento mayor a 45°.

$$\theta_{máx} = atan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right) \qquad R_{máx} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

h > o si el lanzamiento es a mayor altura que la de llegada.
h < o si el lanzamiento es a menor altura que la de llegada.

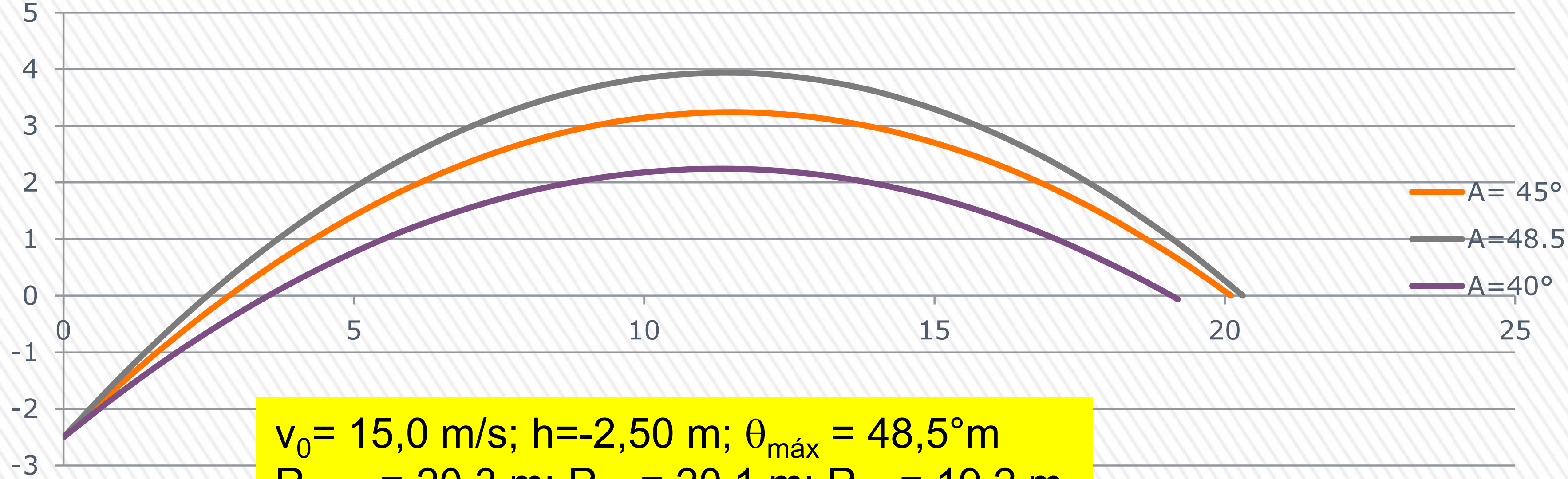
MOVIMIENTO DE PROYECTILES



v_0= 15,0 m/s; h=10,0 m; $\theta_{máx}$ = 34,2°m
$R_{\theta máx}$ = 31,4 m; $R_{45°}$= 30,5 m; $R_{48°}$= 29,7 m

Alcance máximo para lanzamiento h ≠ 0

$$\theta_{máx} = atan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right) \qquad R_{máx} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$



v_0= 15,0 m/s; h=-2,50 m; $\theta_{máx}$ = 48,5°m
$R_{\theta máx}$ = 20,3 m; $R_{45°}$= 20,1 m; $R_{40°}$= 19,2 m

SIMULACIONES

Enlaces disponibles en la pestaña de “Materiales complementarios” en sección correspondiente a Unidad 2.

Movimiento relativo- el disparo al mono que cae:

https://www.youtube.com/watch?v=cxvsHNRXLjw&ab_channel=mittechtv
Video de Youtube correspondiente a una demo del MIT "Monkey and gun“.

Simulación de PHET: movimiento de proyectiles:
https://phet.colorado.edu/sims/html/projectile-motion/latest/projectile-motion_all.html?locale=es

Simulación PHET de la Universidad de Colorado donde se analiza el movimiento de un proyectil con o sin resistencia del aire. Se puede determinar cómo cada parámetro (altura inicial, ángulo de tiro, rapidez inicial, masa, diámetro y altitud) afectan la trayectoria de un objeto, con o sin resistencia del aire.

Simulación de Walter Fendt: movimiento de proyectiles
https://www.walter-fendt.de/html5/phes/projectile_es.htm

No considera el efecto de la resistencia del aire. Se puede variar, dentro de ciertos límites, los valores de la altura inicial, la velocidad inicial, el ángulo de inclinación y la aceleración gravitacional.

Ejemplo: Ejercicio 2.15

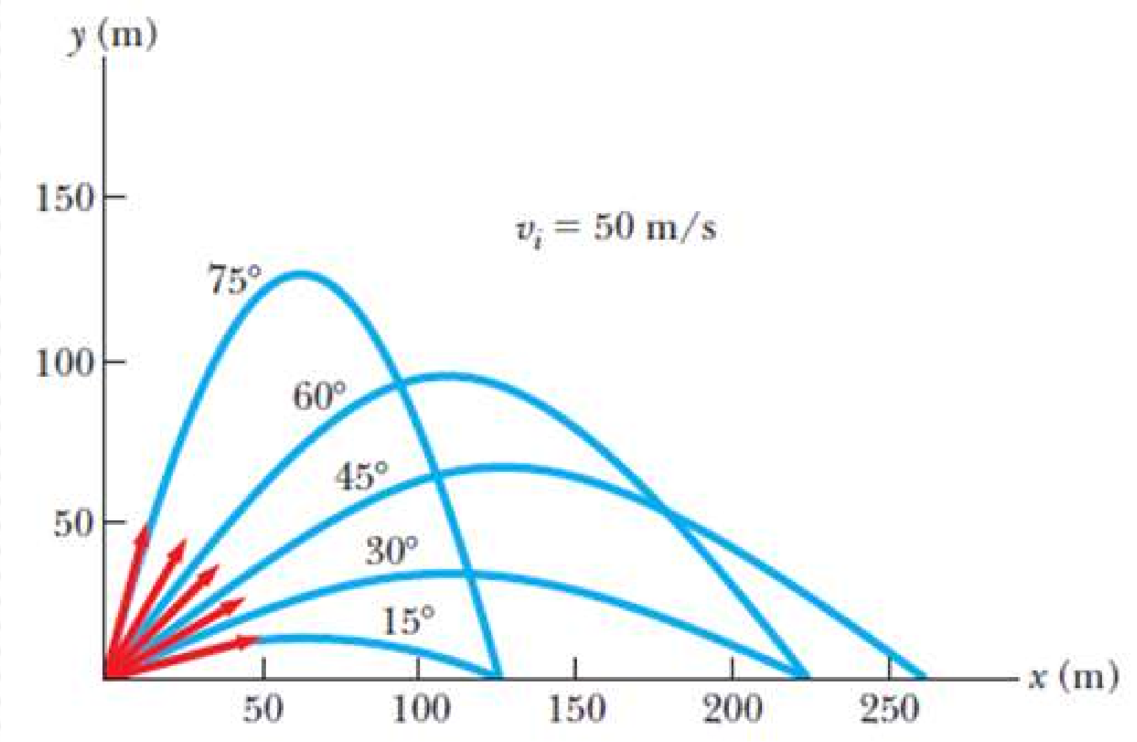
15.- Se lanza horizontalmente una pelota con velocidad v_0 desde una altura *h* y otra se deja caer al mismo tiempo desde la misma altura.
¿Cuál de las dos llegará primero al suelo?
¿Cuál de las dos tendrá un mayor módulo de la velocidad al llegar al suelo?

1- Ambas llegan al suelo al mismo tiempo, pues ambas tienen la misma velocidad en el sentido vertical. .

2- La que se lanza en forma horizontal tendrá mayor módulo de velocidad.
Esto es debido a que esta pelota tiene una componente horizontal de velocidad que la otra no tiene.

PREGUNTA RÁPIDA

Ordene los ángulos de lanzamiento para las cinco trayectorias de la figura respecto al tiempo de vuelo, desde el tiempo de vuelo más corto al más largo.



Respuesta: El tiempo de vuelo estará dado por la componente vertical de la velocidad inicial, cuanto mayor sea, mayor será el tiempo de vuelo. Por tanto a mayor ángulo, mayor tiempo de vuelo.

Cuestionarios rápidos:

1) Un proyectil se mueve en una trayectoria parabólica sin resistencia del aire.

¿Hay un punto donde $\overline{a}$ sea paralela a $\overline{v}$? **NO.**

¿Y perpendicular a $\overline{v}$? **SI, en el punto donde alcanza la altura máxima ($v_y = 0$)**

2) En el instante en que usted dispara una bala horizontalmente con un rifle, deja caer otra bala desde la altura del cañón. Si no hay resistencia del aire, ¿qué bala llegará primero al suelo?

Las dos al mismo tiempo!!!

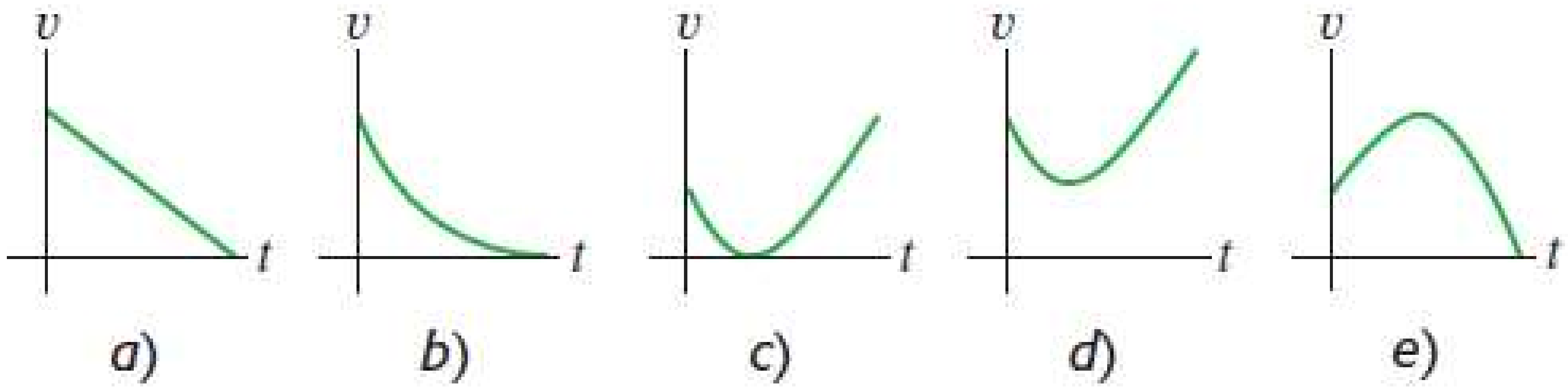
3) Se dispara un proyectil hacia arriba con un ángulo θ por encima de la horizontal con una rapidez inicial v_0. *Al llegar a su máxima altura,* ¿cuáles son su vector velocidad, su rapidez y su vector aceleración?

$\overline{v} = v_0 \cos\theta \ \hat{\imath}$ $\quad v = v_0 \cos\theta$ $\quad \overline{a} = -g\ \hat{\jmath}$

Desafío para la próxima clase

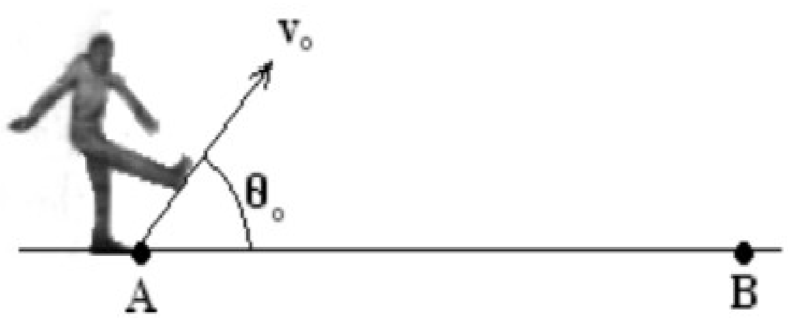
PREGUNTA PARA EL ANÁLISIS

Se lanza una piedra hacia el aire con un ángulo por encima de la horizontal, y se ignora la resistencia del aire.
¿Cuál de las gráficas en la figura describe mejor la *rapidez v de la piedra en función* del tiempo *t mientras está en el aire?*



Ejemplo: 2.18

Se patea una pelota desde A con una velocidad inicial de v_0 = 25m/s y un ángulo con la horizontal θ_0 = 50º. En ese instante sale desde B una persona, corriendo con velocidad constante, para recogerla. La distancia AB es 30 m y la persona recoge la pelota con los brazos totalmente estirados y verticales, a una altura de 2 m.



a) Halle la mínima velocidad con que debe correr la persona para atrapar la pelota.
b) Halle la velocidad de la pelota en el momento de ser atrapada.

Tiempo en que alcanza la altura máxima:
$$t_M = \frac{v_0 \sin\theta_0}{g} = \frac{25 \sin 50º}{9{,}80} = 1{,}954 \text{ s}$$

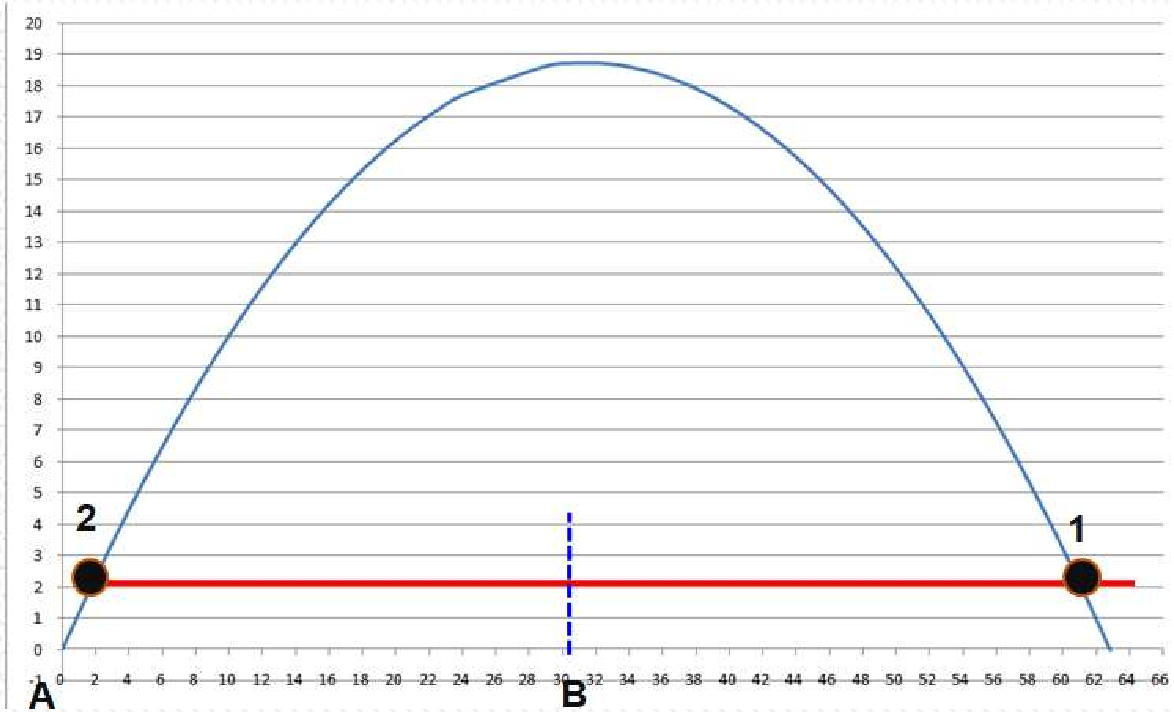
Altura máxima:
$$h_M = \frac{v_0^2 \sin^2\theta_0}{2g} = \frac{25^2 \sin^2 50º}{2(9{,}80)} = 18{,}71 \text{ m}$$

Alcance:
$$R = \frac{v_0^2 \sin 2\theta_0}{2g} = \frac{25^2 \sin 100º}{2(9{,}80)} = 62{,}81 \text{ m}$$

La persona que sale desde B, hacia dónde se debe dirigir?

¿Cómo calculo los instantes t* en los cuales la pelotea lanzada desde A, alcanza la altura de 2,0 m?

Hago y(t*) = 2,0 m
y resuelvo t*



Ejemplo: 2.20- Parcial 2021

$$h = v_0 .sen50°.t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} \Rightarrow \frac{1}{2} g t^{*2} - v_0 .sen50°.t^* + h = 0$$

$$t^* = \frac{v_0 sen50° \pm \sqrt{(v_0 sen50°)^2 - 4\left(\frac{1}{2} g\right) h}}{2.\frac{1}{2} g} = \frac{v_0 sen50° \pm \sqrt{(v_0 sen50°)^2 - 2gh}}{g} =$$

$$t^* = \frac{(25).sen50° \pm \sqrt{((25) sen50°)^2 - 2(9{,}8)(2)}}{9{,}8} \Rightarrow \quad t_1^* = 3{,}80 \text{ s} \ \ y \ \ t_2^* = 0{,}107 \text{ s}$$

Posición horizontal de la pelota: $x_p = v_0.\cos50°.t^*$, distancia a recorrer Δx (puede correr hacia delante o hacia atrás)

$x_{p1} = (25).\cos50°.(3{,}80) = 61{,}06$ m $\quad \Delta x_1 = 61{,}06 - 30 = 31{,}06$m $\quad v_{m1} = \frac{\Delta x_1}{t_1} = \frac{31{,}06}{3{,}80} = 8{,}17$ m/s

$x_{p2} = (25).\cos50°.(0{,}107) = 1{,}719$ m $\quad \Delta x_2 = 30 - 1{,}719 = 28{,}281$m $\quad v_{m2} = \frac{\Delta x_2}{t_2} = \frac{28{,}281}{0{,}107} = 264{,}3$ m/s

Velocidad mínima de la persona: v = 8,2 m/s (hacia adelante) (8,2 m/s **i**)

b) Velocidad de la pelota en el momento de ser atrapada (t_1^*):

$$\overline{v} = v_0 cos50° \,\hat{\imath} + (v_0 sen50° - g t_1)\hat{\jmath} = 16{,}07 \frac{m}{s} \hat{\imath} - 18{,}09 \frac{m}{s} \hat{\jmath}$$

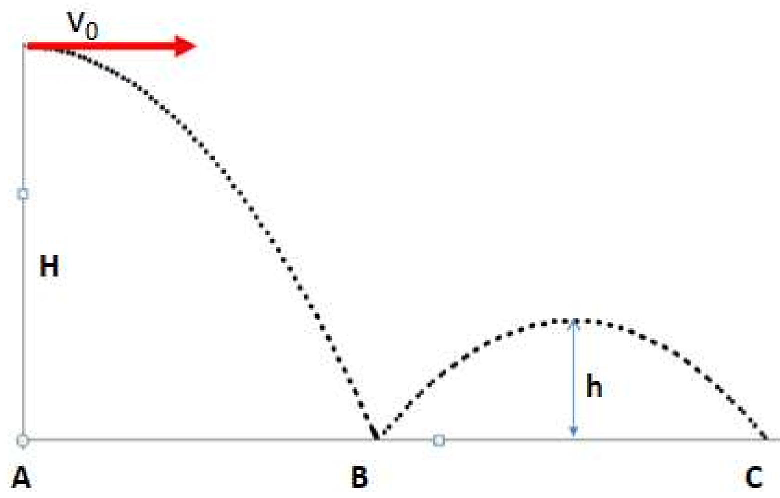
$$\overline{v}_{pelota} = (16\,\hat{\imath} - 18\,\hat{\jmath}) m/s$$

$$v_{pelota} = \sqrt{16{,}07^2 + (-18{,}09)^2} = 24{,}20 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-18{,}09}{16{,}07}\right) = -48{,}38º$$

v_{pelota} = 24,20 m/s $\quad \theta$ = 311,6º

Ejemplo: 2.20- Parcial 2021



Se lanza una bolita con velocidad horizontal v_0 =10,0 m/s desde una altura H = 2,00 m del piso. Al rebotar su rapidez vertical se reduce a la mitad que la que tenía justo antes de rebotar mientras que la rapidez horizontal permanece constante.
¿A qué distancia del lugar de lanzamiento se da el segundo rebote? Es decir se pide determinar la distancia AC, expresar el resultado en metros.
Tomar g=9,8 m/s² como valor exacto.

Datos: v_0 = 10,0 m/s; H = 2,00 m

Tiempo que demora la bolita en llegar al piso: $H = \frac{1}{2}gt^2$ $\quad t_B = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2(2{,}00)}{9{,}8}} = 0{,}63888\ s$

Rapidez vertical con que llega a B: $v_{yBant.} = g.t_B = 9{,}8 \times 0{,}63888 = 6{,}260990\ \ m/s$

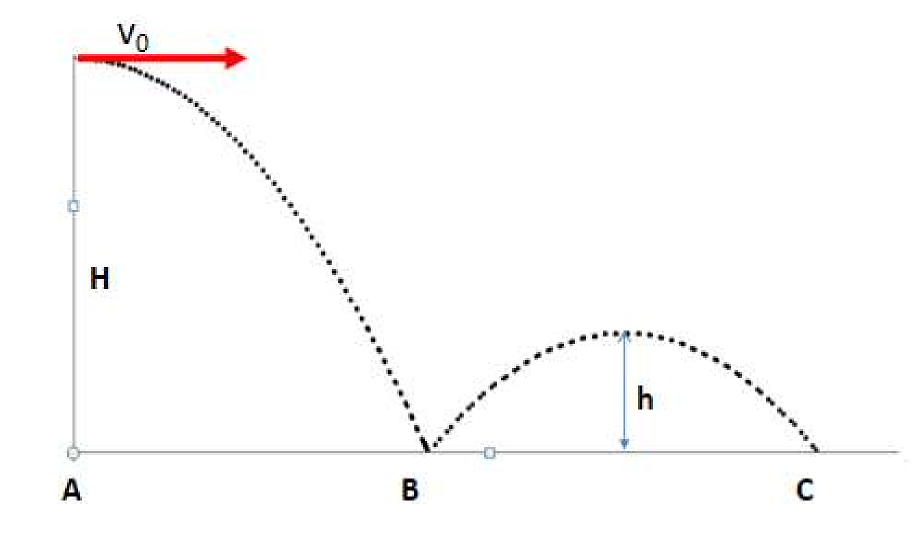
Rapidez vertical con que sale de B: $v_{yBpos.} = \frac{v_{yBant.}}{2} = 3{,}130495\ \ m/s$

Tiempo de vuelo posterior al rebote: $t_{BC} = 2\frac{v_{yBant.}}{a} = 2\frac{3{,}130495}{9.8} = 0{,}63888\ s$

Distancia AC recorrida: $d_{Ac} = v_0(t_B + t_{BC}) = 10{,}0 \times 0{,}63888 \times 2 = 12{,}7775$ m

d_{ABC} = 12,8 m

Ejemplo: 2.20- Parcial 2021



b) Determine cuál de las siguientes aseveraciones son verdaderas:

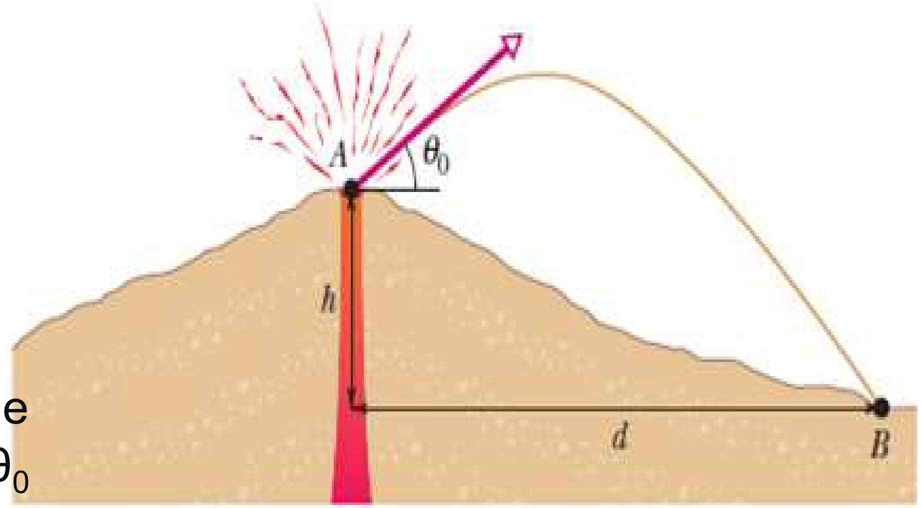
i) La aceleración media en el primer rebote en el punto B, es decir en el intervalo de tiempo antes y después de impactar con el suelo, es vertical hacia abajo. **Falso**

ii) El tiempo que demora la bolita en llegar al punto B desde su lanzamiento es menor que el que tarda en ir desde B a C. **Falso**

iii) La distancia AB es igual a la BC. **Verdadero**

iv) Cuando la bolita alcanza su altura máxima entre el trayecto B y C la velocidad es perpendicular a la aceleración. **Verdadero**

Ejemplo: 2.16



Durante las erupciones volcánicas pueden ser proyectados por el volcán gruesos trozos de roca (más de 6 cm de diámetro); estos proyectiles se llaman bombas volcánicas. La figura muestra una sección transversal del Monte Fuji, en Japón.

a) ¿A qué velocidad inicial tendría que ser arrojado de la boca A del volcán uno de estos bloques, formando $\theta_0 = 35º$ con la horizontal, con objeto de caer en el pie B del volcán? Datos: *h*=3,3 km; *d*= 9,4 km.

b) ¿Cuál es el tiempo de recorrido en el aire?

$$y = \tan\theta\, x - \frac{gx^2}{2(v_o cos\theta)^2} = \tan\theta\, x - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

Coloco el origen en el punto de lanzamiento.
Ecuación de la trayectoria:

$$\tan\theta\, x - y = +\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta} \qquad 2v_0^2\cos^2\theta = \frac{gx^2}{\tan\theta\, x - y}$$

$$v_0^2 = \frac{1}{2\cos^2\theta}\frac{gx^2}{\tan\theta\, x - y} \qquad v_0 = \sqrt{\frac{1}{2\cos^2\theta}\frac{gx^2}{\tan\theta\, x - y}} = \frac{x}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(\tan\theta\, x - y)}}$$

En nuestro caso: θ = 35º d= 9400 m y = -h = -3300 m

$$v_0 = \frac{x}{\cos\theta}\sqrt{\frac{g}{2(\tan\theta x - y)}} = \frac{9400}{\cos 35º}\sqrt{\frac{g}{2(\tan 35º(9400) - (-3300))}} = 255{,}53 \text{ m}$$

b) t el tiempo en que llega a B saliendo de A: $x(t) = v_0\cos\theta\ t$

$$t = \frac{x}{v_0\cos\theta} = \frac{9400}{255{,}53\cos 35º} = 44{,}91 \text{ s}$$

$v_0 = 2{,}6\times10^2$ m/s t= 45 s