

# Repaso: ¿de qué hablamos la clase pasada?

## CINEMÁTICA EN UNA DIMENSIÓN

- Posición, desplazamiento, distancia
- Velocidad media, velocidad instantánea
- Interpretación gráfica
- Aceleración media, aceleración instantánea
- Movimiento uniformemente acelerado
- Caída libre (lo veremos hoy)

# Repaso

**Marco de referencia:** eje  $x$ , origen, dirección y sentido positivo.

**Posición:** ubicación respecto al origen, función ley horaria  $x(t)$

**Desplazamiento  $\Delta x$ :** cambio de posición y está dado por  $\Delta x = x_f - x_i$

**Distancia:** longitud total del trayecto recorrido al moverse desde  $x_i$  a  $x_f$ .

**Rapidez media:** **rapidez media =  $\frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}}$**

**Velocidad media:** cociente entre el desplazamiento y el intervalo de tiempo  $\Delta t$  en el que se

realiza el mismo:  **$v_{\text{media}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$**

**Velocidad instantánea:**  $v$  es la velocidad media cuando el intervalo de tiempo  $\Delta t$  se hace muy pequeño (estrictamente es prácticamente nulo).

$$v \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

**Rapidez instantánea:** cantidad escalar, magnitud de la velocidad instantánea

# Repaso

**Aceleración:** es el cambio de velocidad de un objeto al transcurrir el tiempo.

**Aceleración media  $a_m$ :** durante el intervalo de tiempo  $\Delta t$  es el

cambio en la velocidad  $\Delta v$  dividida entre  $\Delta t$ :

$$a_{\text{media}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

**Aceleración instantánea  $a$ :** es el límite de la aceleración media

conforme el intervalo de tiempo  $\Delta t$  tiende a cero:

$$a \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

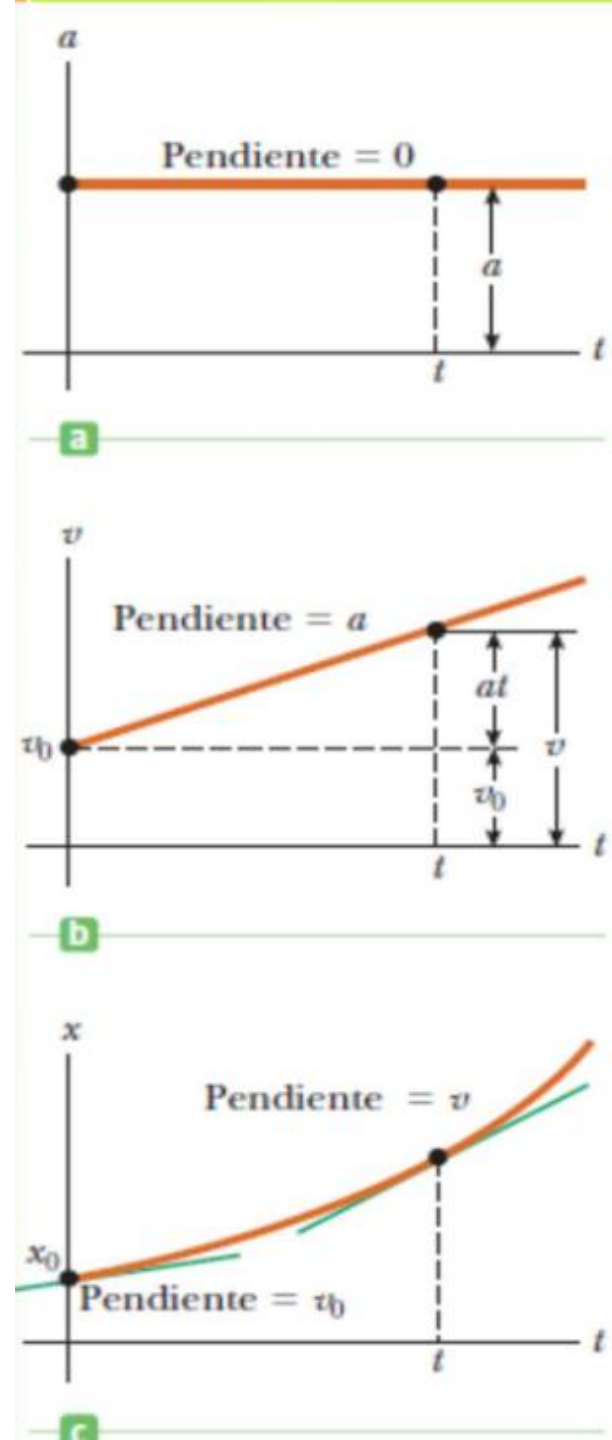
**Movimiento uniformemente acelerado 1D** (ecuaciones):

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}a(t - t_0)^2$$

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0)$$

$$v_f^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

El área bajo la gráfica  $v$  en términos de  $t$  para cualquier objeto es igual al desplazamiento  $\Delta x$  del objeto

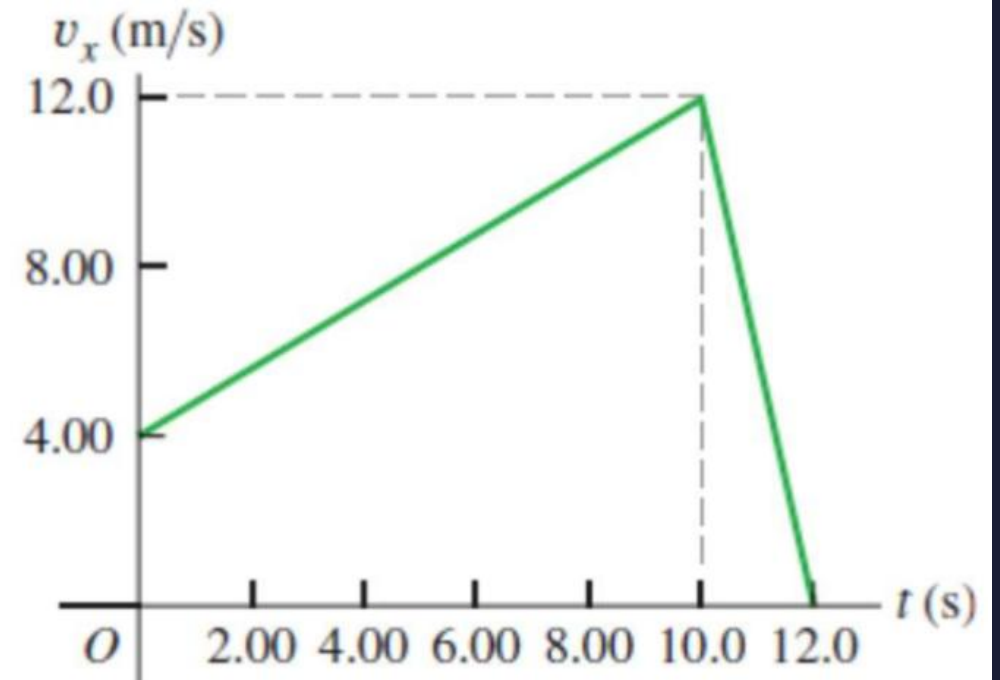


# Ejemplo

## EJERCICIO 2.4

Una gacela corre en línea recta (el eje  $x$ ). En la figura, la gráfica muestra la velocidad de este animal en función del tiempo. Durante los primeros 12,0 s, obtenga:

- la distancia total recorrida y,
- el desplazamiento de la gacela.
- Dibuje una gráfica  $a(t)$  que muestre la aceleración de la gacela en función del tiempo durante los primeros 12,0 s.



# ¿Qué trabajaremos hoy?

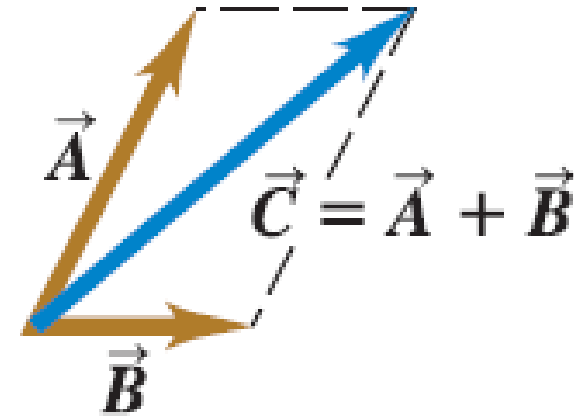


## MOVIMIENTO EN UNA DIMENSIÓN

- Caída libre. Ejemplo
- Salto en altura

## VECTORES:

- Sistemas de coordenadas, vectores, propiedades de vectores
- Componentes de un vector.
- Vectores unitarios



# Caída libre

Se sabe que, despreciando la resistencia del aire, todos los objetos caen sobre la Tierra con la misma aceleración (1600 Galileo) – si bien hasta ese momento se creía que los más pesados caen más caían más rápido (Aristóteles).

Galileo descubrió la ley de caída libre de objetos al observar que si dos pesas diferentes se dejaban caer de manera simultánea desde la Torre inclinada de Pisa, golpeaban la superficie de la Tierra aproximadamente en el mismo tiempo. En 1971, David Scott repitió el experimento, en la Luna.

**Caída libre:** *caso idealizado de movimiento donde se omite la resistencia del aire y se supone aceleración constante de  $g$  – vertical, y hacia abajo.*

El valor de  $g$  disminuye con el aumento de la altitud y también varía ligeramente con la latitud. En la superficie de la Tierra, el valor de  $g$  es aproximadamente  $9,80 \text{ m/s}^2$ .

# Caída libre: ecuaciones

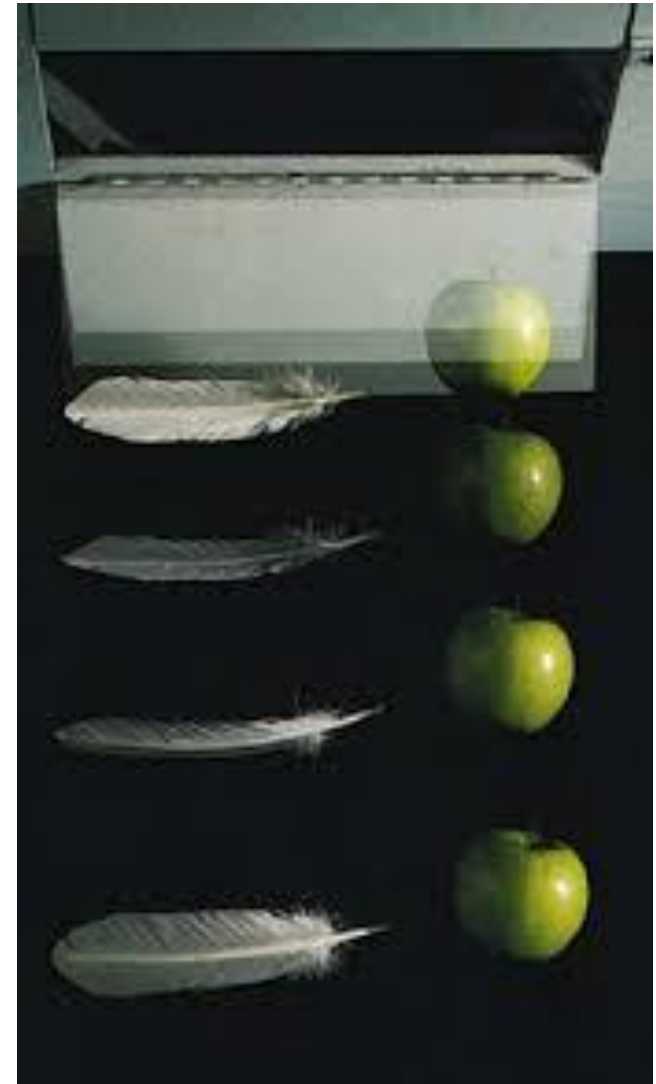
Si ignoramos resistencia del aire y variación de  $g$ , se trata de un movimiento de aceleración constante.

Si consideramos, convencionalmente, que la dirección *hacia 'arriba' es la positiva*, las ecuaciones son:

$$v(t) = v_0 - g(t - t_0)$$
$$y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

**EJEMPLO:** pensemos que se arroja una piedra hacia arriba en  $t = 0$ , y definimos el origen en el punto de lanzamiento ( $y_0 = 0$ ). Calculemos el tiempo de vuelo y altura máxima del lanzamiento.

$$y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \quad t_{max} = \frac{v_0}{g}$$



# Repaso: caída libre

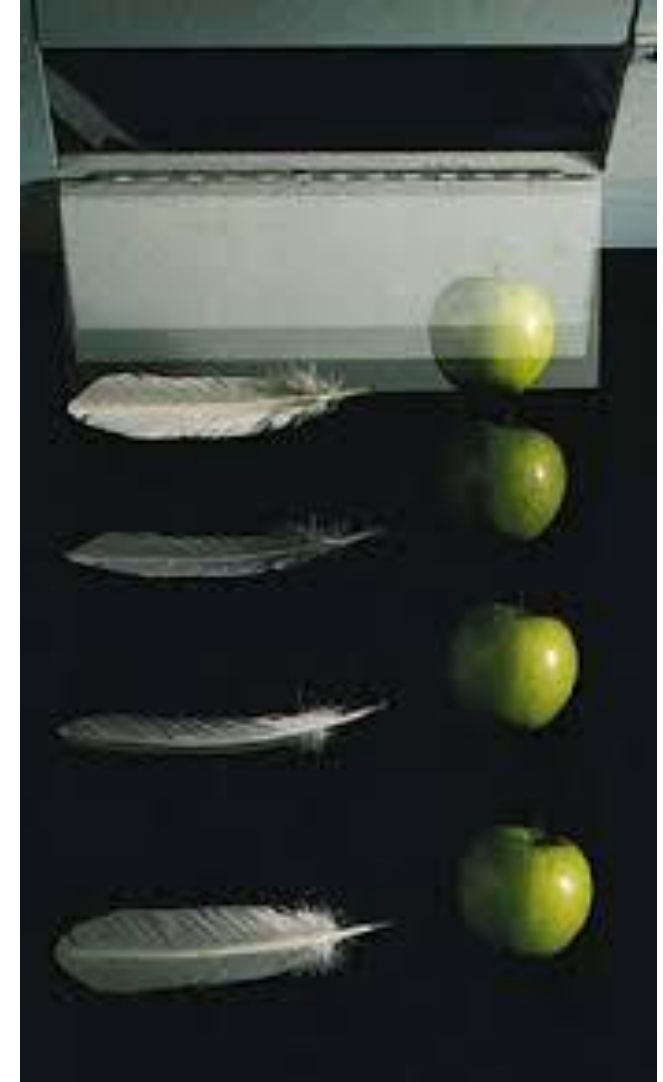
**Caída libre:** movimiento bajo la influencia sólo de la gravedad, con una aceleración de magnitud igual a  $g$  y dirección vertical, hacia el centro de la Tierra

$$v_y(t) = v_{0,y} - g(t - t_0)$$
$$y(t) = y_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$$

$$y_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \quad t_{max} = \frac{v_0}{g}$$

## IMPORTANTE:

1. **Signo de  $g$ :**  $g$  es un número positivo, la aceleración gravitacional hacia abajo es tomada en cuenta al escribir  $a_y = -g$
2. **Aceleración en altura máxima:** **que el objeto se detenga** en su punto de mayor altura **no implica** que su aceleración sea nula. De hecho, esta sigue siendo  $-g$  en todo momento, y por eso, cae.



# Caída libre: ejemplo

La Torre Inclinada



Suponga que tira una moneda desde lo alto de la Torre de Pisa, con  $v_0 = 3.0\text{m/s}$  hacia arriba:

- a) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la moneda, sobre el punto de salida?
- b) ¿Cuánto tiempo le toma volver a pasar por la altura inicial?
- c) ¿Con qué velocidad lo hace?
- d) Al cabo de  $t = 2.0\text{s}$ , ¿a qué altura se encuentra?

# Salto vertical

Muchos animales saltan verticalmente, describiendo movimientos regidos por la aceleración gravitatoria (saltamontes, ranas, marsupiales, humanos...)

Podemos usar las ecuaciones de caída libre para calcular la *velocidad de despegue*  $v_d$ :  $v_d = \sqrt{2h_{max}g}$

Para llegar a despegar con esta velocidad, un animal tiene que flexionar sus patas y luego extenderlas imprimiendo un movimiento que suponemos como uniformemente acelerado hacia arriba durante el tiempo que dura la extensión.

La longitud a lo largo de la cual el movimiento se acelera hasta llegar a la velocidad de despegue es del orden de magnitud de la longitud de las patas  $L$ .

La aceleración durante el despegue es:  $a_m = \frac{v_d^2}{2L}$

*Ver Presentación en EVA*

# Salto vertical: ejemplo

## EJERCICIO 2.12

Al hacer un salto vertical, un saltamontes extiende sus patas 2,5 cm en 0,025 s.

- a) ¿Cuál es la aceleración del saltamontes mientras extiende sus patas?
- b) ¿Cuál es la velocidad del saltamontes cuando parte del suelo, o sea, en el instante en que sus patas están completamente extendidas?
- c) ¿A qué altura se eleva el saltamontes?



# Salto vertical: ejemplo

## EJERCICIO 2.12

Al hacer un salto vertical, un saltamontes extiende sus patas 2,5 cm en 0,025 s.

- ¿Cuál es la aceleración del saltamontes mientras extiende sus patas?
- ¿Cuál es la velocidad del saltamontes cuando parte del suelo, o sea, en el instante en que sus patas están completamente extendidas?
- ¿A qué altura se eleva el saltamontes?

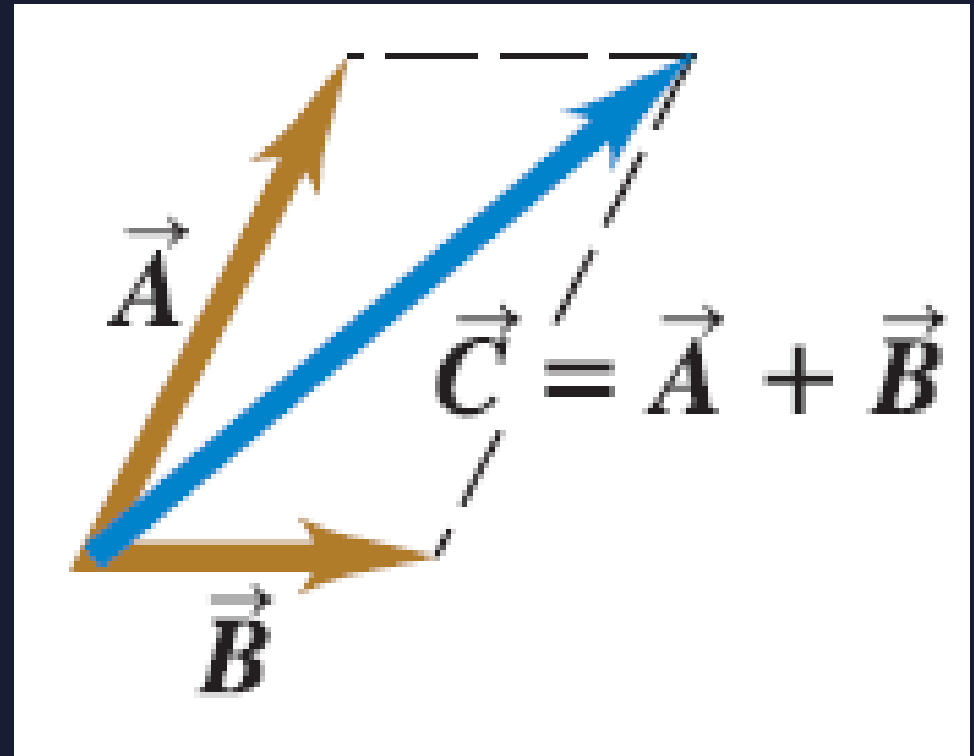
R: a- $a = 80m/s^2 \approx 8g$

b- $v_d = 2.0m/s$

c- $h_{\text{máx}} = 20cm$



# 5- VECTORES



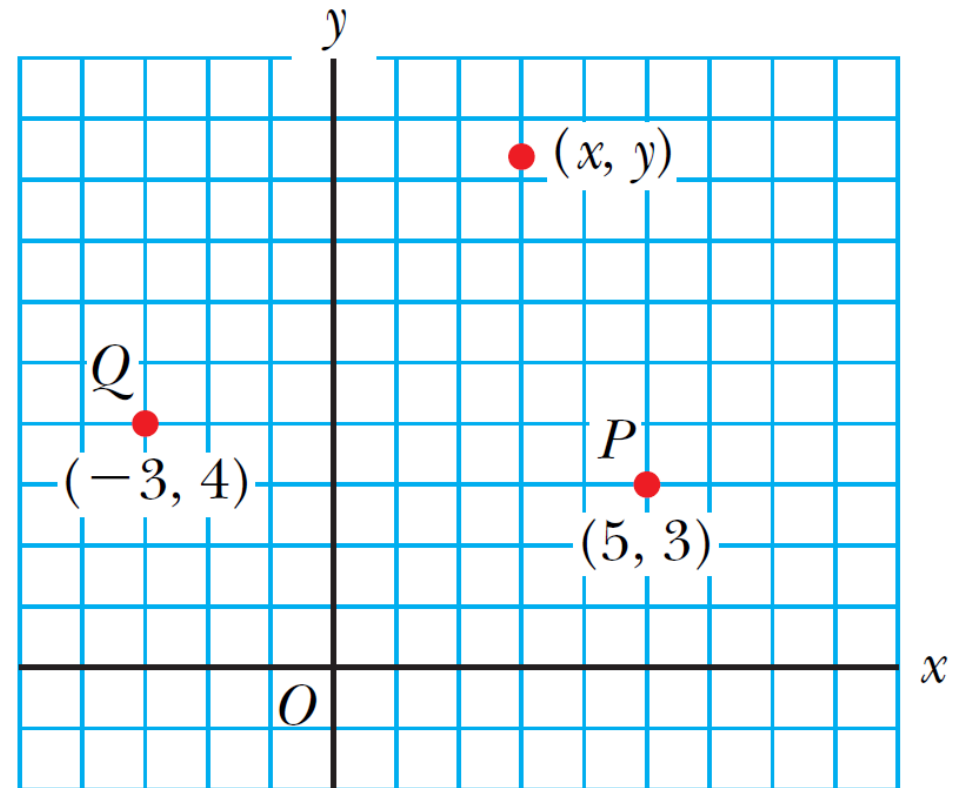
# Sistemas de coordenadas

Para localizar un punto en la **recta**, preciso **una sola coordenada**. En un **plano**, preciso **dos coordenadas**. Y en el espacio 3D, preciso **tres coordenadas**.

Un **sistema coordinado** nos permite especificar la posición de un objeto, y está compuesto por:

- Un punto de referencia, *origen*, denotado  $O$
- Un conjunto de ejes coordenados
- Conjunto de instrucciones para ubicar a un punto respecto a  $O$  y ejes

En dos dimensiones, etiquetamos un punto con un par  $(x,y)$ . Por ejemplo, el origen  $O$  es el  $(0,0)$ , y para llegar a  $P$   $(5,3)$ , me muevo 5 horizontalmente a la derecha y 3 verticalmente hacia arriba



# Vectores y sus propiedades

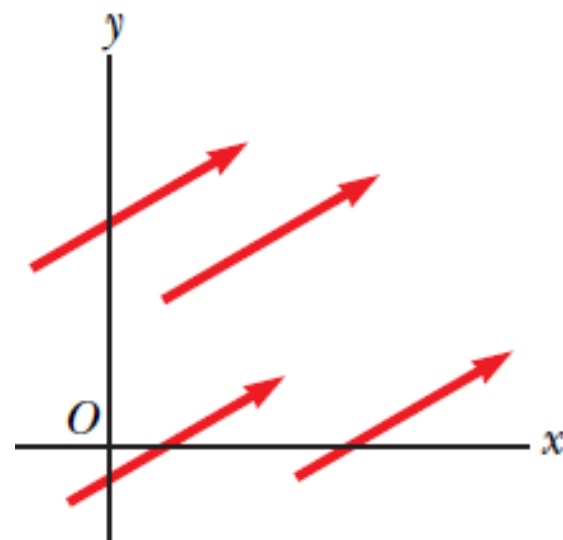
Algunas magnitudes físicas se pueden dar con un número y una unidad – **escalares** – como la masa, temperatura, densidad, pero otras están asociadas a una dirección y sentido – **vectoriales** – tales como la velocidad o fuerza.

Denotamos una *cantidad vectorial* como:  $\vec{A}$ , con una flecha y en negrita.

Entre barras escribimos el **módulo** o magnitud (el largo de la flecha):  $A = |\vec{A}|$

## IGUALDAD DE VECTORES

Dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son **iguales** si tienen mismo módulo, dirección y sentido. Por ejemplo, todos los vectores de la figura son iguales.



## SUMA DE VECTORES

Solo podemos sumar vectores con las **mismas unidades**.

# Vectores y sus propiedades

## SUMA DE VECTORES

Una forma de entenderla, es el **método gráfico**. Dibujamos al vector  $\vec{A}$ , con cierta escala, y luego al  $\vec{B}$  con su origen iniciando en la punta de  $\vec{A}$ . Luego, el vector que une el origen de  $\vec{A}$  con el extremo de  $\vec{B}$  es  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$

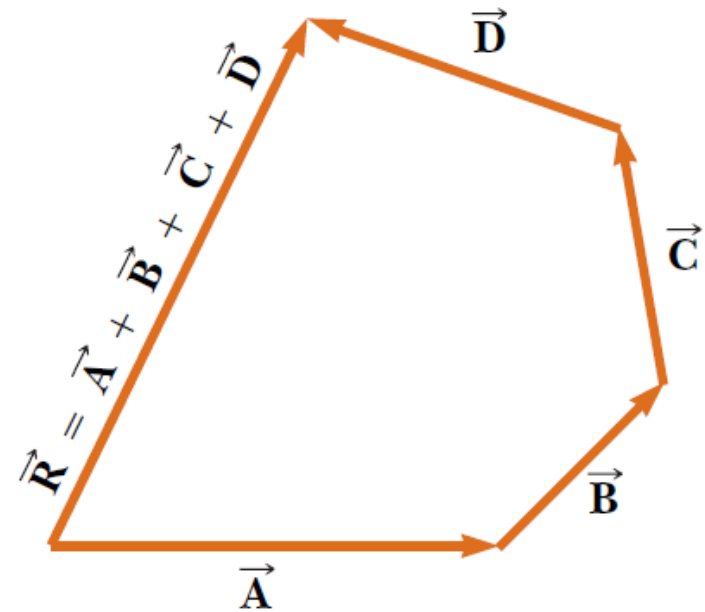
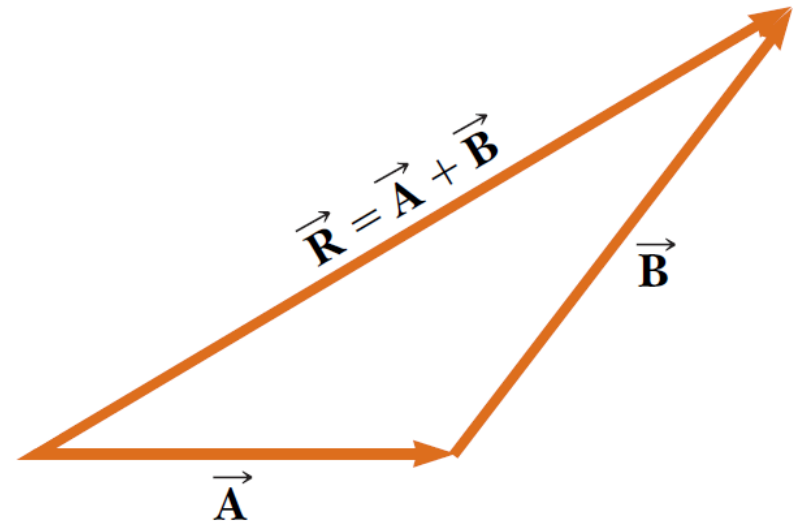
Esta operación es *conmutativa*:  $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$

También vale que la suma es *asociativa*:

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$$

Esta regla se generaliza para sumar varios vectores, sin importar el orden en que se coloquen.

**OJO: módulo de la suma  $\neq$  suma de los módulos**



# Vectores y sus propiedades

## OPUESTO DE UN VECTOR

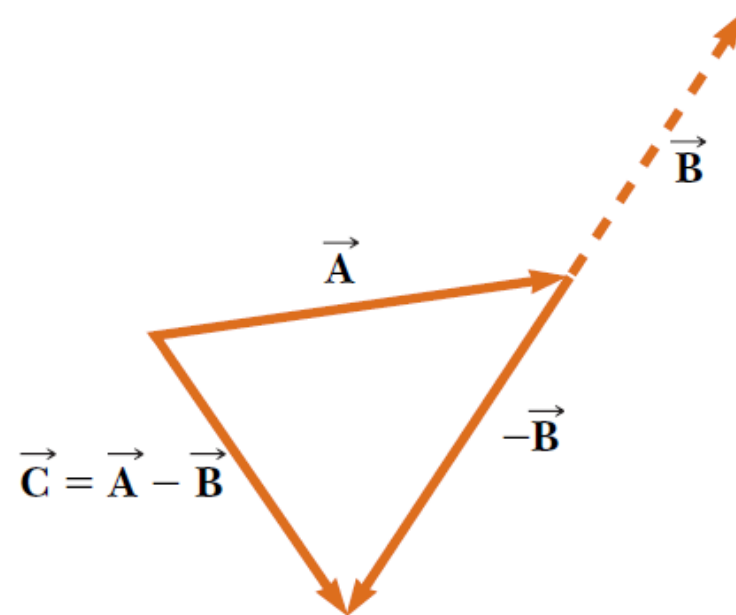
Es el vector que al sumarse con  $\vec{A}$ , da el vector nulo.  $\vec{A}$  y  $-\vec{A}$  tienen igual magnitud y dirección, pero sentido opuesto.

## RESTA DE VECTORES

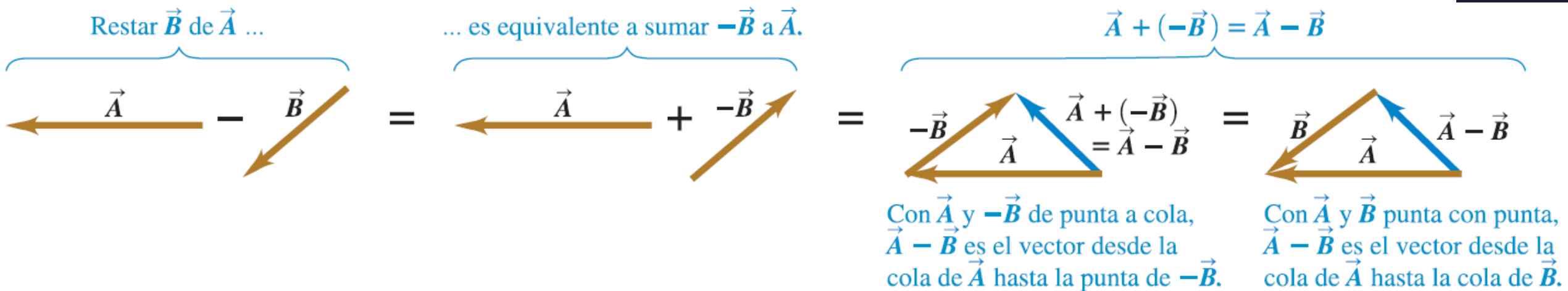
Se hace uso de la definición del opuesto de un vector. Operación  $\vec{A} - \vec{B}$ : al vector  $\vec{A}$  le sumo el vector  $-\vec{B}$ . La resta vectorial es un caso especial de suma de vectores.

## MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

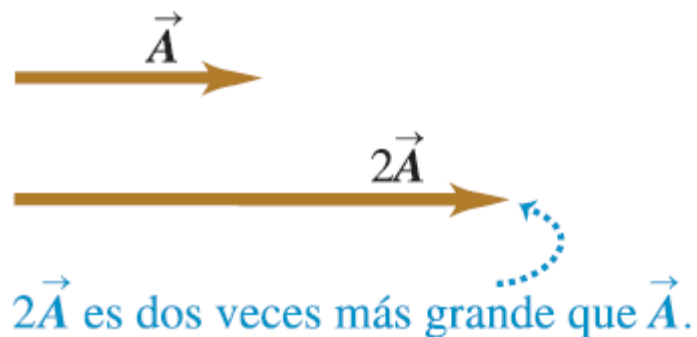
Si el vector  $\vec{A}$  se multiplica por una cantidad escalar positiva  $m$ , el producto  $m\vec{A}$  es un vector que tiene la misma dirección que  $\vec{A}$  y magnitud  $mA$ . Si  $m$  es negativo,  $m\vec{A}$  tiene sentido opuesto a  $\vec{A}$ .



# Vectores y sus propiedades: resumen



a) Al multiplicar un vector por un escalar positivo, la magnitud (longitud) del vector podría cambiar, pero no su dirección.



b) Al multiplicar un vector por un escalar negativo, podría cambiar su magnitud e invertir su dirección.



# Pregunta rápida

Las magnitudes de dos vectores  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son  $A=12$  unidades y  $B=8$  unidades.

¿Cual de los siguientes pares de números representa los valores *más grandes y más pequeños* posibles para la magnitud del vector resultante

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}?$$

- a) 14.4 unidades, 4 unidades,
- b) 12 unidades, 8 unidades,
- c) 20 unidades, 4 unidades,
- d) ninguna de estas respuestas

# Pregunta rápida

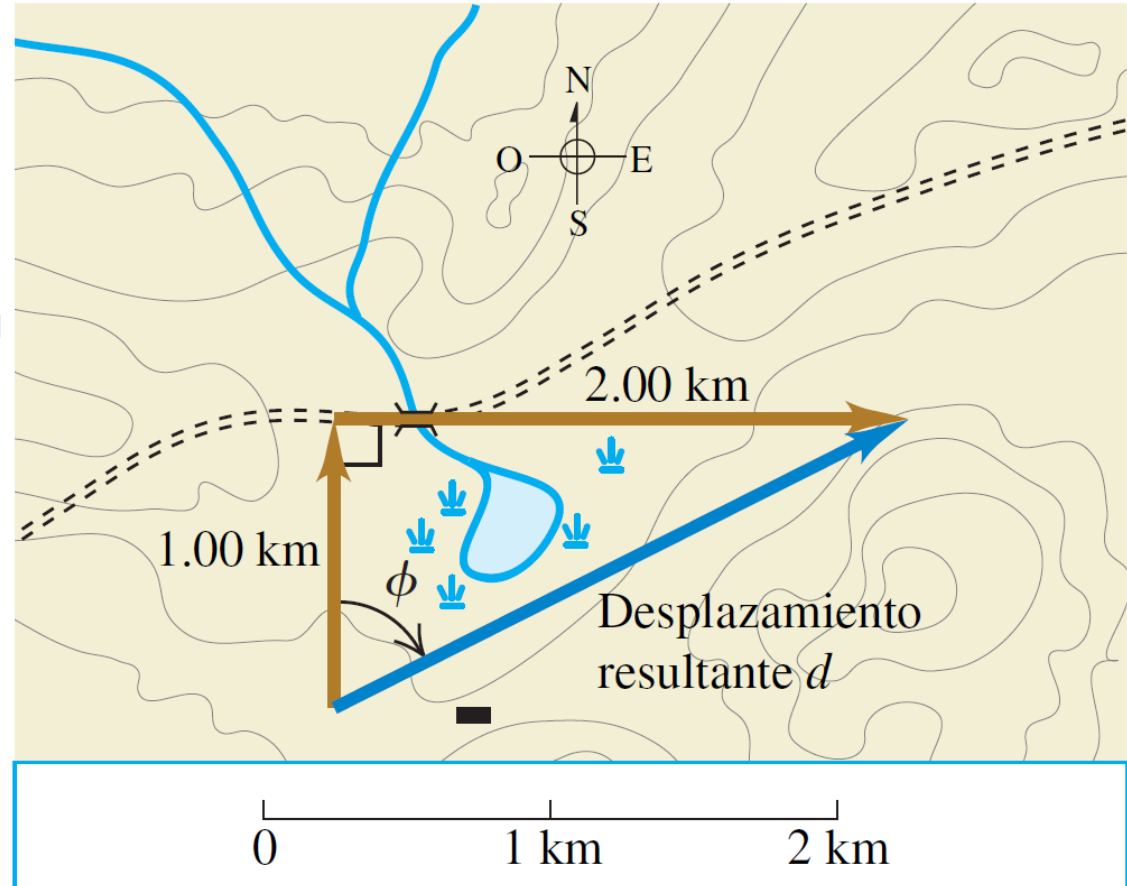
Si el vector  $\vec{B}$  se suma al vector  $\vec{A}$ , ¿cuales *dos* de las siguientes opciones deben ser verdaderas para que el vector resultante sea igual a cero?

- a)  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son paralelos y en la misma dirección.
- b)  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son paralelos y en direcciones opuestas.
- c)  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  tienen la misma magnitud.
- d)  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$  son perpendiculares.

# Ejemplo

## EJEMPLO 1.5 YF

Una esquiadora de fondo viaja 1.00 km al norte y luego 2.00 km al este por un campo nevado horizontal. ¿A qué distancia y en qué dirección está con respecto al punto de partida?

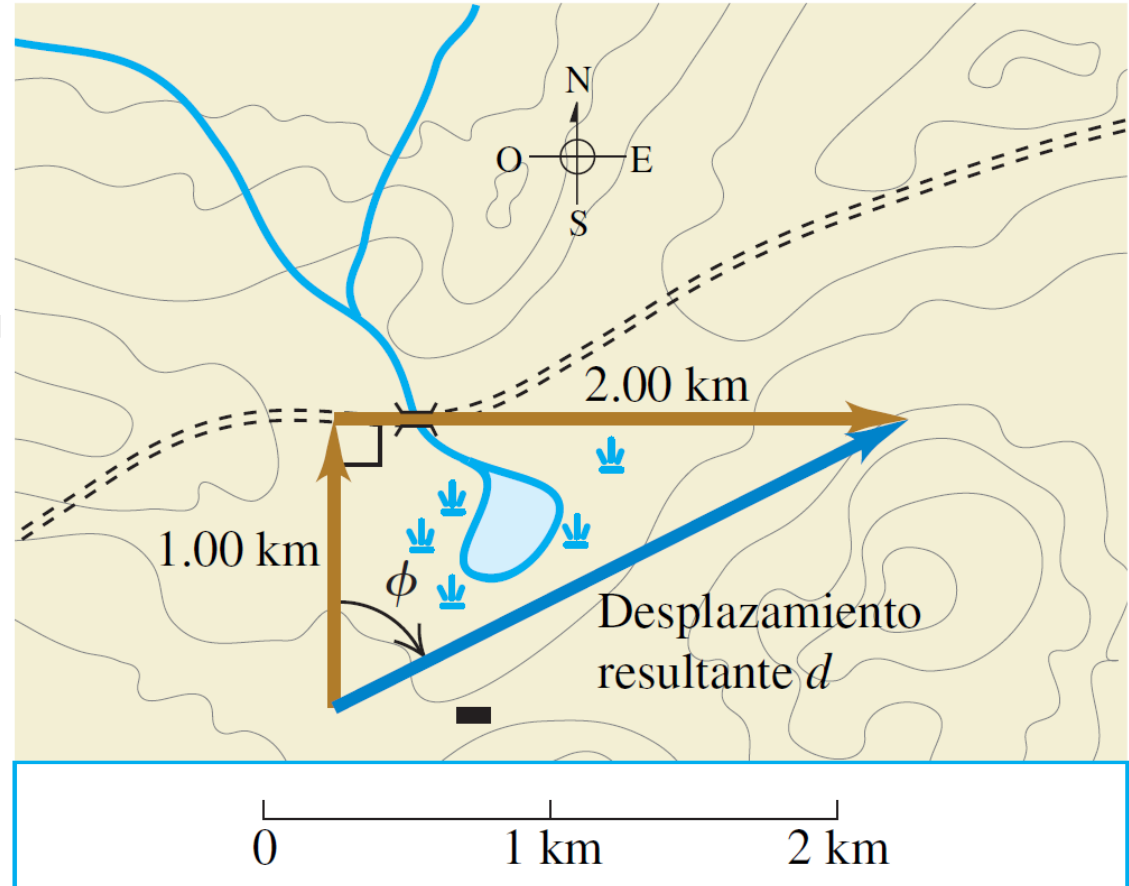


# Ejemplo

## EJEMPLO 1.5 YF

Una esquiadora de fondo viaja 1.00 km al norte y luego 2.00 km al este por un campo nevado horizontal. ¿A qué distancia y en qué dirección está con respecto al punto de partida?

R: 2.24km  $63.4^\circ$  al este del norte



# Componentes de un vector

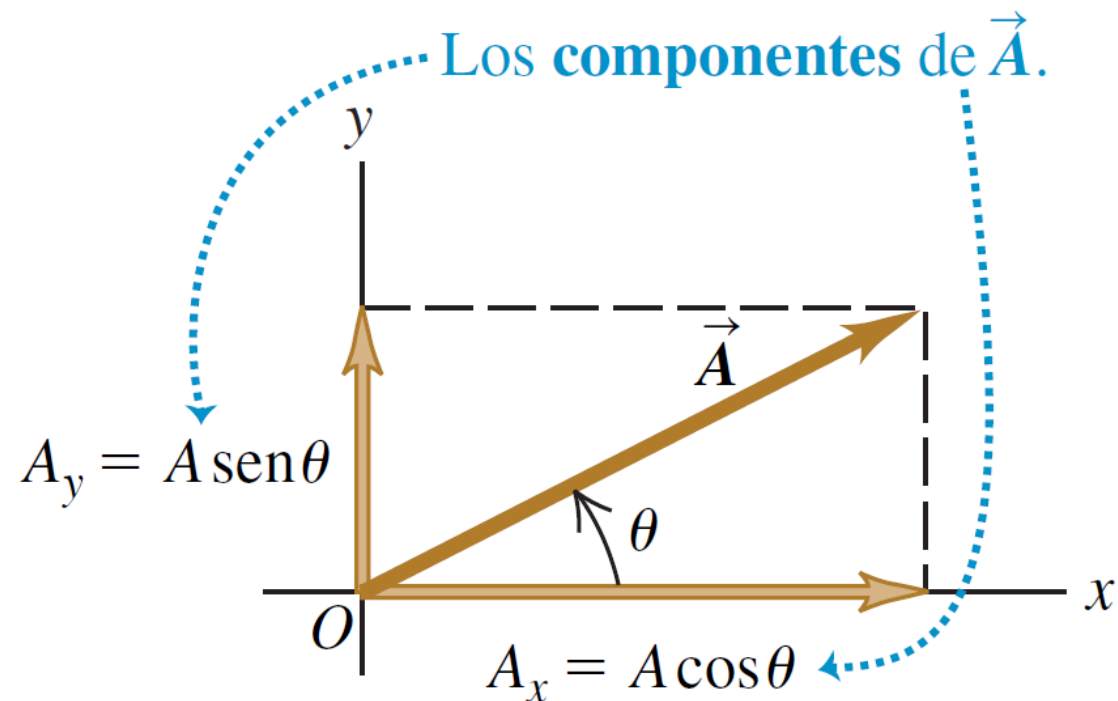
A veces es método gráfico es difícil de implementar, o poco preciso. En este curso usaremos mucho la **descomposición en componentes**.

Cualquier vector en el plano  $xy$  se puede descomponer en **componentes**, su proyección sobre los ejes  $x$  e  $y$ , como la suma de **dos vectores componentes**  $\vec{A}_x$  y  $\vec{A}_y$ :

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

Dado que los vectores componentes se ubican según los ejes, basta con dar sus módulos.

Definimos el número  $A_x$  como el módulo de  $\vec{A}_x$  si apunta en el sentido positivo, si apunta en el sentido negativo, es su opuesto. Análogamente se define  $A_y$ .



# Componentes de un vector

Los números  $A_x$  y  $A_y$  son las componentes de  $\vec{A}$

Estas pueden ser positivas o negativas.

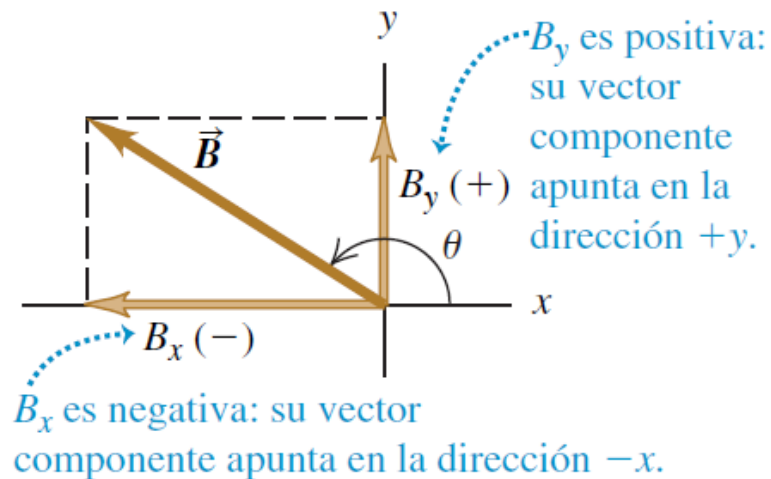
Describimos la dirección de un vector por su ángulo  $\theta$  en relación con alguna dirección de referencia: convencionalmente, *el eje x positivo*. El ángulo se mide usualmente en forma antihoraria.

$$\frac{A_x}{A} = \cos \theta \quad \text{y} \quad \frac{A_y}{A} = \text{sen } \theta$$

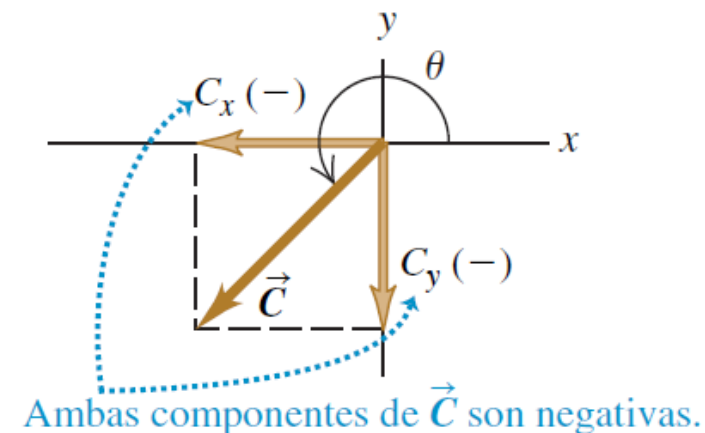
$$A_x = A \cos \theta \quad \text{y} \quad A_y = A \text{sen } \theta$$

( $\theta$  medido del eje  $+x$  girando hacia el eje  $+y$ )

a)



b)



# Cálculo de vectores usando componentes

## 1. Cálculo de la magnitud y la dirección de un vector a partir de sus componentes.

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$$

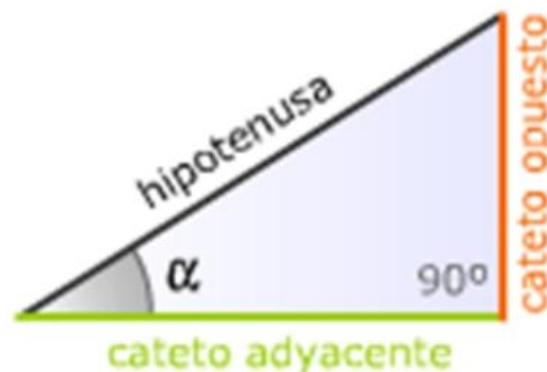
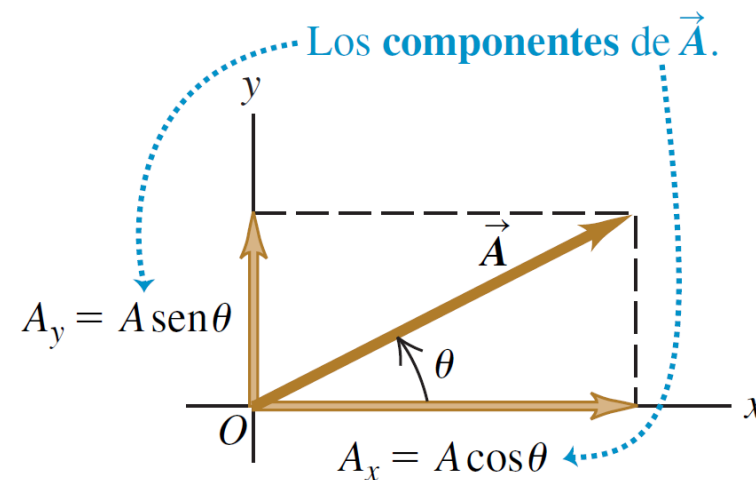
$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \theta = \arctan \frac{A_y}{A_x}$$

Paréntesis matemático: arctan es la *función inversa* de tangente.

Estamos hablando de **funciones trigonométricas**. Las que usaremos a menudo son las más comunes: **seno**, **coseno y tangente**.

Recordar regla mnemotécnica

**SOHCAHTOA**



$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{cos } \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

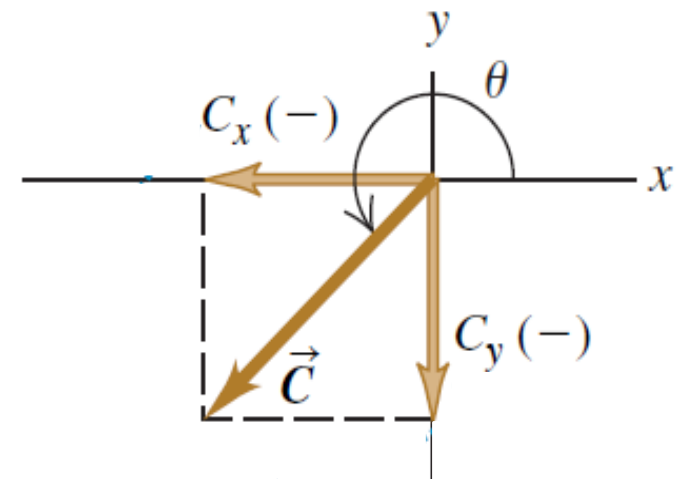
$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

# Cálculo de vectores usando componentes

## 1. Cálculo de la magnitud y la dirección de un vector a partir de sus componentes.

**CUIDADO:** Cálculo de dirección de vector a partir de sus componentes. Inconveniente en uso de ecuaciones p/obtener  $\theta$ : dos ángulos cualesquiera que difieran  $180^\circ$  tienen la misma tangente. Para decidir cuál es correcto, debemos examinar las componentes individuales

Por ejemplo, en este caso la tangente valdrá 1 y  $\arctan(1)=45^\circ$ . Sin embargo, el ángulo correcto será  $225^\circ$



# Cálculo de vectores usando componentes

## 2. Multiplicación de un vector por un escalar.

Si multiplicamos un vector  $\vec{A}$  por un escalar  $c$ , cada componente del vector  $\vec{D} = c\vec{A}$ , es el producto de  $c$  por la correspondiente componente de  $\vec{A}$ .

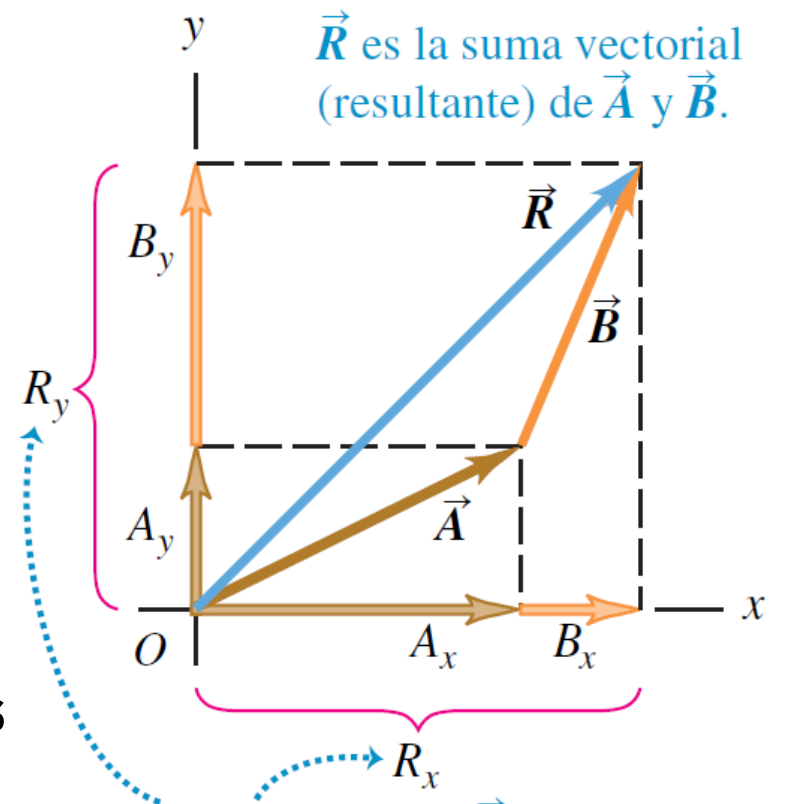
$$D_x = cA_x \quad \text{y} \quad D_y = cA_y$$

## 3. Uso de componentes para calcular la suma de vectores (resultante) de dos o más vectores.

Cada una de las componentes del vector suma, es la suma de las respectivas componentes de los vectores:

$$R_x = A_x + B_x \quad \text{y} \quad R_y = A_y + B_y \quad \text{donde} \quad \vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

Esto se generaliza para la suma de  $n$  vectores.



Las componentes de  $\vec{R}$  son las sumas de las componentes de  $\vec{A}$  y  $\vec{B}$ :

$$R_y = A_y + B_y \quad R_x = A_x + B_x$$

# Ejemplo

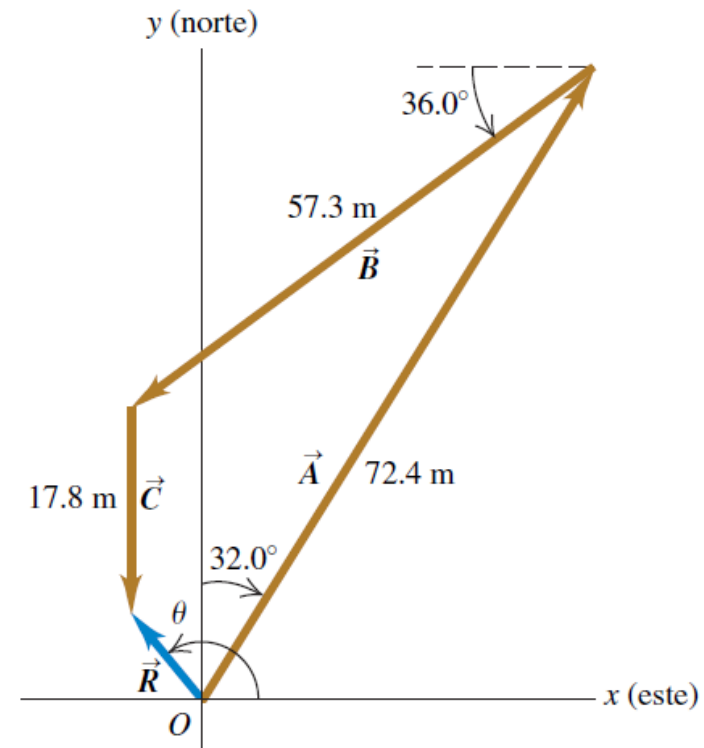
## EJEMPLO 1.7 YF

Los tres finalistas de un concurso de TV se colocan en el centro de un campo plano grande. Cada uno cuenta con una regla graduada de un metro de longitud, una brújula, una calculadora, una pala y (en diferente orden para cada concursante) los siguientes desplazamientos:

- 72.4 m, 32.08 al este del norte
- 57.3 m, 36.08 al sur del oeste
- 17.8 m al sur

Los tres desplazamientos llevan al punto donde están enterradas las llaves de un Porsche nuevo. Dos concursantes comienzan a medir de inmediato; sin embargo, la ganadora primero *calcula* adonde debe ir. ¿Qué calculó?

1.22 Tres desplazamientos sucesivos  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  y el desplazamiento resultante (suma vectorial)  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ .



# Ejemplo

## EJEMPLO 1.7 YF

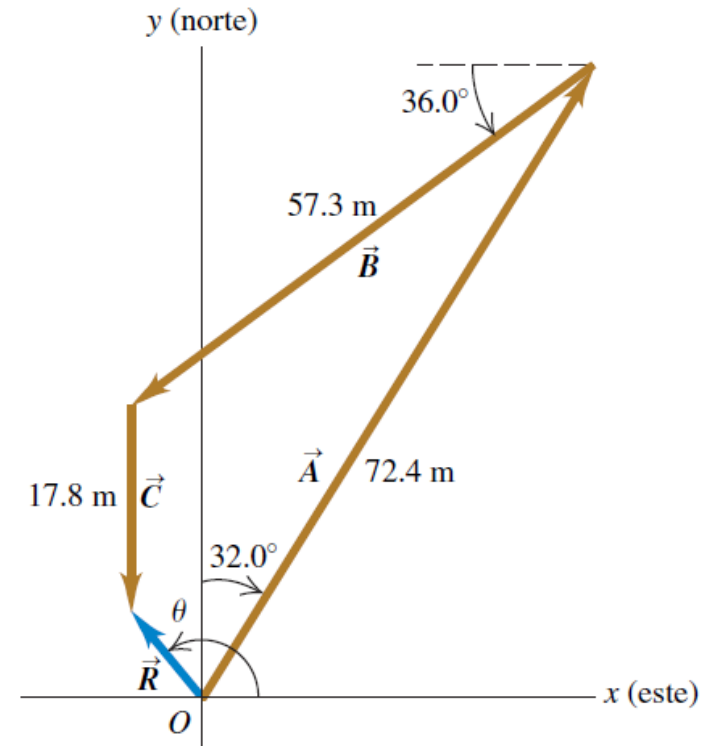
Los tres finalistas de un concurso de TV se colocan en el centro de un campo plano grande. Cada uno cuenta con una regla graduada de un metro de longitud, una brújula, una calculadora, una pala y (en diferente orden para cada concursante) los siguientes desplazamientos:

- 72.4 m, 32.08 al este del norte
- 57.3 m, 36.08 al sur del oeste
- 17.8 m al sur

Los tres desplazamientos llevan al punto donde están enterradas las llaves de un Porsche nuevo. Dos concursantes comienzan a medir de inmediato; sin embargo, la ganadora primero *calcula* adonde debe ir. ¿Qué calculó?

*R: 12.7m 39° al oeste del norte*

1.22 Tres desplazamientos sucesivos  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{C}$  y el desplazamiento resultante (suma vectorial)  $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$ .



# Componentes de un vector en 3D

Lo que hemos visto se **generaliza** a vectores en **tres dimensiones**:  
*vectores con cualquier dirección en el espacio.*

Se introduce un eje  $z$  perpendicular al plano  $xy$ ; entonces en general un vector  $\vec{A}$  tendrá **tres componentes**  $A_x$ ,  $A_y$ ,  $A_z$

Y su magnitud o módulo será:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

De igual manera la componente  $z$  de la suma será la suma de las componentes  $z$ .

# Vectores unitarios: versores

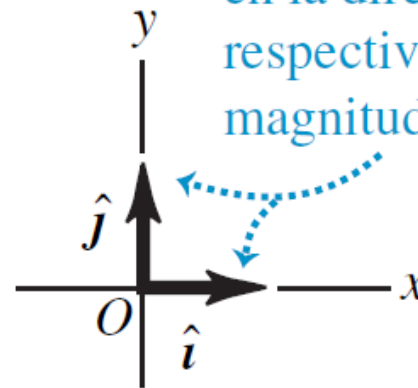
Un **vector unitario** es un vector con magnitud 1, sin unidades. Su única finalidad consiste en direccionar, es decir, describir una dirección en el espacio.

Incluiremos un acento circunflejo o “sombrero” (^) sobre el símbolo de un vector unitario para distinguirlo de los vectores ordinarios cuya magnitud podría o no ser 1.

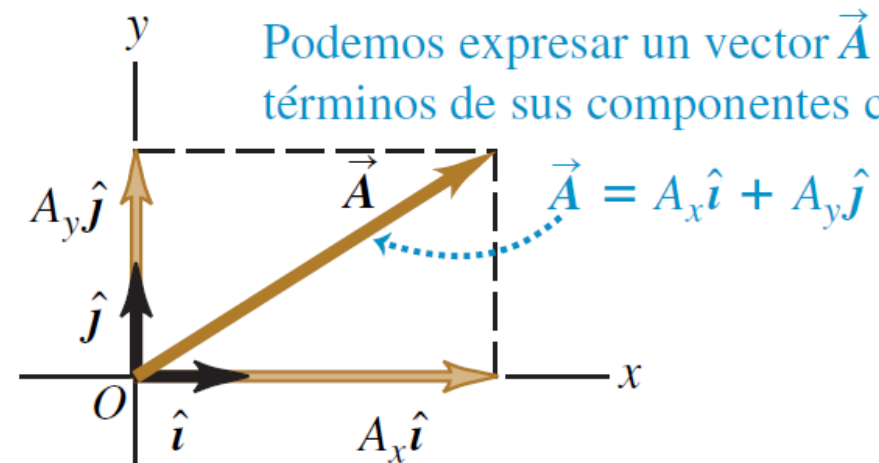
En un sistema de coordenadas  $x$ - $y$  podemos definir un vector unitario  $\hat{i}$  que apunte en la dirección del eje  $+x$  y un vector unitario  $\hat{j}$  que apunte en la dirección del eje  $+y$ . Así relacionamos las componentes y los vectores componentes como:

$$\vec{A}_x = A_x \hat{i} \quad \vec{A}_y = A_y \hat{j}$$

a) Los vectores unitarios  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  apuntan en la dirección de los ejes  $x$  y  $y$  respectivamente, y tienen una magnitud de 1.



Podemos expresar un vector  $\vec{A}$  en términos de sus componentes como



# Vectores unitarios: versores en 3D

En tres dimensiones se agrega el versor según el eje  $z$ , que denotaremos  $\hat{k}$

Entonces, un vector queda dado por sus tres componentes:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

**1.24** Los vectores unitarios  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ .

## EJEMPLO 1.9 YF

Dados los dos desplazamientos

$$\vec{D} = (6,00\hat{i} + 3,00\hat{j} - 1,00\hat{k})m$$

$$\vec{E} = (4,00\hat{i} - 5,00\hat{j} + 8,00\hat{k})m$$

obtenga el módulo del  
desplazamiento  $2\vec{D} - \vec{E}$

R: 16,9m

