6- CINEMÁTICA EN DOS DIMENSIONES, PROYECTILES

Repaso: ¿de qué hablamos la clase pasada?

- **Caída libre y salto en altura**
  - Ecuaciones y ejemplos.
  - ¿Preguntas?

- **Vectores:**
  - Sistemas de coordenadas
  - Propiedades: suma, resta, producto por escalar
  - Componentes de un vector
  - Cálculo por componentes
  - Vectores unitarios

¿Qué trabajaremos hoy?

CINEMÁTICA EN DOS DIMENSIONES

- Vectores posición y velocidad
- Vector aceleración
- Componentes de la aceleración

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

- Ecuaciones
- Alcance
- Límites del modelo

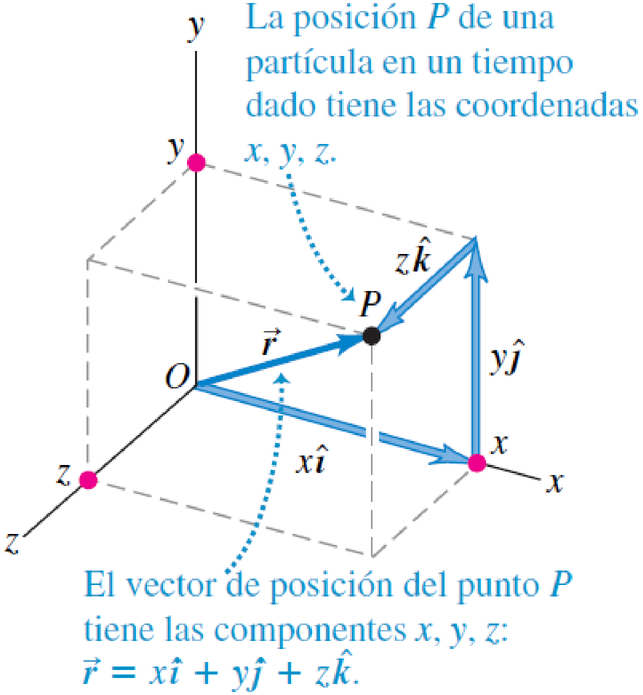
Cinemática 2D: vectores

Pensemos en estas situaciones. Lo que hemos visto de movimientos en una dimensión no nos alcanza para describirlas. La pelota sube y baja mientras avanza. El auto describe una trayectoria circular.

Mientras que antes el sentido lo indicaba el signo (+ o -) ahora necesitamos hacer *uso completo del **concepto vectorial.***

Un objeto se mueve en el espacio como vemos y en cierto tiempo t se encuentra en el punto P. Su **posición** se describe mediante el **vector de posición** $\vec{r}$, dibujado desde el origen hasta P.

Entre dos posiciones distintas, tendremos el vector desplazamiento $\overrightarrow{\Delta r} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$



Vectores posición y velocidad

En componentes, damos el ***vector posición***:

$$\vec{\boldsymbol{r}} = x\hat{\boldsymbol{\imath}} + y\hat{\boldsymbol{\jmath}} + z\widehat{\boldsymbol{k}}$$

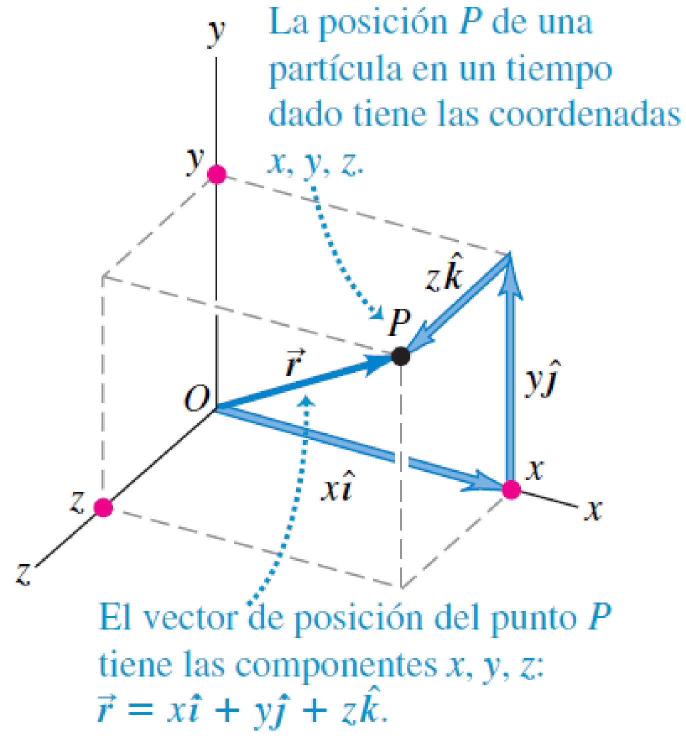
Si al cabo de Δt se ha desplazado, definimos la ***velocidad media:***

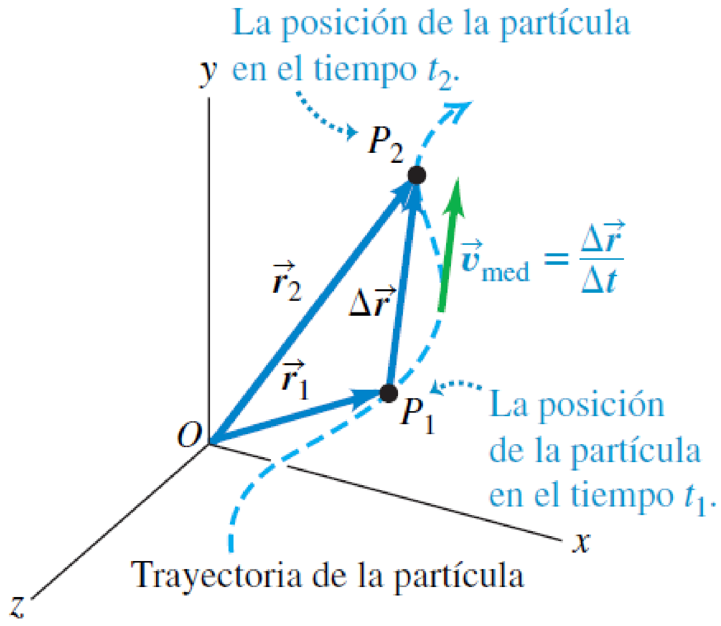
$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\text{med}} = \frac{\vec{\boldsymbol{r}}_f - \vec{\boldsymbol{r}}_i}{t_f - t_i} = \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\Delta r}}}{\Delta t}$$

Por otro lado, la ***rapidez media*** sigue siendo un escalar: cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo transcurrido. No siempre coincide con el módulo de la velocidad media.

De igual manera definimos la ***velocidad instantánea***:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\boldsymbol{\Delta r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$$





Velocidad instantánea

De igual manera definimos la ***velocidad instantánea***:

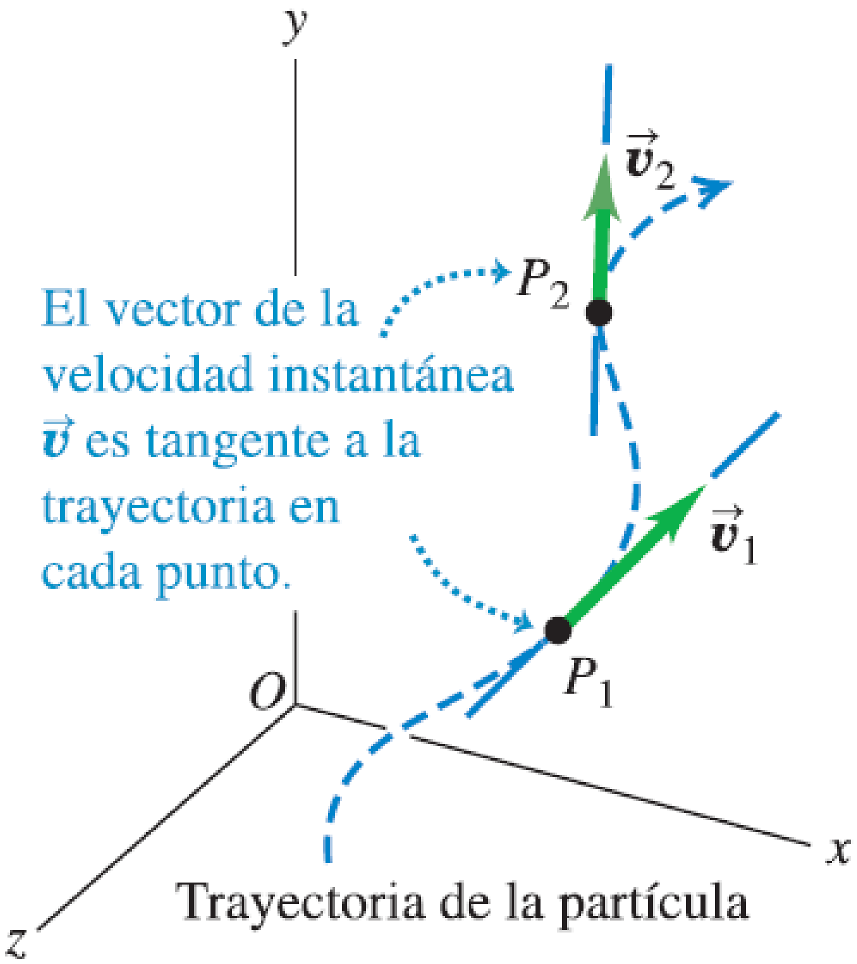
$$\vec{\boldsymbol{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta \boldsymbol{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\boldsymbol{r}}}{dt}$$

En componentes escribimos:

$$\vec{\boldsymbol{v}} = v_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + v_z \widehat{\boldsymbol{k}} = \frac{dx}{dt}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{dy}{dt}\hat{\boldsymbol{\jmath}} + \frac{dz}{dt}\widehat{\boldsymbol{k}}$$

Su magnitud nos da la ***rapidez instantánea*** en cada instante de la trayectoria:

$$|\vec{\boldsymbol{v}}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$



El cualquier punto de la trayectoria, el vector velocidad es tangente a la trayectoria en ese punto, y su sentido es el del movimiento.

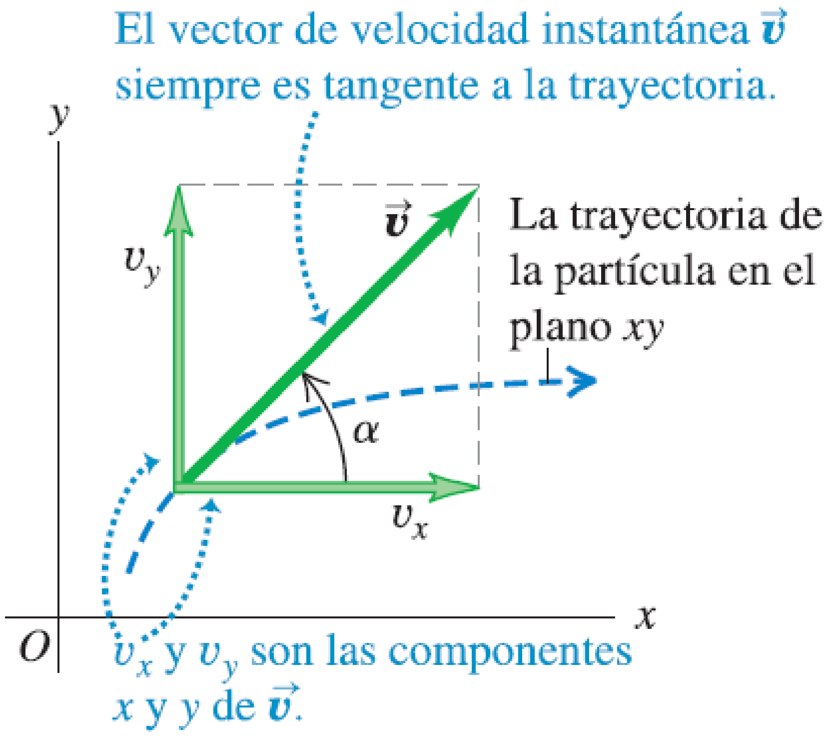
Velocidad instantánea: 2D

En el caso bidimensional, la rapidez viene dada por:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

Y la dirección de la velocidad instantánea en 2D está dada por el ángulo α

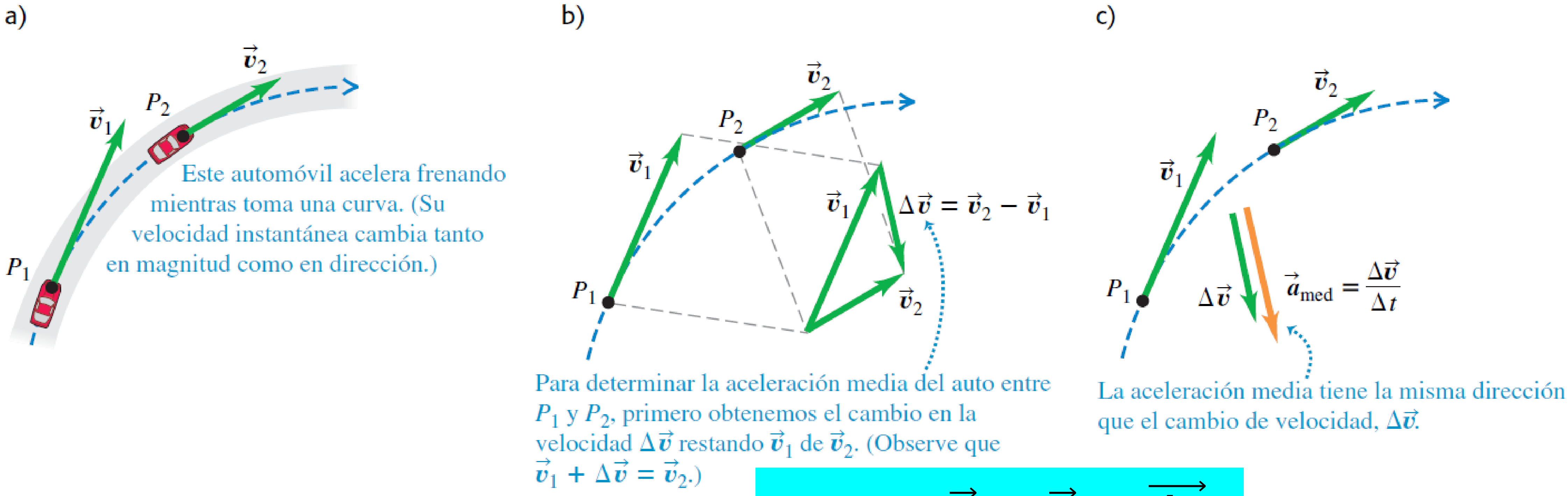
$$\alpha = \arctan\frac{v_y}{v_x}$$



Vector aceleración

La aceleración *describe cómo cambia la velocidad*. ¿Qué tipo de cambios?

Usualmente pensamos en aumento (o disminución) de su módulo (rapidez). Pero también, puede ser un cambio de dirección.



Definimos la ***aceleración media:***

$$\vec{a}_{\text{med}} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t}$$

Vector aceleración

Definimos análogamente la **aceleración instantánea:**

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}$$

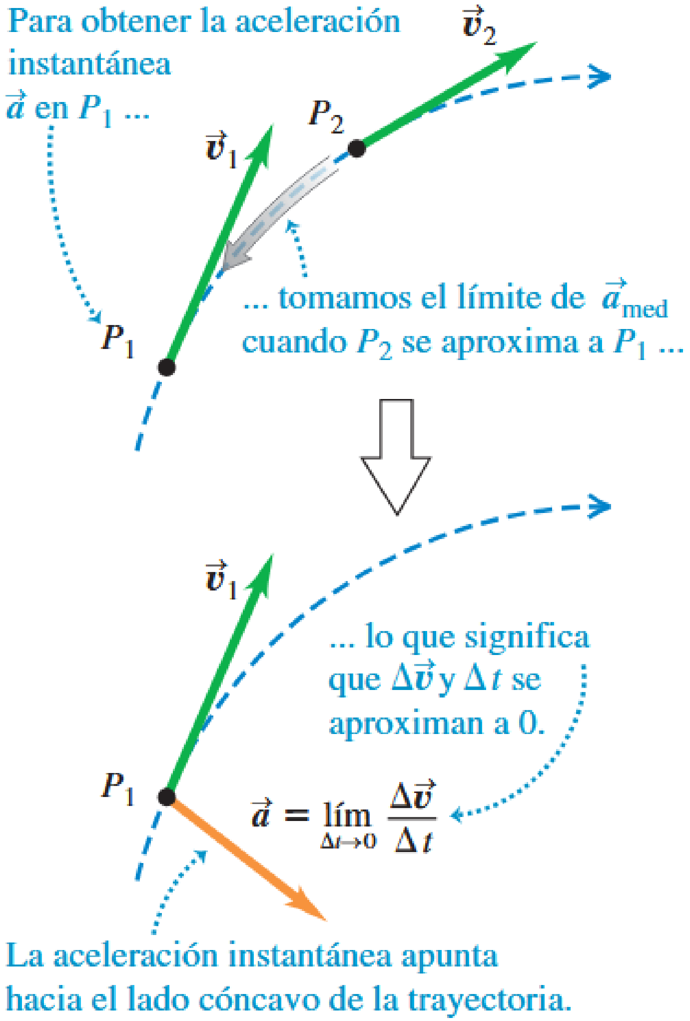
Que podemos descomponer igual que la velocidad:

$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k}$$

ATENCIÓN: el vector $\vec{a}$ *no tiene porque ser tangente a la trayectoria.*

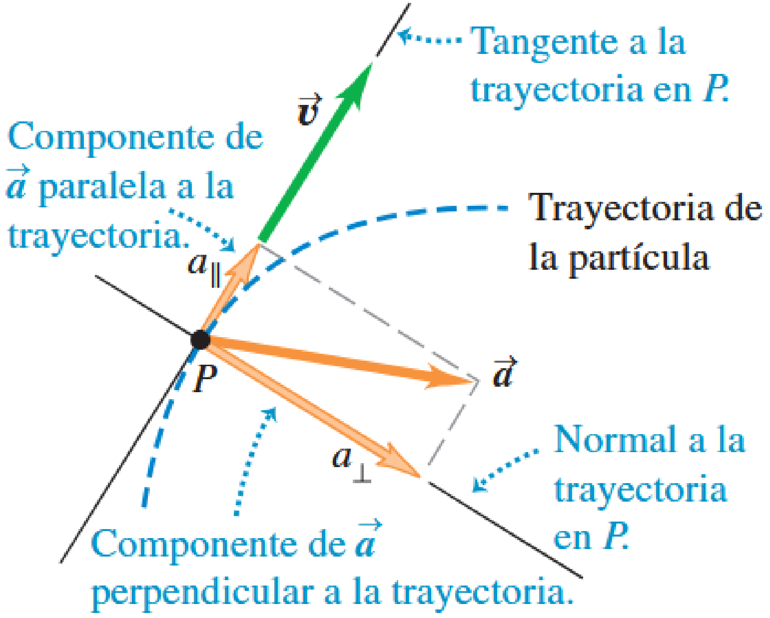
Si la trayectoria es curva, apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria *(interior de la curva descrita por la partícula).* ***Solo es tangente si el movimiento es rectilíneo.***

¡TODA PARTÍCULA QUE SIGUE UNA TRAYECTORIA CURVA ESTÁ ACELERANDO!



Componentes perpendicular y paralela de la aceleración

Es útil descomponer el vector aceleración en términos de **una componente paralela $\vec{a}_{\parallel}$ (tangencial) a la trayectoria** de la partícula y otra **componente perpendicular $\vec{a}_{\perp}$ a la trayectoria (y a $\vec{v}$).**



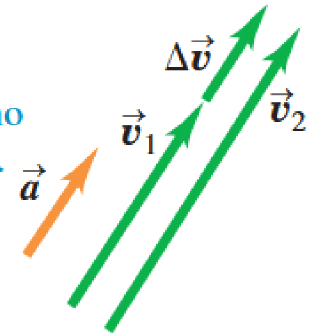
Estas dos componentes son interesantes porque:

- *La **componente paralela** determina los **cambios en la rapidez** de la partícula*
- *La **componente perpendicular** determina los **cambios en la dirección del movimiento** de la partícula*

a)

Aceleración paralela a la velocidad de la partícula:

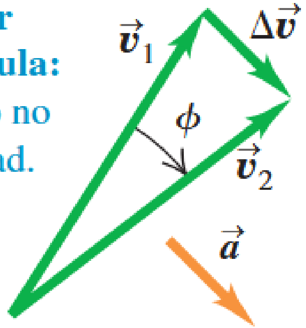
- La *magnitud* cambia, pero no la *dirección* de la velocidad.
- La partícula se mueve en línea recta con rapidez cambiante.



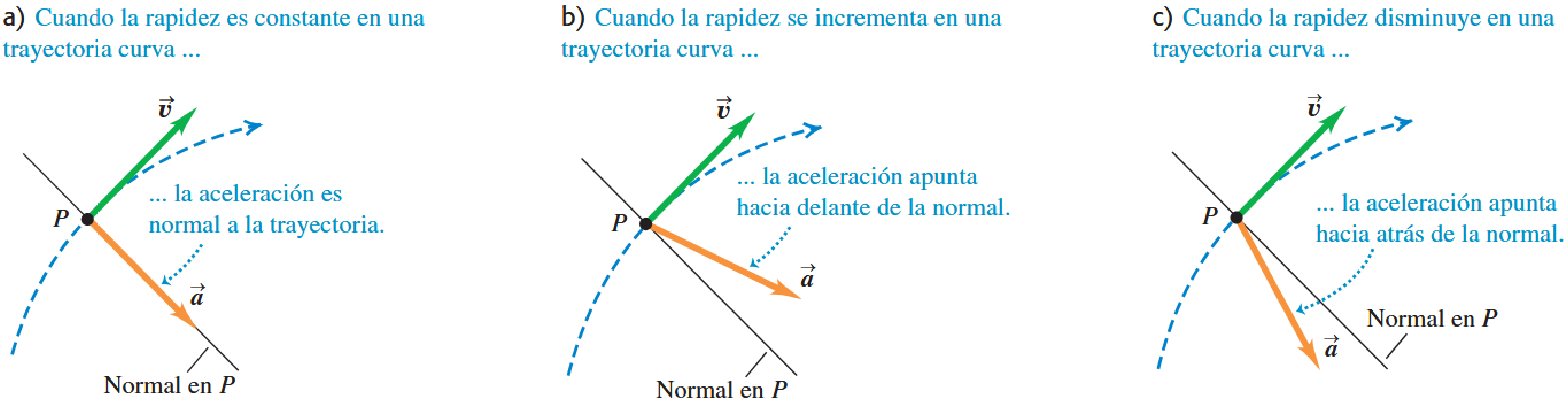
b)

Aceleración perpendicular a la velocidad de la partícula:

- La *dirección* cambia, pero no la *magnitud* de la velocidad.
- La partícula se mueve en una curva con rapidez constante.



Comentarios



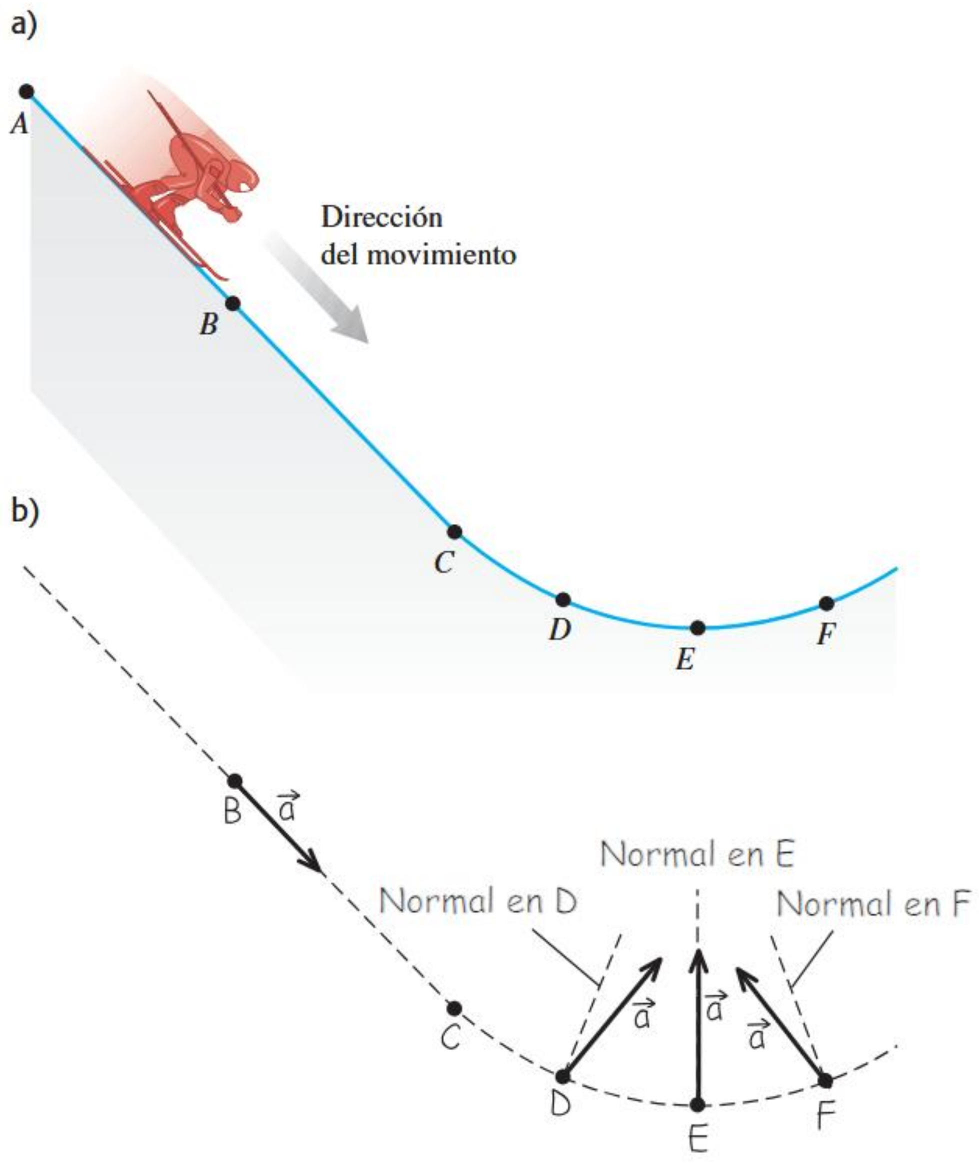
ATENCIÓN Un objeto puede acelerar en diferentes formas:

- La magnitud de su vector velocidad (rapidez) puede cambiar en el tiempo
- La dirección de su vector velocidad puede cambiar en el tiempo
- Tanto la magnitud como la dirección de la velocidad pueden cambiar en el tiempo

Ejemplo

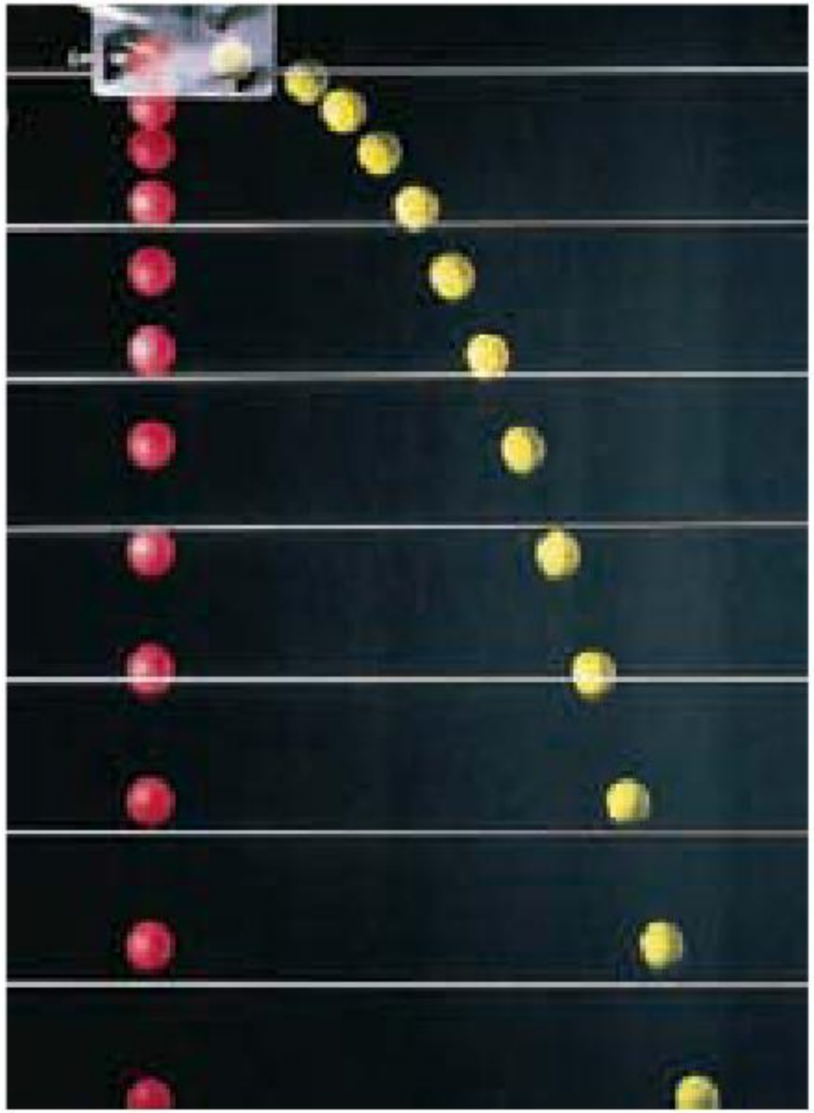
EJEMPLO CONCEPTUAL 3.4 YF

Una esquiadora se mueve sobre una rampa de salto, como se muestra en la figura. La rampa es recta entre A y C, y es curva a partir de C. La rapidez de la esquiadora aumenta al moverse pendiente debajo de A hasta E, donde su rapidez es máxima, disminuyendo a partir de ahí. Dibuje la dirección del vector de aceleración en los puntos B, D, E y F.



Movimiento de proyectiles

Veamos particular de movimiento en dos dimensiones, en el plano *xy*, *bajo aceleración constante, **la gravitatoria**.* Se trata del **movimiento de un proyectil** – cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional (y la resistencia del aire)*.



Si omitimos efectos de resistencia del aire, variaciones de *g* con la altura y efectos debidos a la rotación de la Tierra, la trayectoria que describe un proyectil es una **parábola.**

La clave del análisis del movimiento de proyectiles es que *podemos tratar por separado las coordenadas x e y*. La **componente *x* de la aceleración es cero**, y la **componente y es constante** e igual a ***–g***.

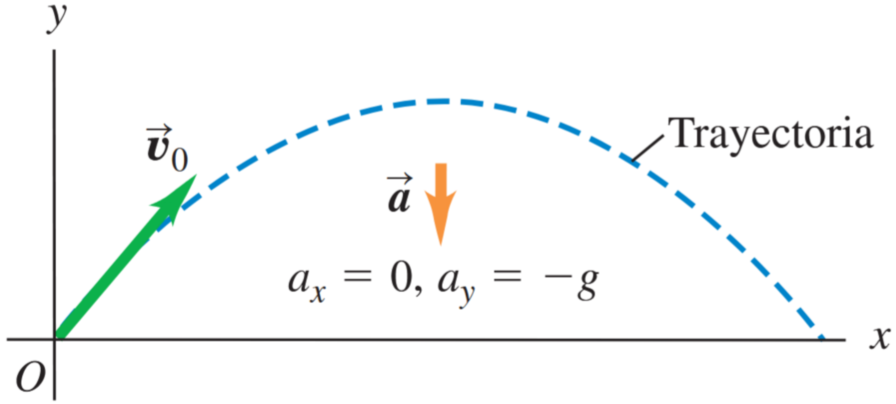
Movimiento de proyectil

"Podemos analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante."

¿Cómo modelamos?

- Proyectil como partícula
- Aceleración constante (vertical hacia abajo, magnitud $-g$)
- Ignoramos resistencia del aire, rotación de la Tierra y otros efectos

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que contiene el vector de velocidad inicial $\vec{v}_0$.
- Su trayectoria depende sólo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.



El movimiento del proyectil siempre se limita a un plano vertical, determinado por la dirección de la velocidad inicial. La aceleración gravitatoria es exclusivamente vertical y no puede acelerar al proyectil de forma lateral.
El **movimiento es bidimensional**.

Movimiento de proyectil: ecuaciones

Movimiento de proyectil = objeto avanza horizontalmente + caída libre verticalmente

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \quad \text{(movimiento de proyectil, sin resistencia del aire)}$$

El movimiento de proyectil se puede entender como la combinación de

- un **movimiento horizontal con velocidad constante y**,
- un **movimiento vertical con aceleración constante (caída libre)**

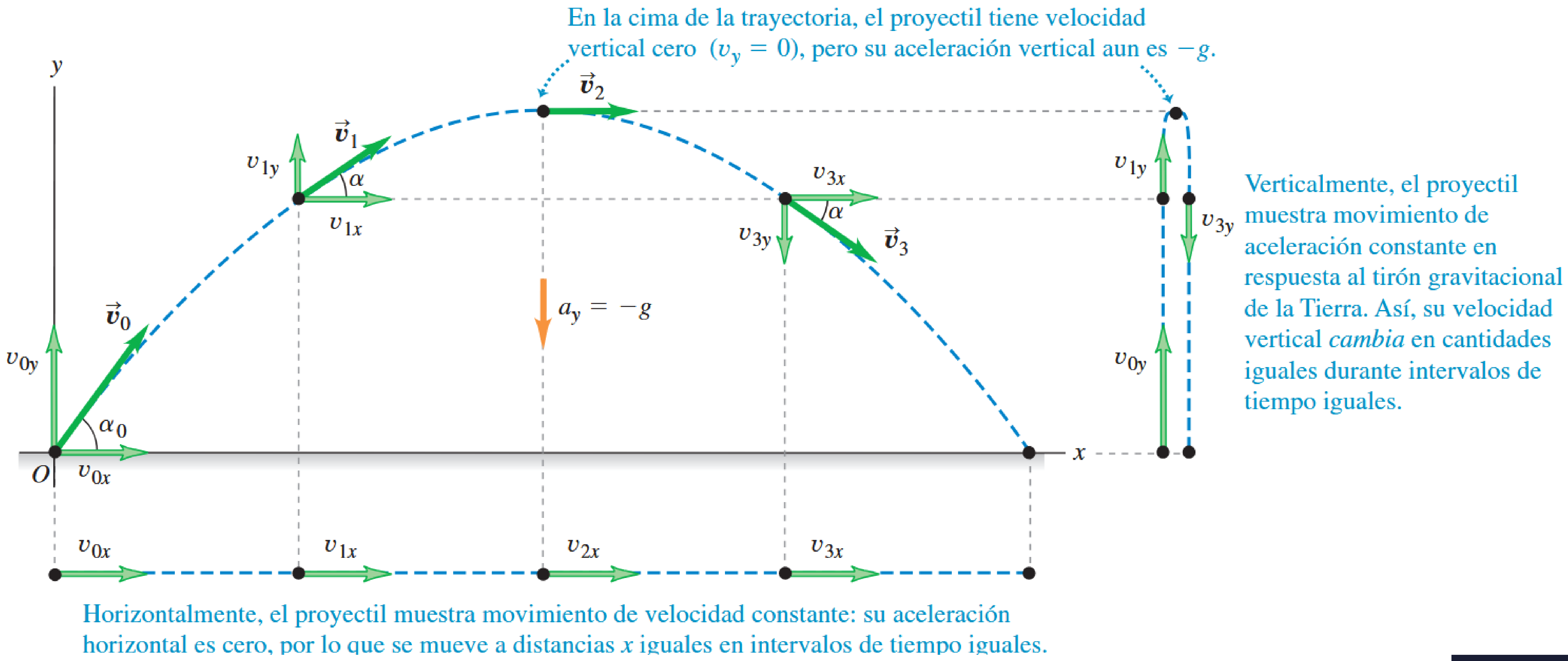
Luego sus ecuaciones de movimiento son:

$$v_x = v_{0x}$$
$$x = x_0 + v_{0x} t$$

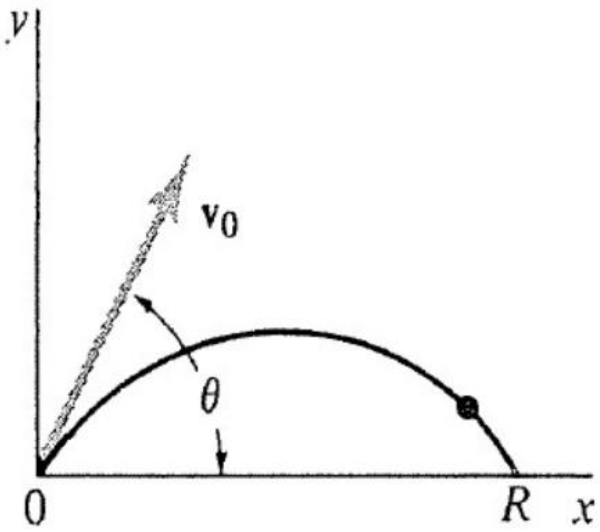
$$v_y = v_{0y} - gt$$
$$y = y_0 + v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

En ocasiones es útil escoger la posición inicial ($t = 0$) como $x_0 = y_0 = 0$

Movimiento de proyectil: trayectoria parabólica



Movimiento de proyectil: alcance



Deduciremos las ecuaciones vinculadas al alcance y altura máxima de un proyectil *cuya altura de partida y llegada son iguales.*

ALTURA MÁXIMA: se alcanza cuando la *velocidad vertical se anula*

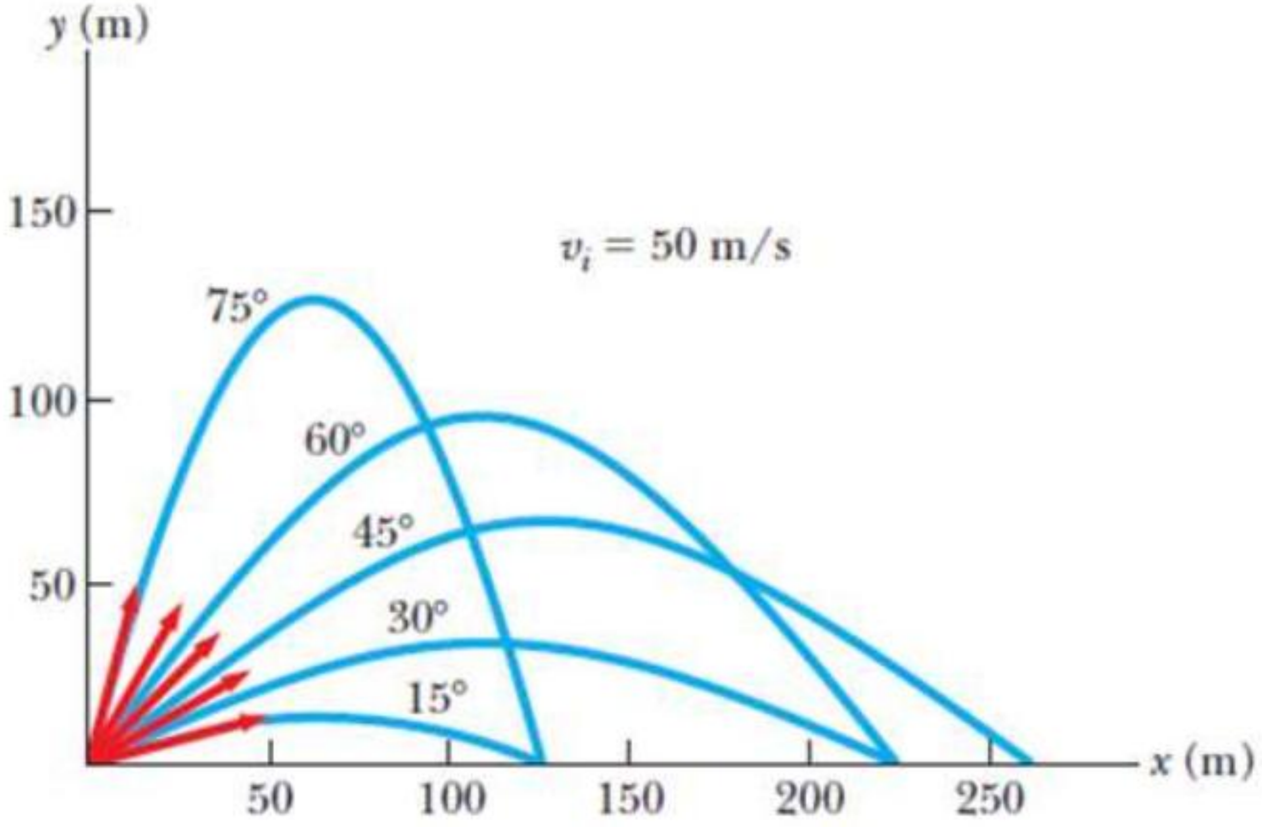
$$t^* = \frac{v_0 \sin\theta}{g} \rightarrow h_{\text{máx}} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

ALCANCE: como el tiempo de subida es igual al de bajada, el tiempo de vuelo es $2t^*$ entonces

$$R = 2\frac{v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta$$

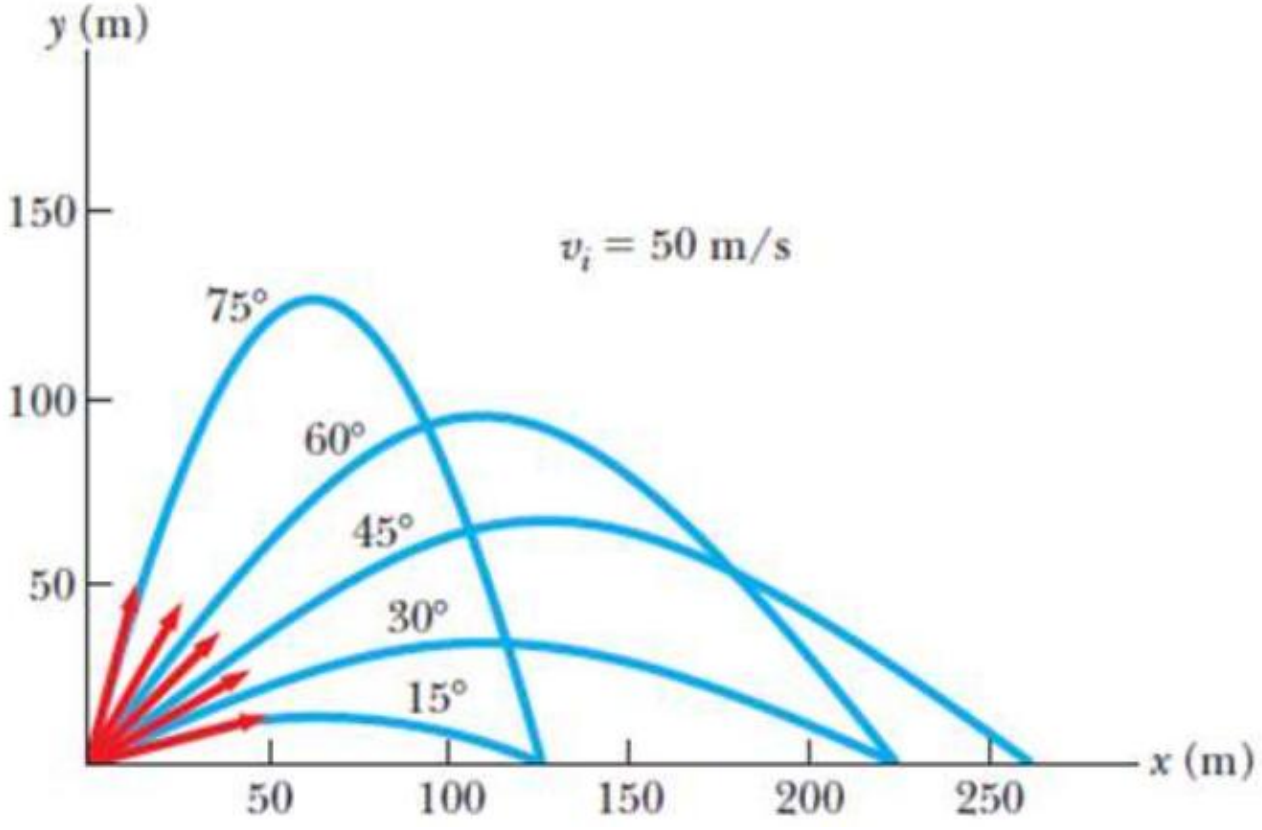
Pregunta rápida

Ordene los ángulos de lanzamiento para las cinco trayectorias de la figura respecto al tiempo de vuelo, desde el tiempo de vuelo más corto al más largo.



Pregunta rápida

Ordene los ángulos de lanzamiento para las cinco trayectorias de la figura respecto al tiempo de vuelo, desde el tiempo de vuelo más corto al más largo.



Respuesta: El tiempo de vuelo estará dado por la componente vertical de la velocidad inicial, cuanto mayor sea, mayor será el tiempo de vuelo. Por tanto a mayor ángulo, mayor tiempo de vuelo.

Movimiento de proyectil: alcance

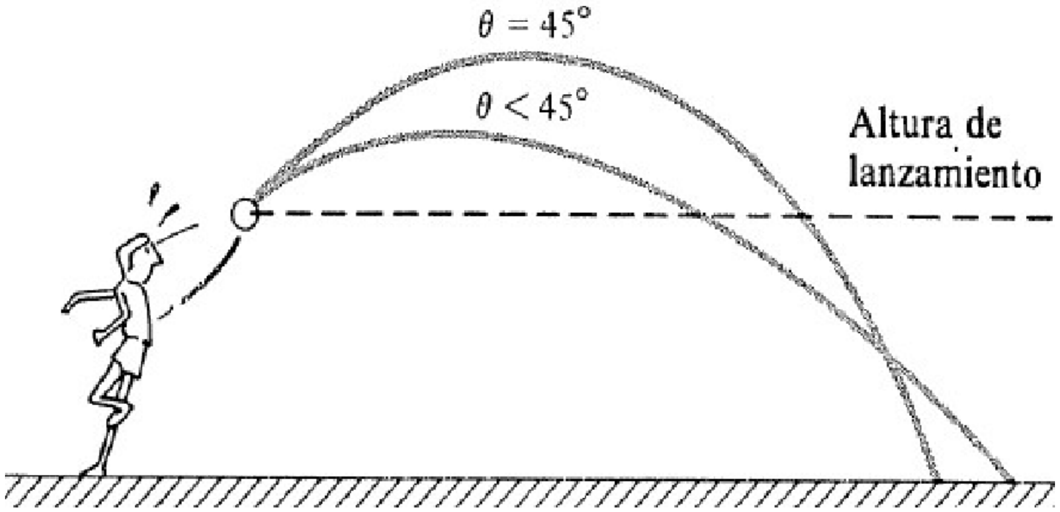
La expresión que hemos hallado para el alcance partiendo y llegando con igual altura, $R = 2\frac{v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta$, es máxima para $\theta_0 = 45°$.

OJO: SOLO si las alturas inicial y final coinciden, el alcance máximo se da para $\boldsymbol{\theta_0 = 45°}$

$$\theta_{\text{máx}} = \arctan\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}$$

$$R_{\text{máx}} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

Con h (-) la diferencia de alturas ($h = y_i - y_f$)

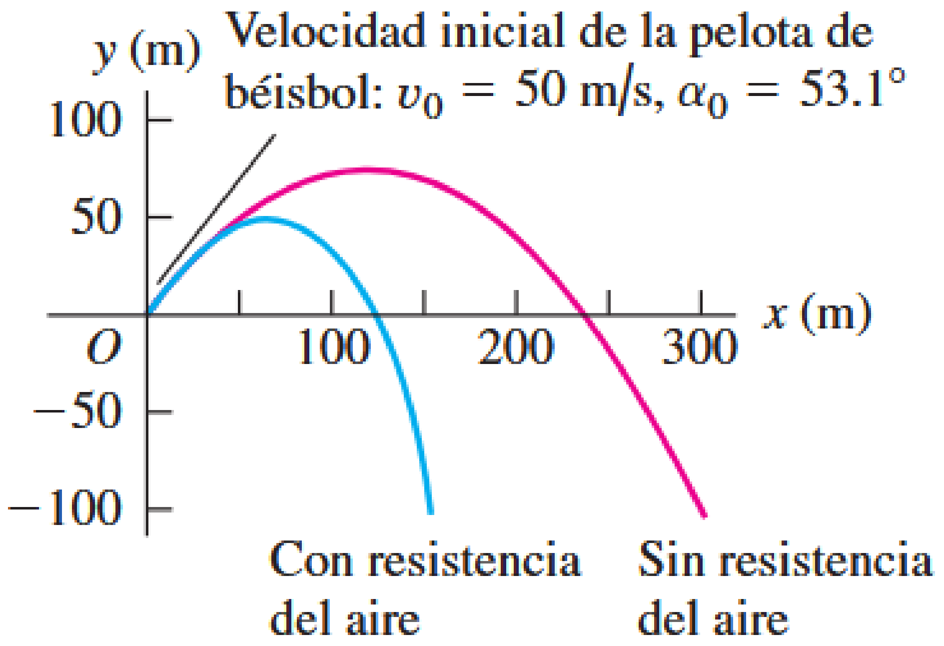


Movimiento de proyectil: resistencia del aire

Cuando la resistencia del aire no es insignificante y debe incluirse, calcular la trayectoria se vuelve mucho más complicado; los efectos de dicha resistencia dependen de la velocidad, por lo que la aceleración ya no es constante.

Para proyectiles ligeros y rápidos se modela **la resistencia como proporcional al cuadrado de la velocidad.**

3.20 La resistencia del aire tiene un efecto acumulativo considerable sobre el movimiento de una pelota de béisbol. En esta simulación, permitimos que la pelota caiga por debajo de la altura desde la cual se lanzó (por ejemplo, la pelota podría haberse lanzado desde un acantilado).



Más preguntas rápidas

1)

Un proyectil se mueve en una trayectoria parabólica sin resistencia del aire. ¿Hay algún punto en que su aceleración y velocidad sean paralelas? ¿Y perpendiculares?

2)

En el instante en que usted dispara una bala horizontalmente con un rifle, deja caer otra bala desde la altura del cañón. Si no hay resistencia del aire, ¿qué bala llegará primero al suelo?

3)

Se dispara un proyectil hacia arriba con un ángulo θ por encima de la horizontal con una rapidez inicial v_0. Al llegar a su máxima altura, ¿cuáles son su vector velocidad, su rapidez y su vector aceleración?