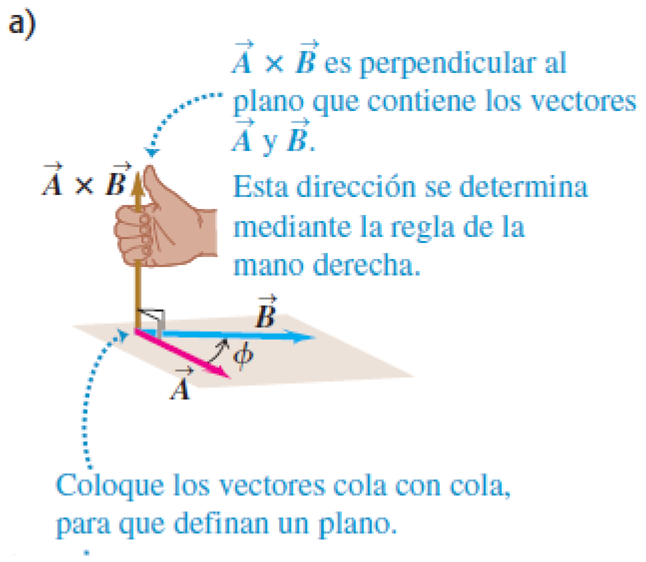
11- EQUILIBRIO ESTÁTICO

Repaso: ¿de qué hablaron la clase pasada?

- **Producto vectorial**
- **Estática, sólido rígido, torque**
- **Torque:**
  - Cálculo
  - Brazo de palanca
  - 3 formas de calcularlo
- **Equilibrio:**
  - Condiciones

REPASO

Producto vectorial



Es una nueva forma de *operar con vectores.* Nos da un **nuevo vector** $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ cuyo módulo es $AB \sin\theta$ y su dirección es perpendicular al plano dado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$, dando su sentido la *regla de la mano derecha.*

Entre versores unitarios:

$$\hat{\imath} \times \hat{\imath} = \hat{\jmath} \times \hat{\jmath} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{\imath} \times \hat{\jmath} = -\hat{\jmath} \times \hat{\imath} = \hat{k}$$
$$\hat{\jmath} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{\jmath} = \hat{\imath}$$
$$\hat{k} \times \hat{\imath} = -\hat{\imath} \times \hat{k} = \hat{\jmath}$$

Recordar:

- **Anticonmutativo:** $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$
- El producto vectorial de vectores **paralelos es nulo**
- El producto vectorial de vectores **perpendiculares es de módulo** AB
- Es **distributivo respecto a la suma**: $\vec{C} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{B}$

Definiciones

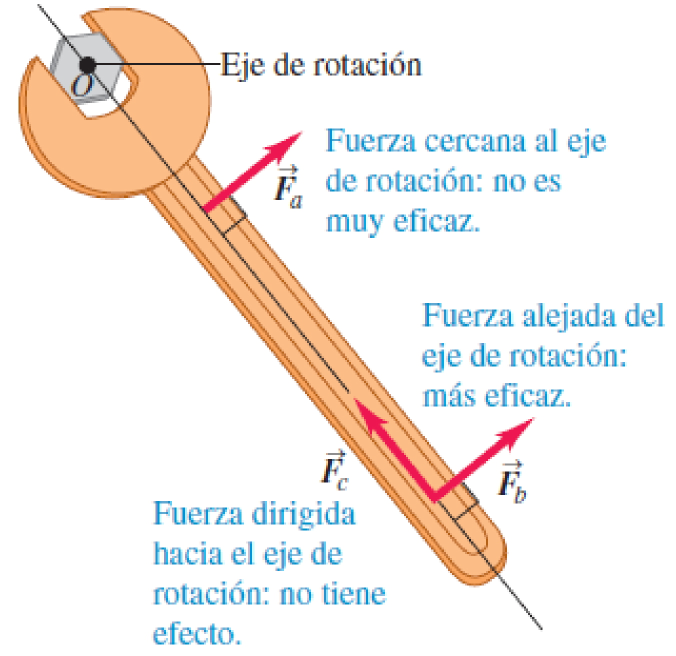
ESTÁTICA: estudio de las fuerzas que actúan sobre un objeto que está en equilibrio (sin aceleración ni movimiento de rotación) y en reposo.

SÓLIDO RÍGIDO: modelo de objeto ideal que ocupa un lugar en el espacio y que no cambia su forma ni su tamaño al ser sometido a diferentes esfuerzos.

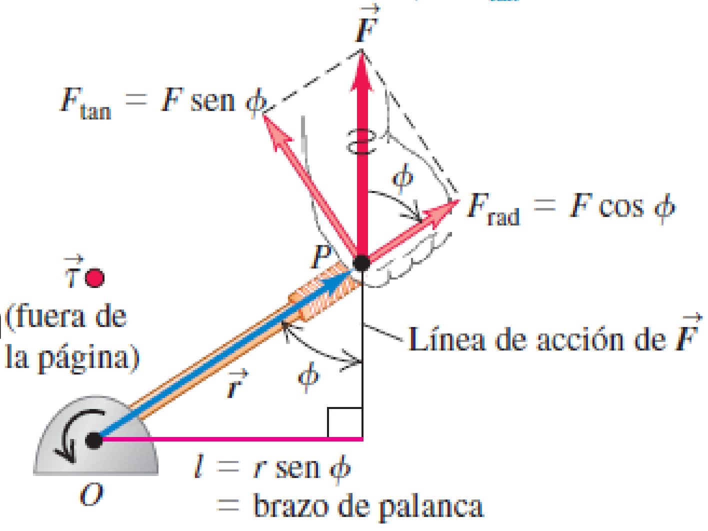
TORQUE: medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para provocar o modificar el movimiento de rotación de un cuerpo. Es una magnitud vectorial.

El **torque** $\vec{\tau}$ de una fuerza $\vec{F}$ depende de la posición $\vec{r}$ en que esta se aplica respecto a un punto de referencia *P*. Su módulo vale

$$\tau = rF\sin\phi$$

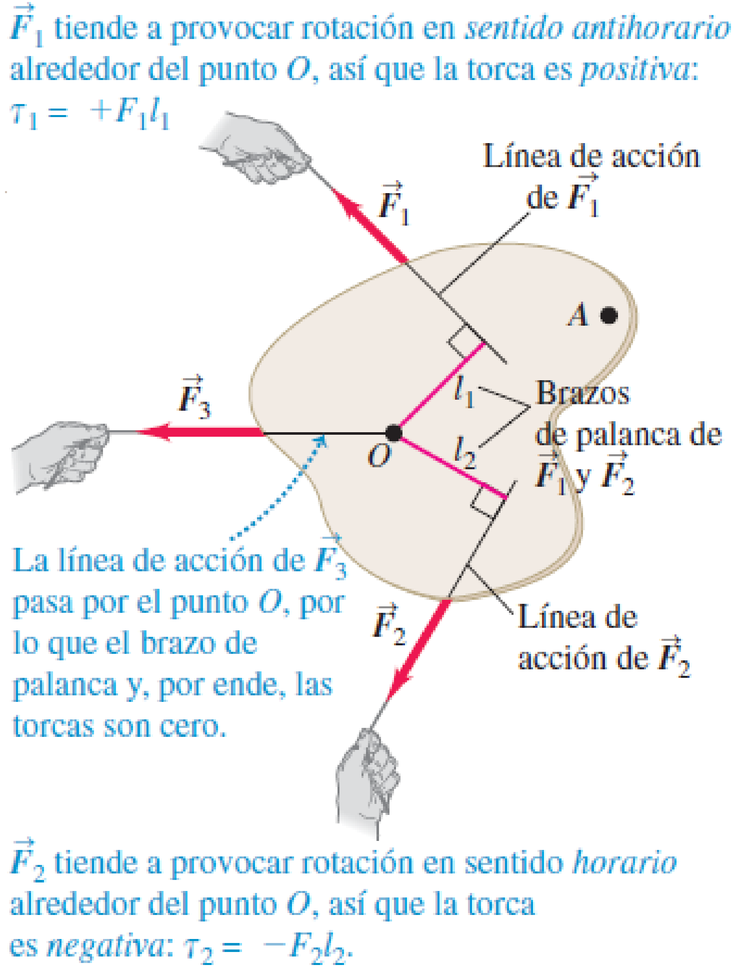


Tres formas de calcular la torca:
$\tau = Fl = rF \text{ sen } \phi = F_{tan} r$



REPASO

Torque



La tendencia de $\vec{F}$ a causar una rotación alrededor de *O* depende de su **magnitud** F y también de la *distancia perpendicular* l **entre el punto *O*** y la **línea de acción** de la fuerza (la línea sobre la que está el vector de fuerza).

Llamamos a *l* el **brazo de palanca** de $\vec{F}$ alrededor de *O*.

Usamos la letra griega τ (tau minúscula) para el torque.

Este se define como el **producto vectorial** entre el vector $\vec{r}$ que va desde el punto de referencia *O* al punto de aplicación *P* y la fuerza $\vec{F}$

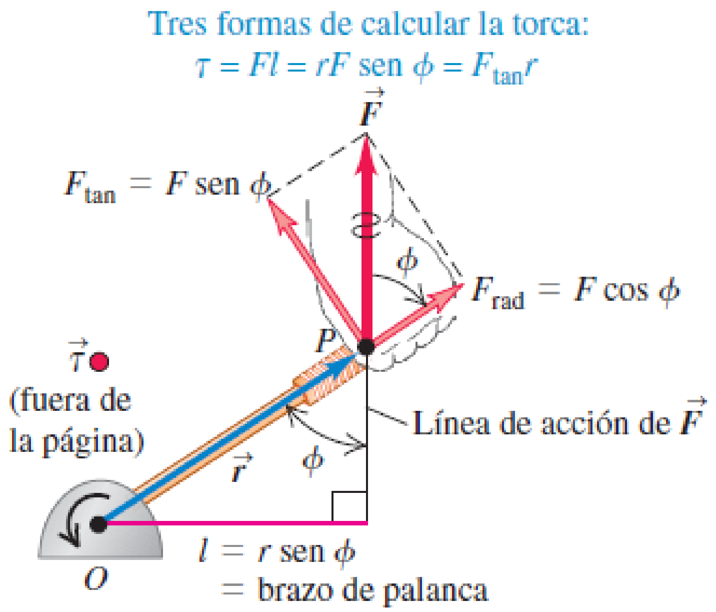
$$\boxed{\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}}$$

Cuidado: el torque se mide siempre respecto a un punto. Si cambiamos el punto de referencia *O*, el torque de cada fuerza cambia

REPASO

REPASO

Torque: ¿cómo lo calculamos?



Tenemos tres formas de calcular el torque:

1. Determinar el brazo de palanca l y usar $\tau = Fl$
2. Calcular el ángulo ϕ entre $\vec{r}$ y $\vec{F}$ y usar $\tau = rF \sin \phi$
3. Descomponer la fuerza y hallar su componente tangencial, luego usar $\tau = rF_{\text{tan}}$

En resumen: $\tau = Fl = rF \sin \phi = rF_{\text{tan}}$

Hay que elegir un sentido positivo de giro (usualmente, se toma el antihorario). De esta manera **podemos sumar y restar torques**.

La unidad del torque es el **newton-metro** (como no es una energía, de hecho es un vector, no lo expresamos en joules)

Para anotarlo en diagramas, se utiliza una $\otimes$ **cuando los torque son entrantes** y $\odot$ **para torques salientes** (al plano de la hoja, pizarrón, etc).

Equilibrio

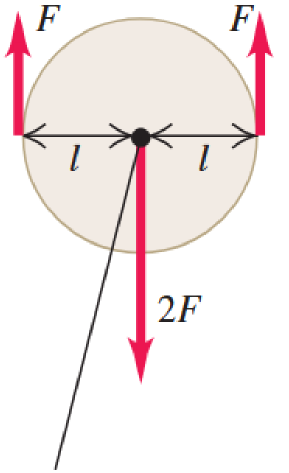
REPASO

Hay dos condiciones para el **equilibrio**, necesarias y suficientes

1. **Equilibrio de traslación:** $\sum \vec{F} = 0$
2. **Equilibrio de rotación:** $\sum \vec{\tau} = 0$ (respecto a cualquier punto)

Si se cumplen, el objeto está en **equilibrio.** Si está en reposo, **equilibrio estático,** pero las mismas condiciones valen para rígidos con *traslación* uniforme (sin rotación). No alcanza con que la **suma de fuerzas sobre el objeto sea nula**, también es necesario que la **suma de los torques respecto a cualquier punto lo sea**.

a) Este cuerpo está en equilibrio estático.

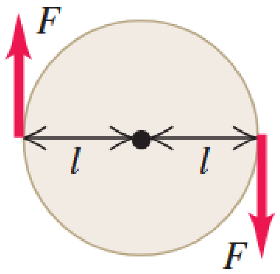


Condiciones de equilibrio:

primera condición satisfecha: fuerza total = 0, así que un cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a moverse como un todo.

Segunda condición satisfecha: la torca total alrededor del eje = 0, así que un cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a moverse como un todo.

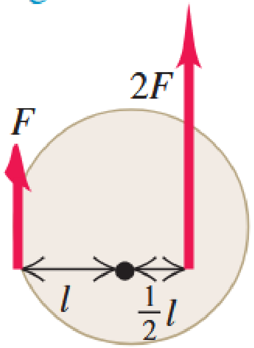
b) Este cuerpo no tiene la tendencia a acelerar como un todo, pero tiene una tendencia a empezar a girar.



Primera condición satisfecha: fuerza total = 0, así que un cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a moverse como un todo.

Segunda condición NO satisfecha: hay una torca total en sentido horario alrededor del eje, así que el cuerpo en reposo empezará a girar en sentido horario.

c) Este cuerpo tiene la tendencia a acelerar como un todo, pero no tiene una tendencia a empezar a girar.

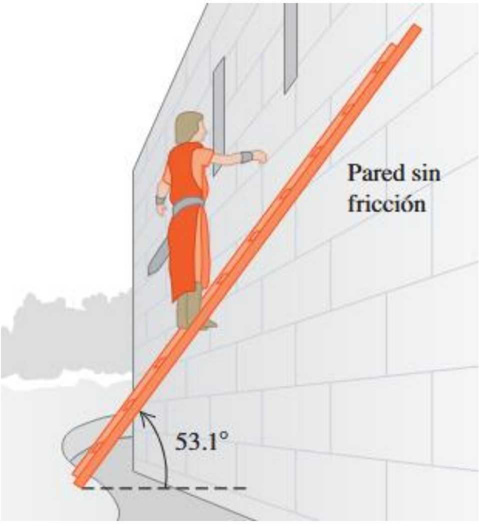


Primera condición NO satisfecha: hay una fuerza neta hacia arriba, así que un cuerpo en reposo empezará a moverse hacia arriba.

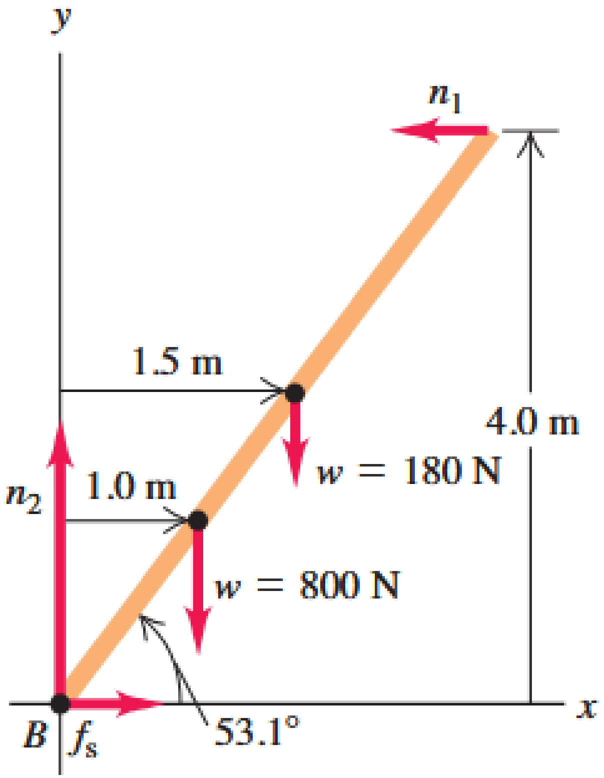
Segunda condición satisfecha: la torca total alrededor del eje = 0 así que el cuerpo en reposo no tiene la tendencia a empezar a girar.

Ejemplo: equilibrio estático

Ejemplo 11.3 YF (similar Ejercicio 3.13)



Sir Lancelot está tratando de rescatar a Lady Elayne del Castillo von Doom subiendo por una escalera uniforme de 5.0 m de longitud que pesa 180 N. Lancelot, quien pesa 800 N, se detiene después de subir un tercio de la escalera. La base de la escalera descansa en una cornisa de piedra horizontal y se recarga al otro lado del foso en equilibrio contra una pared vertical, que no tiene fricción a causa de una gruesa capa de musgo. La escalera forma un ángulo de 53.1° con la horizontal, siendo así la hipotenusa de un triángulo rectángulo 3-4-5.



a) Calcule las fuerzas normal y de fricción que actúan sobre la base de la escalera.

b) Obtenga el coeficiente de fricción estática mínimo que evita un deslizamiento en la base de la escalera.

c) Calcule la magnitud y la dirección de la fuerza de contacto que actúa sobre la base de la escalera.

d) Comparación con 3.13

¿Qué trabajaremos hoy?

Centro de gravedad

Tipos de equilibrio

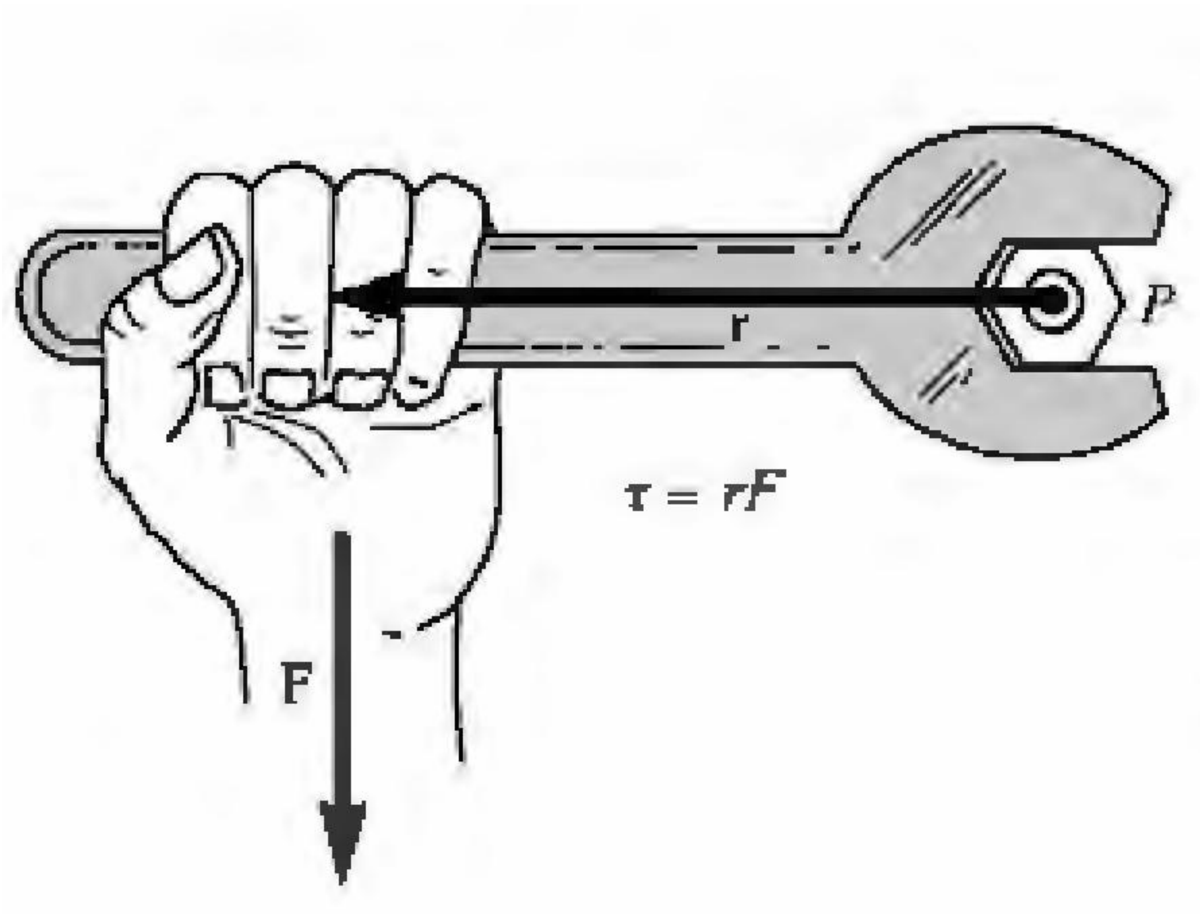
Estabilidad y equilibrio

- Distintos casos

Palanca y ventaja mecánica

Mandíbulas de animales

Centro de gravedad de seres humanos

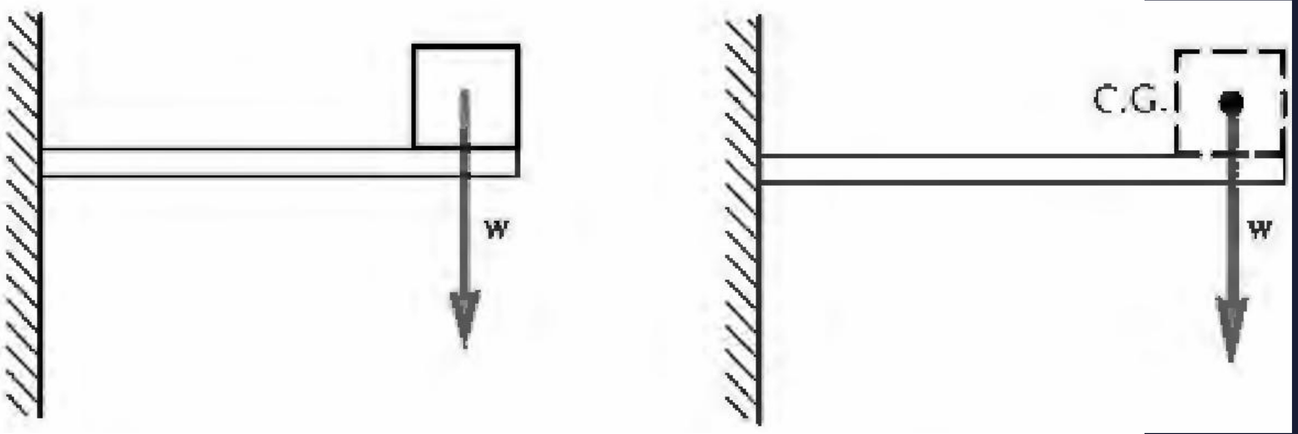


Centro de gravedad

En la **mayoría de los problemas de equilibrio**, una de las fuerzas que actúa sobre un cuerpo es su **peso**. ¿Dónde se aplica?

El peso no actúa en un solo punto; se distribuye en todo el cuerpo.

Centro de gravedad (C.G): Punto en el cual se puede considerar aplicado el peso w del cuerpo, de modo que el torque con respecto a cualquier punto producido por el peso así aplicado, es el mismo que el efecto que produce el peso distribuido en todo el cuerpo



El C.G. representa el ***punto donde se puede considerar concentrado todo el peso***. En los objetos simétricos y densidad uniforme coinciden con sus centros geométricos.

Cuando un cuerpo sobre el que actúa la gravedad se apoya en un solo punto o se cuelga de éste, el centro de gravedad siempre está directamente arriba o abajo de dicho punto de suspensión.

Centro de gravedad: determinación experimental

Si un objeto está suspendido por un punto P_1, está en reposo cuando su C.G. está situado en la vertical que pasa por P_1. Si suspendemos el objeto por un segundo punto P_2, el C.G. permanece en la vertical que pasa por P_2. El C.G. se encuentra pues en la intersección de estas dos líneas

Figura 12.7 Este soporte de una botella de vino es un sorprendente dispositivo de equilibrio estático. El centro de gravedad del sistema (botella más soporte) está directamente arriba del punto de soporte.

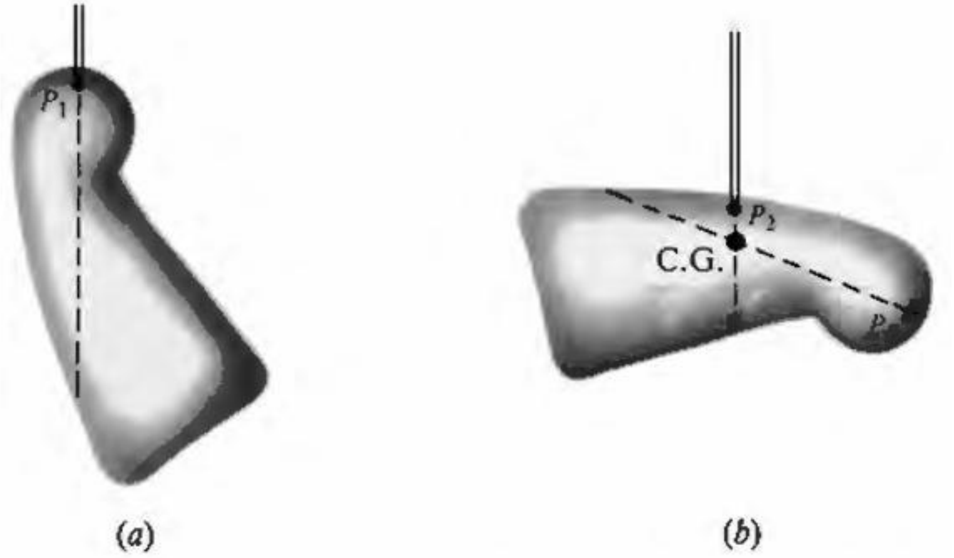
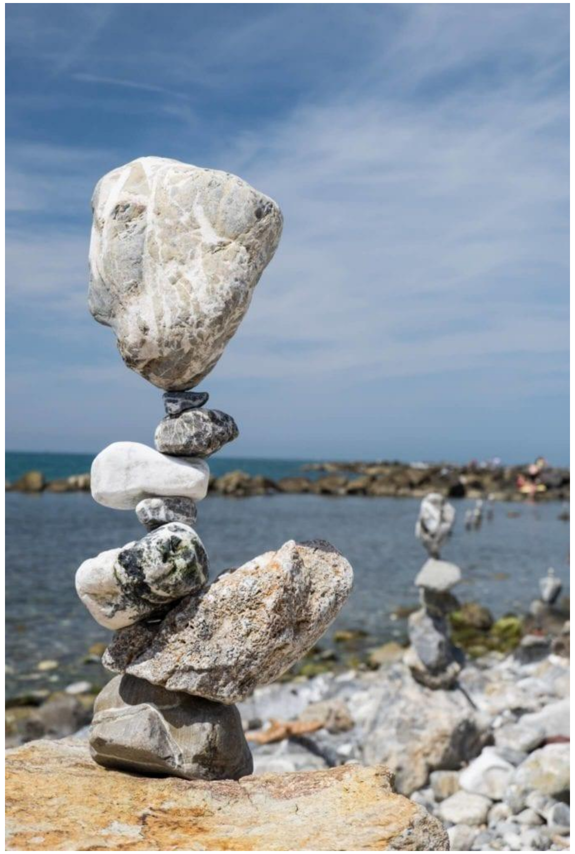


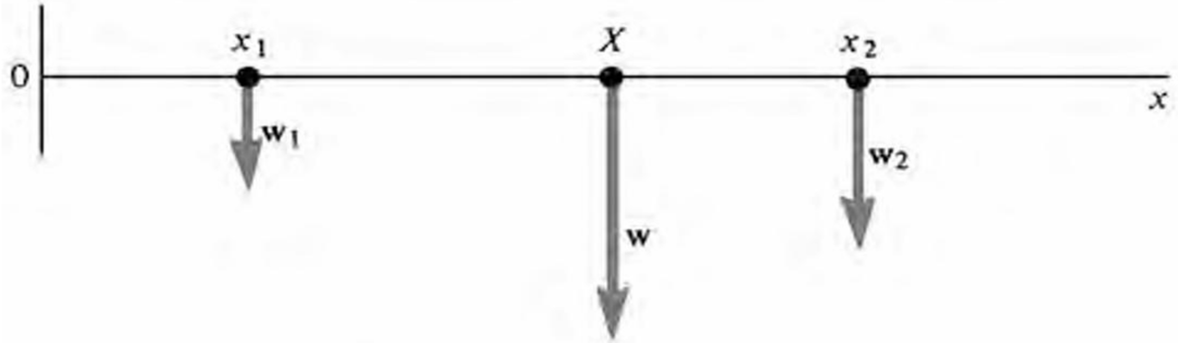
Figura 4.16 (a) El centro de gravedad está en la vertical que pasa por P_1. (b) El C.G. se halla también en la vertical que pasa por P_2, de modo que se encuentra en la intersección de las dos rectas.

Centro de gravedad



Centro de gravedad: determinación analítica

Veamos cómo se determina analíticamente el centro de gravedad. Consideremos ejemplo sencillo, barra sin masa con dos pesos en posiciones x_1 y x_2.



Llegamos a:

$$x_{CG} = \frac{x_1 w_1 + x_2 w_2}{w_1 + w_2}$$

El caso general con múltiples masas es similar y se obtiene:

$$\boxed{x_{CG} = \frac{\sum_i x_i w_i}{\sum_i w_i} \equiv X}$$

OBS: si simplificamos $w_i = m_i g$ en el numerador y denominador, los factores g se compensan. Entonces X se expresa en función de las masas y se denomina **centro de masas (C.M.)**. Si $\vec{g}$ es aproximadamente constante, en dirección y módulo, el **C.G. y el C.M. coinciden**

Centro de gravedad: determinación analítica

El caso general con múltiples masas es similar y se obtiene:

$$x_{CG} = \frac{\sum_i x_i w_i}{\sum_i w_i} \equiv X$$

OBS: si simplificamos $w_i = m_i g$ en el numerador y denominador, los factores g se compensan. Entonces X se expresa en función de las masas y se denomina **centro de masas (C.M.)**. Si $\vec{g}$ es aproximadamente constante, en dirección y módulo, el **C.G. y el C.M. coinciden.**

El procedimiento para hallar el centro de gravedad de *configuraciones más complicadas* es el mismo. Si los pesos se hallan en diversos puntos en un plano, entonces el C.G. se encuentra en un punto (X, Y) del plano. Usamos la ecuación anterior para hallar X y una ecuación análoga para las coordenadas y de los pesos se emplea para obtener Y.

$$X = \frac{\sum_i x_i w_i}{\sum_i w_i} \qquad Y = \frac{\sum_i y_i w_i}{\sum_i w_i}$$

Tipos de equilibrio

Un equilibrio se dice que es **estable** si, al perturbarlo, por sí mismo, vuelve al punto anterior de estabilidad. Un péndulo es un buen ejemplo. Aunque lo alteremos tantas veces como queramos, *siempre retomará el punto de equilibrio*, la vertical.

Un equilibrio se dice que es **inestable** si, al perturbarlo, el objeto se aleja de su posición inicial. Ejemplo, una bolita sobre el polo de una esfera. Una vez apartada, no regresa, *se aleja del punto de equilibrio*.

Un equilibrio se dice que es **indiferente** si, al perturbarlo, no modifica su estado, es decir accede a un nuevo punto de equilibrio. Un libro caído en el suelo es un buen ejemplo. Es *indiferente* a lo que le hagamos.

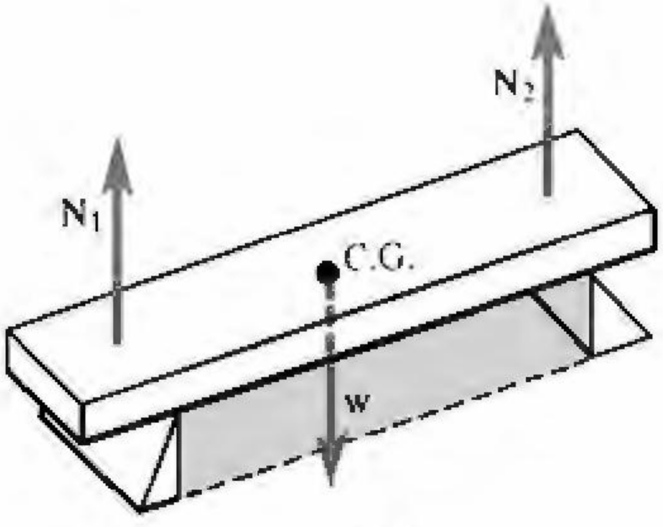
Estabilidad y equilibrio

El número y posición de las patas de un animal quedan determinados, parcialmente, según sus necesidades de estabilidad y de equilibrio.

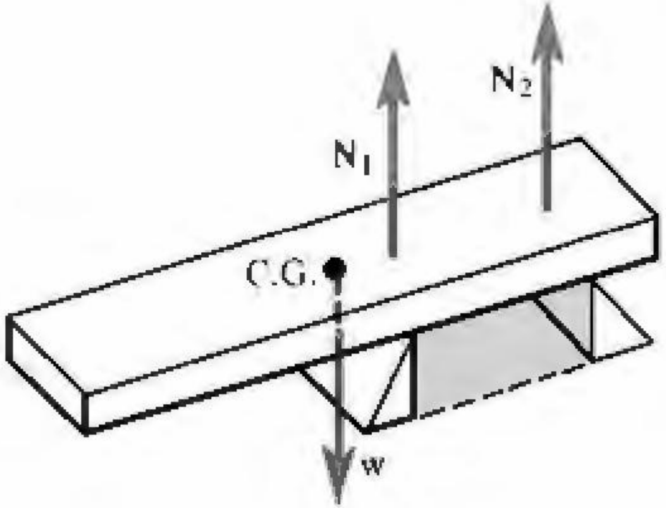
Si su C.G. se halla entre los soportes, los torques entorno al C.G. debidos a $\vec{\tau}_1$ y a $\vec{\tau}_2$ son opuestos y se anulan, y por lo tanto el tablón se halla en equilibrio.

Sin embargo, cuando el centro de gravedad se halla a la izquierda de ambos soportes, los torques de $\vec{\tau}_1$ y $\vec{\tau}_2$ con respecto al C.G. son ambos positivos.

Así, un objeto se halla en equilibrio sólo cuando su centro de gravedad se halla por encima del área de la base definida por sus soportes.



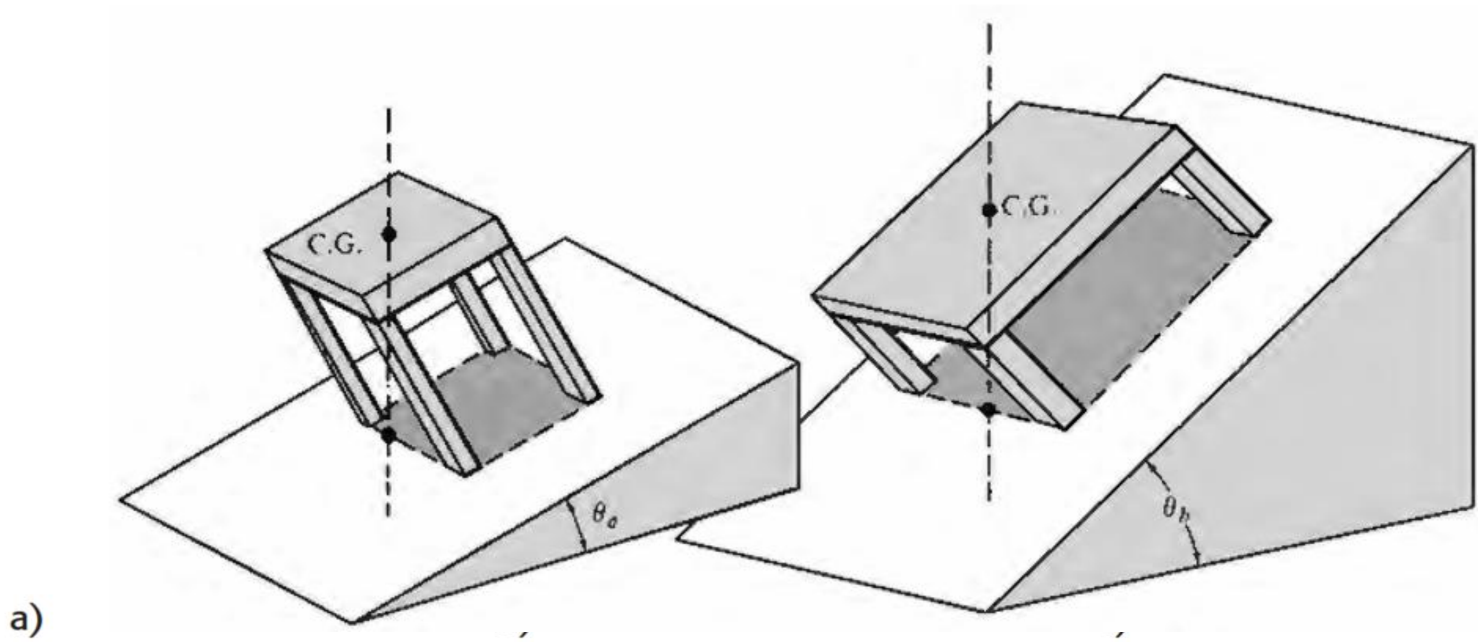
(a)



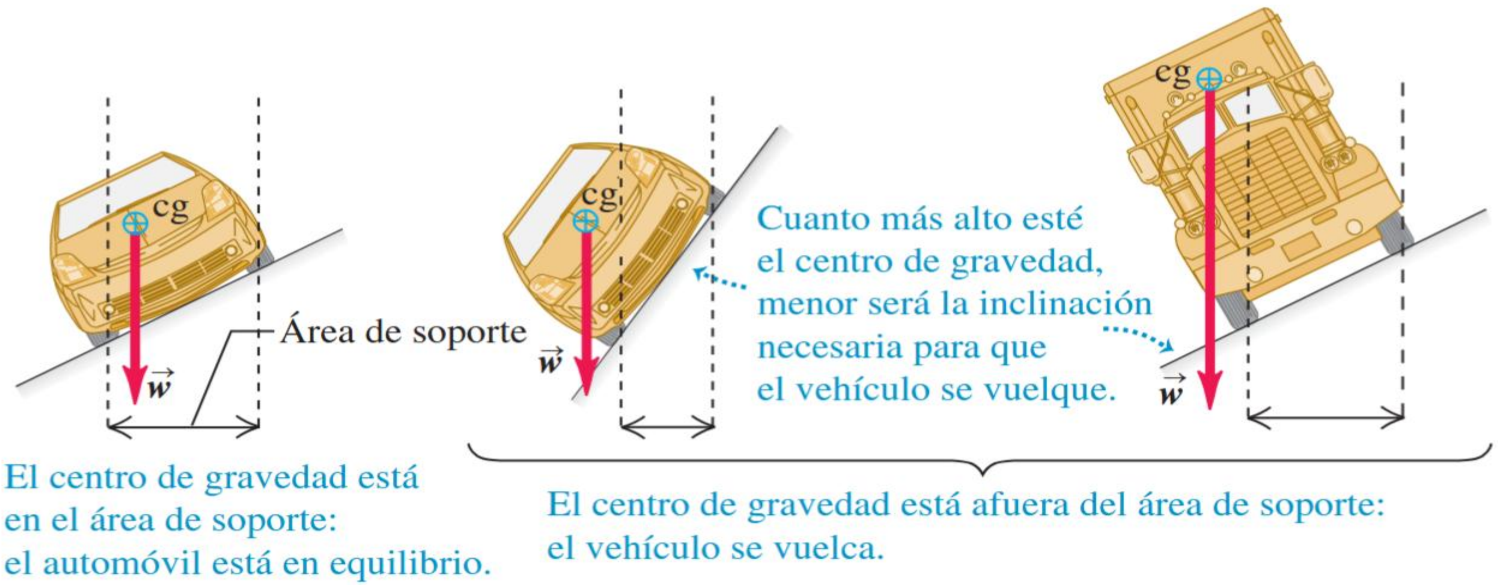
(b)

Estabilidad y equilibrio

Una mesa colocada sobre una superficie que se vaya inclinando gradualmente, acaba por caerse cuando su centro de gravedad ya no se halla sobre la superficie delimitada por los extremos de sus cuatro patas.

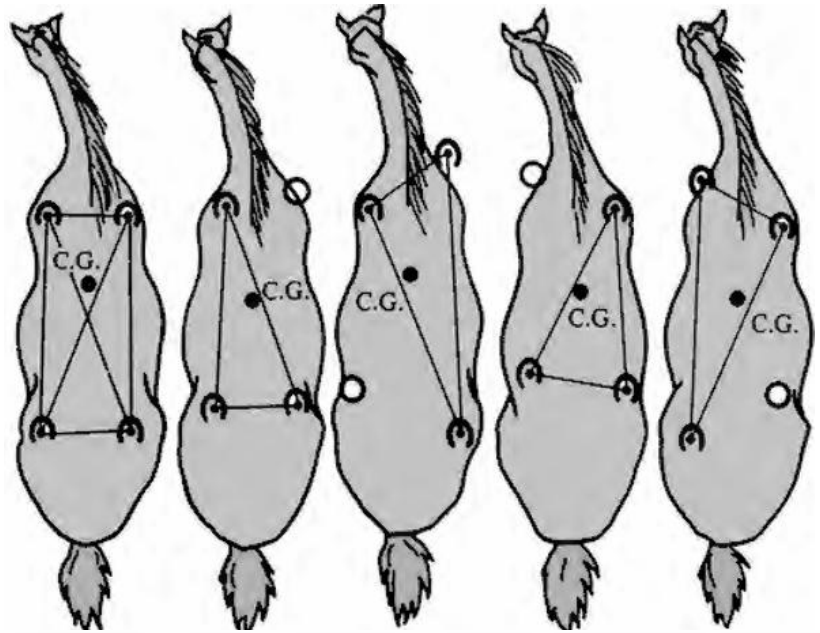


Análogamente, el centro de gravedad de los automóviles, los barcos y las vasijas ha de mantenerse lo más bajo posible para asegurar la máxima estabilidad.

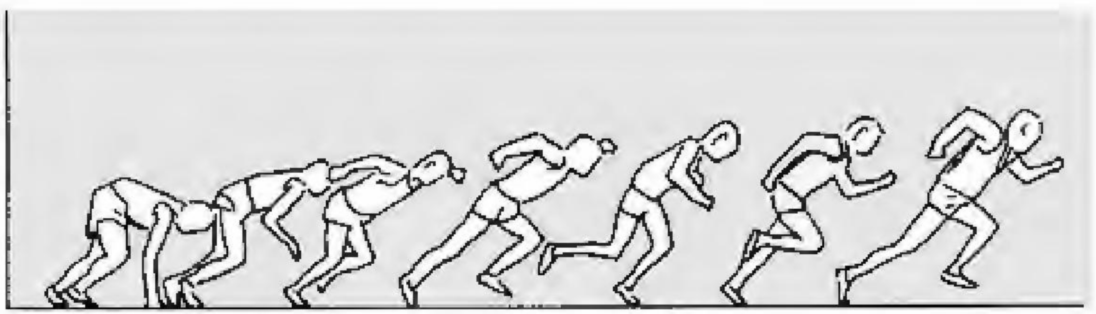


Estabilidad y equilibrio en los animales

Un animal que se sostiene sobre cuatro patas es análogo a una mesa. Así pues, podemos ver que las ratas y las ardillas, cuyas piernas son relativamente cortas, están bien adaptadas para vivir en terrenos escarpados o en las ramas de los árboles. En cambio, el caballo y el antílope, cuyas patas son largas, se encuentran bien dispuestos para ser eficaces en la carrera sobre terrenos casi planos.



Si un cuadrúpedo levanta una pata, **permanecerá en equilibrio si su C.G. se encuentra por encima del área triangular de la base** delimitada por las tres patas restantes. Moviendo las patas en el orden correcto, puede andar lentamente manteniendo siempre tres patas en contacto con el suelo, y con el **C.M. por encima del triángulo definido por ellas**.



Un velocista, en la salida e incluso durante la carrera, tiene su centro de masas muy por delante de sus pies, como se muestra en este dibujo. Esto significa que se encuentra en una posición muy inestable. Logra mantener el equilibrio llevando sus piernas hacia adelante justo a tiempo de evitar la caída. Esta posición extrema ayuda al atleta a ejercer sobre el suelo una fuerza mayor que aumenta su aceleración.

Palancas y ventaja mecánica

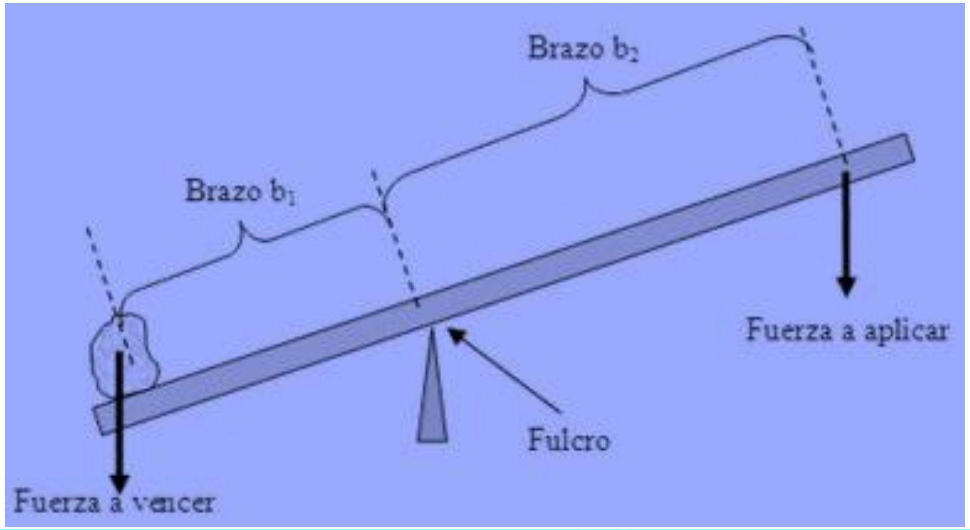
Las palancas, poleas y gatos, son ejemplos de *máquinas*. En cada caso se aplica una fuerza $\vec{F}_a$ y se contrarresta una fuerza de carga $\vec{F}_L$.

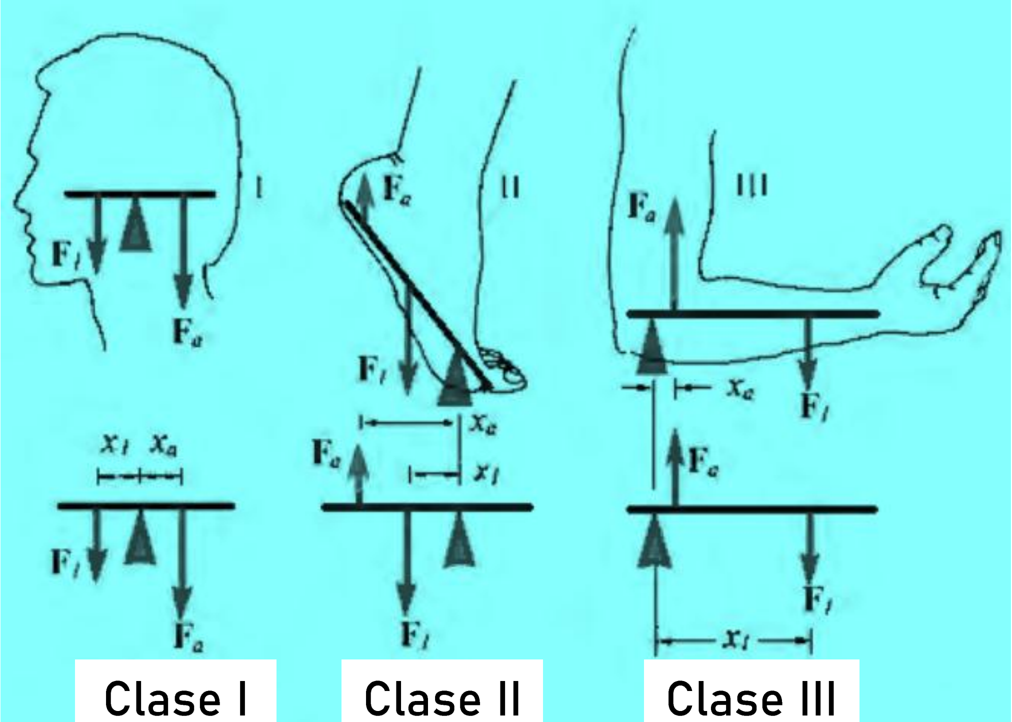
La ***ventaja mecánica (V.M.) de la máquina*** se define como el cociente de los módulos de las fuerzas:

$$\text{ventaja mecánica} = F_L/F_a$$

Una ***palanca*** es una barra rígida utilizada con un punto de apoyo (fulcro).

Según las posiciones relativas de $\vec{F}_L$, $\vec{F}_a$ y el p.a. , se definen tres clases de palanca.





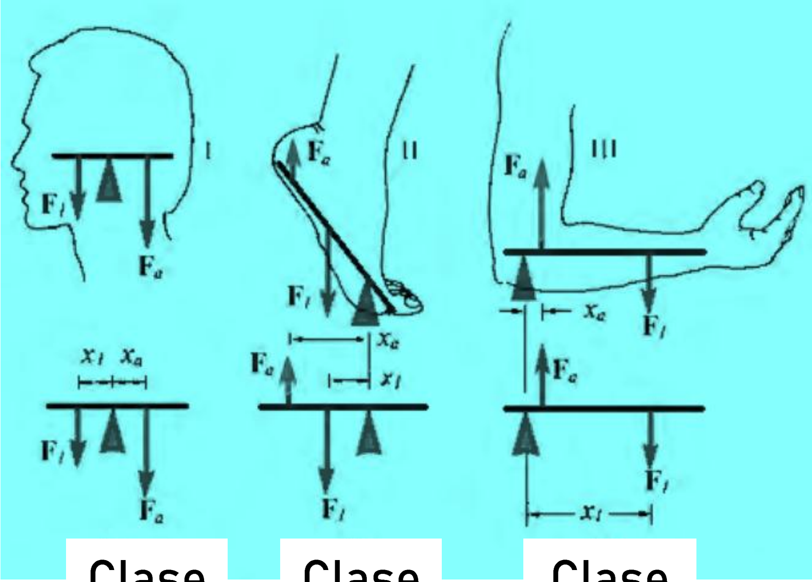
Palancas y ventaja mecánica

La ventaja mecánica en todas las clases de palancas se puede expresar como un cociente de distancias a partir del fulcro.

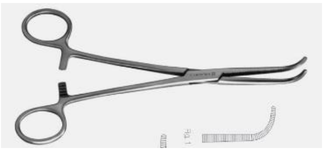
Si las fuerzas son perpendiculares a la palanca, la *razón de la fuerza de carga y aplicada* en ***equilibrio*** es:

$$\text{ventaja mecánica} = \frac{F_L}{F_a} = \frac{x_a}{x_L}$$

Con las fuerzas perpendiculares a la palanca, la ventaja mecánica de las palancas de la **clase III es siempre menor que 1** y la ventaja mecánica de las palancas de la **clase II es siempre mayor que 1**. Las palancas de **clase I** pueden tener ventaja mecánica **mayor o menor que 1**.



Clase I | Clase II | Clase III



Palancas en las extremidades animales

Las extremidades de los animales se pueden modelar como palancas tipo III.

Las extremidades cortas con pequeños valores de x_L tendrán V.M. relativamente grandes y serán capaces de ejercer grandes fuerzas. Sin embargo, la distancia que recorre el extremo de un miembro es proporcional a su longitud x_L por lo que el movimiento rápido requiere extremidades largas.

Hay un compromiso entre la fuerza y la velocidad de movimiento.

La pata delantera de un **caballo de carreras** tiene una **ventaja mecánica de 0,08**.

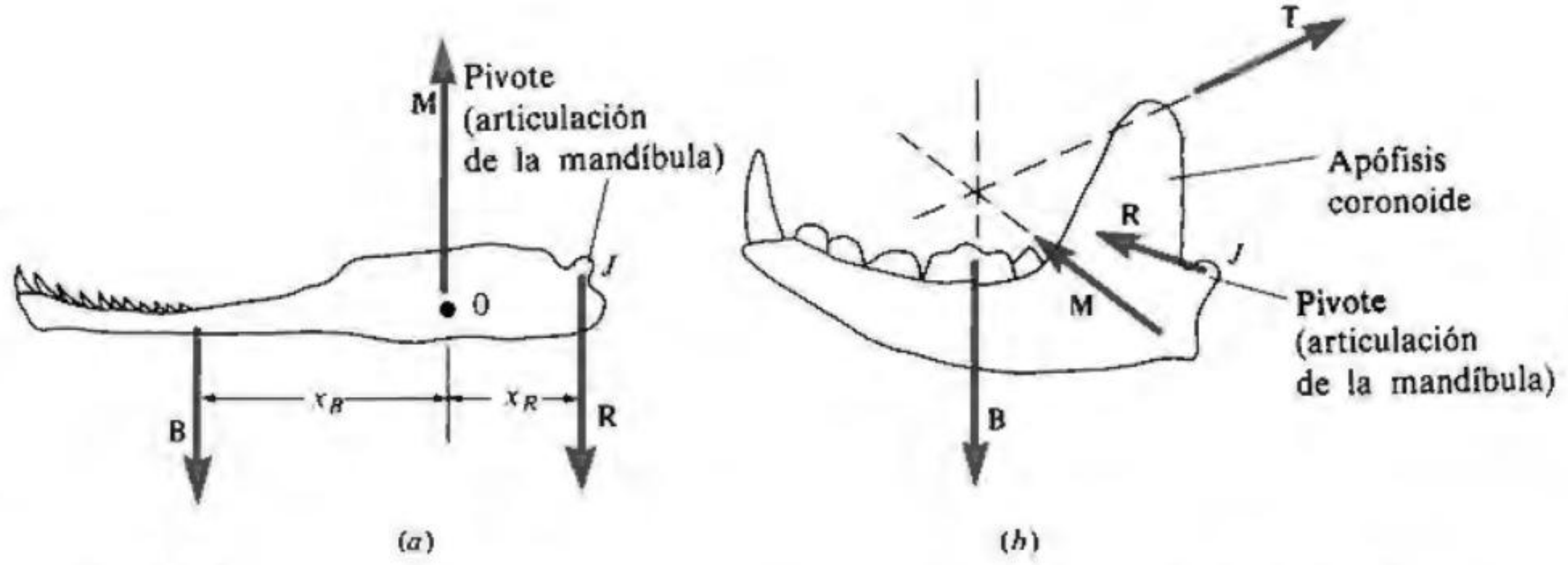
El **armadillo**, que es un animal zapador, tiene una pata delantera cuya **ventaja mecánica es 0,25**. Por lo tanto, aunque no puede moverse con tanta velocidad, tiene la fuerza suficiente para excavar.

Las mandíbulas de los animales

Un animal debe poder morder con fuerza: esto depende del módulo, dirección y punto de aplicación de las fuerzas ejercidas por los músculos que cierran la mandíbula.

Además, los huesos de la articulación de la *mandíbula superior con la inferior* deben ser lo suficientemente resistentes a fin de evitar fracturas y dislocaciones.

Sabemos que los mamíferos han evolucionado a partir de reptiles de modo que los *músculos* implantados en la mandíbula inferior iban *creciendo progresivamente*, mientras que los *huesos* de la articulación iban *disminuyendo de tamaño*, lo que se explica en términos de los cambios de dirección y de punto de aplicación de las fuerzas musculares.

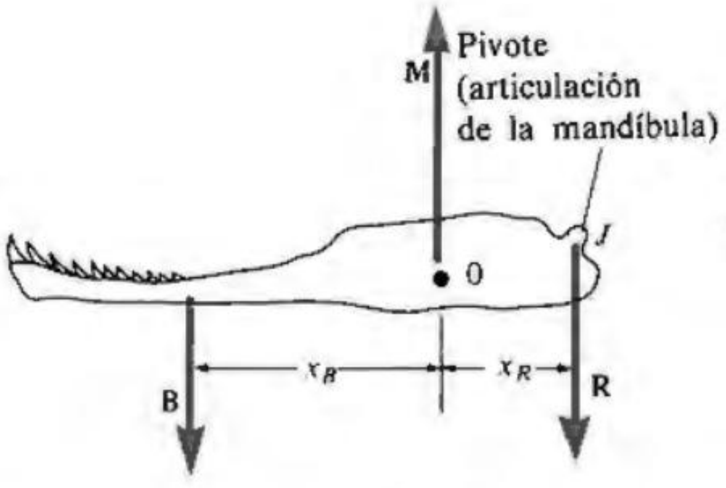


Las mandíbulas de reptiles primitivos

Un reptil primitivo que muerde con una fuerza dirigida hacia arriba $-\vec{\boldsymbol{B}}$ la comida situada entre sus dientes posteriores experimenta una reacción igual pero opuesta $\vec{\boldsymbol{B}}$ sobre su mandíbula. Como la fuerza muscular $\vec{\boldsymbol{M}}$ se aplica cerca de la articulación, se puede alcanzar el equilibrio estático sólo si la fuerza $\vec{\boldsymbol{R}}$ ejercida sobre la articulación es grande y dirigida hacia abajo.

La relación entre la reacción $\vec{\boldsymbol{B}}$ y la fuerza $\vec{\boldsymbol{R}}$ de la articulación es:

$$R = \frac{x_B}{x_R} B$$



(a)

Para lograr el equilibrio, llegamos a la fuerza $\vec{\boldsymbol{M}}$:

$$M = B + R = B\left(1 + \frac{x_B}{x_R}\right)$$

Ejemplo: $x_B = 2x_R$, $B = 100N$, entonces $R = 200N$ y $M = 300N$.
Así pues, la fuerza B sobre la comida es menor que las fuerzas M y R ejercidas por el músculo y la articulación, respectivamente.

Las mandíbulas de mamíferos

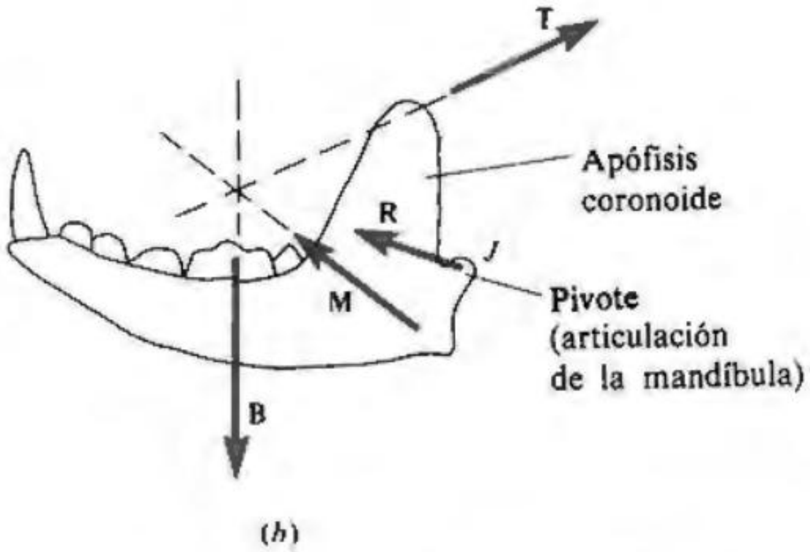
La mandíbula de los mamíferos tiene una gran protuberancia llamada *apófisis coronoides*, en la cual se implanta el músculo temporal que empuja hacia atrás y hacia arriba (fuerza $\vec{\boldsymbol{T}}$). El *masetero* y el *pterygoides* empujan hacia adelante y hacia arriba (fuerza $\vec{\boldsymbol{M}}$).

Veamos cómo puede ser nula la fuerza $\vec{\boldsymbol{R}}$ de la articulación.

1era condición: $\vec{\boldsymbol{T}} + \vec{\boldsymbol{B}} + \vec{\boldsymbol{M}} = \mathbf{0}$

2da condición: las tres fuerzas deben pasar por un mismo punto. De ese modo, $\vec{\boldsymbol{\tau}}_{\text{neto}} = 0$

Si $\vec{\boldsymbol{T}} + \vec{\boldsymbol{B}} + \vec{\boldsymbol{M}}$ no es nula, o si sus líneas de acción no se cortan en un punto común, la articulación deberá proporcionar una fuerza $\vec{\boldsymbol{R}}$, que de todos modos será mucho menor que la correspondiente en el reptil.



Las mandíbulas de los animales. Por lo tanto, la articulación no necesita una estructura tan grande y por lo tanto no limita el tamaño del músculo que puede tener el animal.

Las mandíbulas de mamíferos: ejemplo

SIMILAR EJERCICIO 3.11

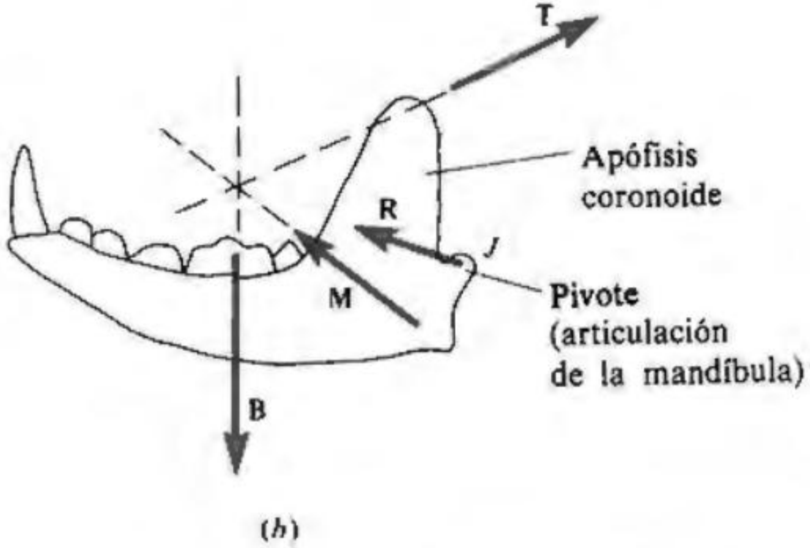
Para ilustrar la superioridad de la mandíbula los mamíferos, supongamos que las fuerzas musculares $\vec{T}$ y $\vec{M}$ de la figura forman ambas un ángulo de θ= 45° con la horizontal.

¿Cómo se ha de relacionar $\vec{M}$ con $\vec{T}$ para que la articulación no tenga que hacer ninguna fuerza $\vec{R}$ y cuánto valdrá la fuerza $\vec{B}$ ejercida sobre la comida?

(Suponer que las líneas de acción de $\vec{B}$, $\vec{T}$ y $\vec{M}$ se cortan en un punto común, de modo que se cumple la segunda condición de equilibrio $\vec{\tau} = 0$)

R: $B = \sqrt{2}M = \sqrt{2}T$

La fuerza B ejercida por la mandíbula sobre la comida es **mayor** que cualquiera de las **dos fuerzas musculares T y M**, y la fuerza debida a la articulación es nula. ***Por el contrario, en el caso del reptil hallamos que la fuerza B es menor que la fuerza muscular o la fuerza de la articulación***.



Sistema de poleas

Las poleas, como las palancas, son máquinas simples que se utilizan en muchas situaciones.

Una sola polea se utiliza para cambiar el sentido de una fuerza, mientras que las combinaciones de varias poleas pueden utilizarse para reducir la fuerza que se necesita para levantar una carga pesada.

Si el rozamiento en los soportes es despreciable, la tensión de equilibrio en el cable o cuerda es la misma a cada lado de la polea.

Analizando estos ejemplos, podemos concluir que **la ventaja mecánica del sistema es igual al número de cuerdas paralelas que sostienen la polea a la cual la carga va atada**