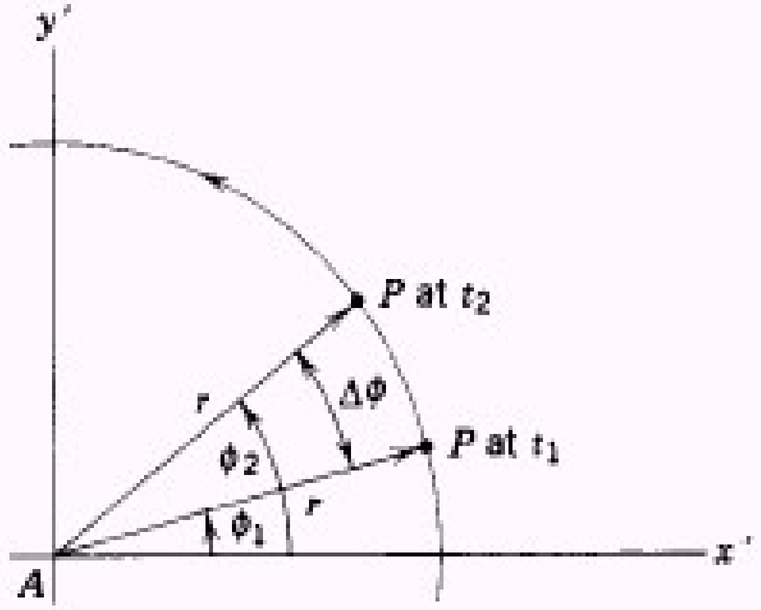
VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES

Movimiento de rotación- Rotación pura si cada punto del cuerpo rígido se mueve en trayectoria circular. Los centros de estos círculos están sobre una recta común (**eje de rotación**).



Variables de rotación-

Ángulo ϕ: posición angular de la línea de referencia AP (en radianes) y con sentido positivo de rotación antihorario.

ϕ está dado en radianes por la relación:

$$\phi = \frac{s}{r}$$

s es el arco y *r* es el radio de la cfa

$$1\ rad = \frac{180º}{\pi} \cong 57{,}3º$$

Desplazamiento angular de P será $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$

VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES

Velocidad angular media:

$$\omega_{media} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Velocidad angular ω:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}$$

Aceleración angular media

$$\alpha_{media} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Aceleración angular (α)

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

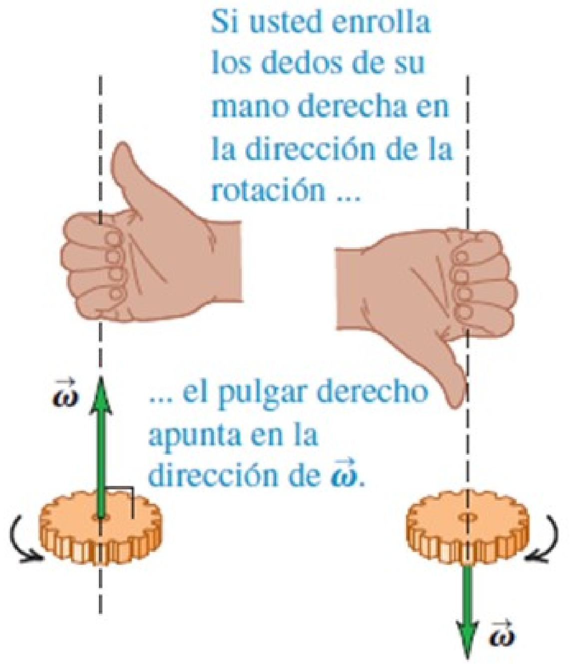
$$1 \text{ rev/s} = 2\pi \text{ rad/s} \quad \text{y} \quad 1 \text{ rev/min} = 1 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} \text{ rad/s}$$

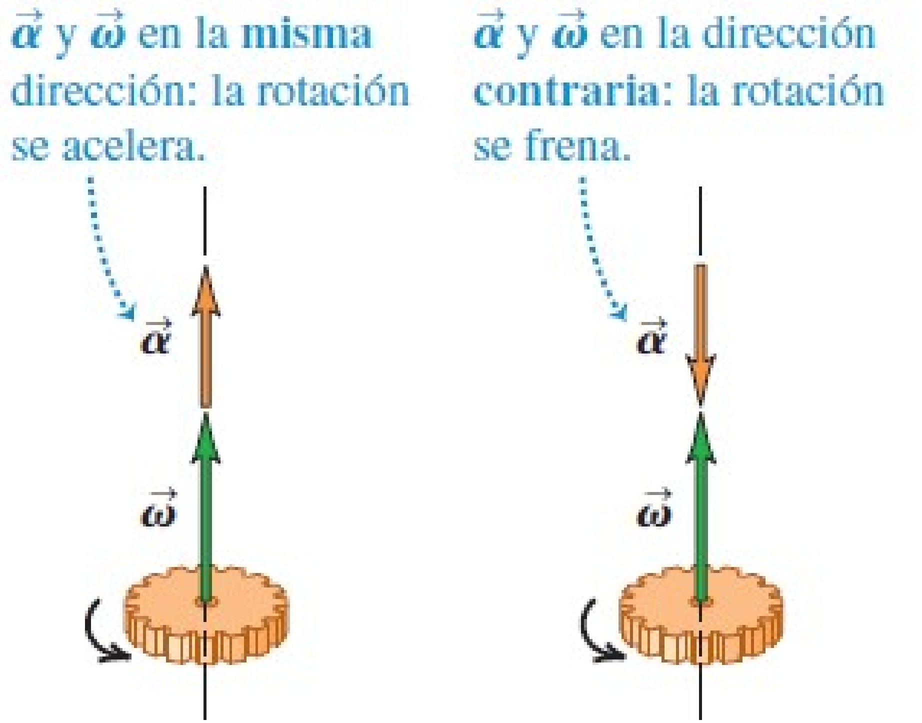
Velocidad angular positiva si el cuerpo gira en la dirección de Φ creciente.

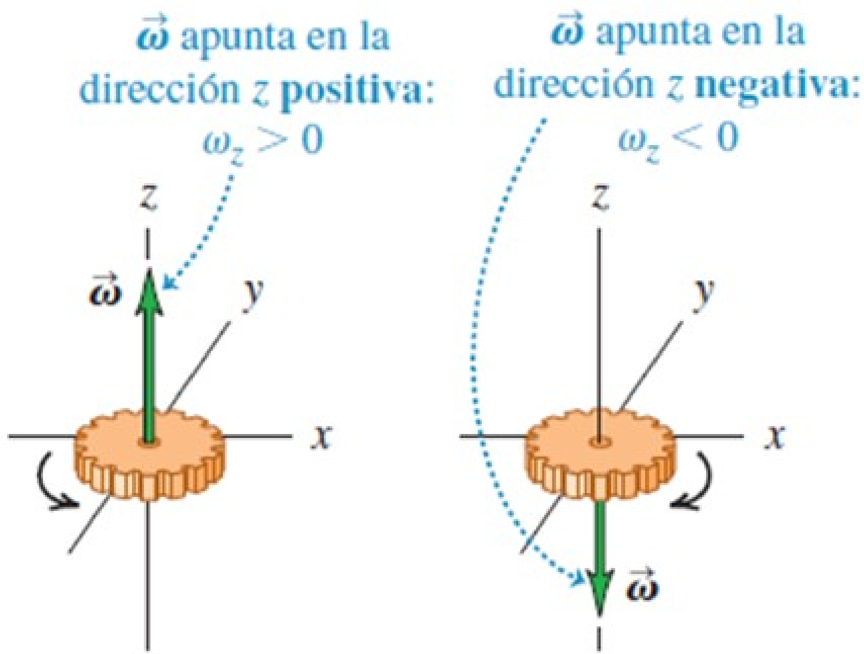
Para un cuerpo rígido tanto ω como α son únicos (valen lo mismo para cada punto).

VELOCIDAD Y ACELERACIÓN ANGULARES COMO VECTORES

Las magnitudes angulares, también pueden representarse vectorialmente.
Se representan como **vectores perpendiculares al plano de rotación, y con sentido dado por la regla de la mano derecha.**
Vamos a considerar que la rotación se realiza según el plano Oxy, por lo que los vectores de las magnitudes angulares serán según el eje z.







Rotación con aceleración angular constante

Las ecuaciones resultan ser similares a las ecuaciones vistas anteriormente para MRUA si sustituimos *x por θ, v_x por ω_z, y a_x por α_z.*

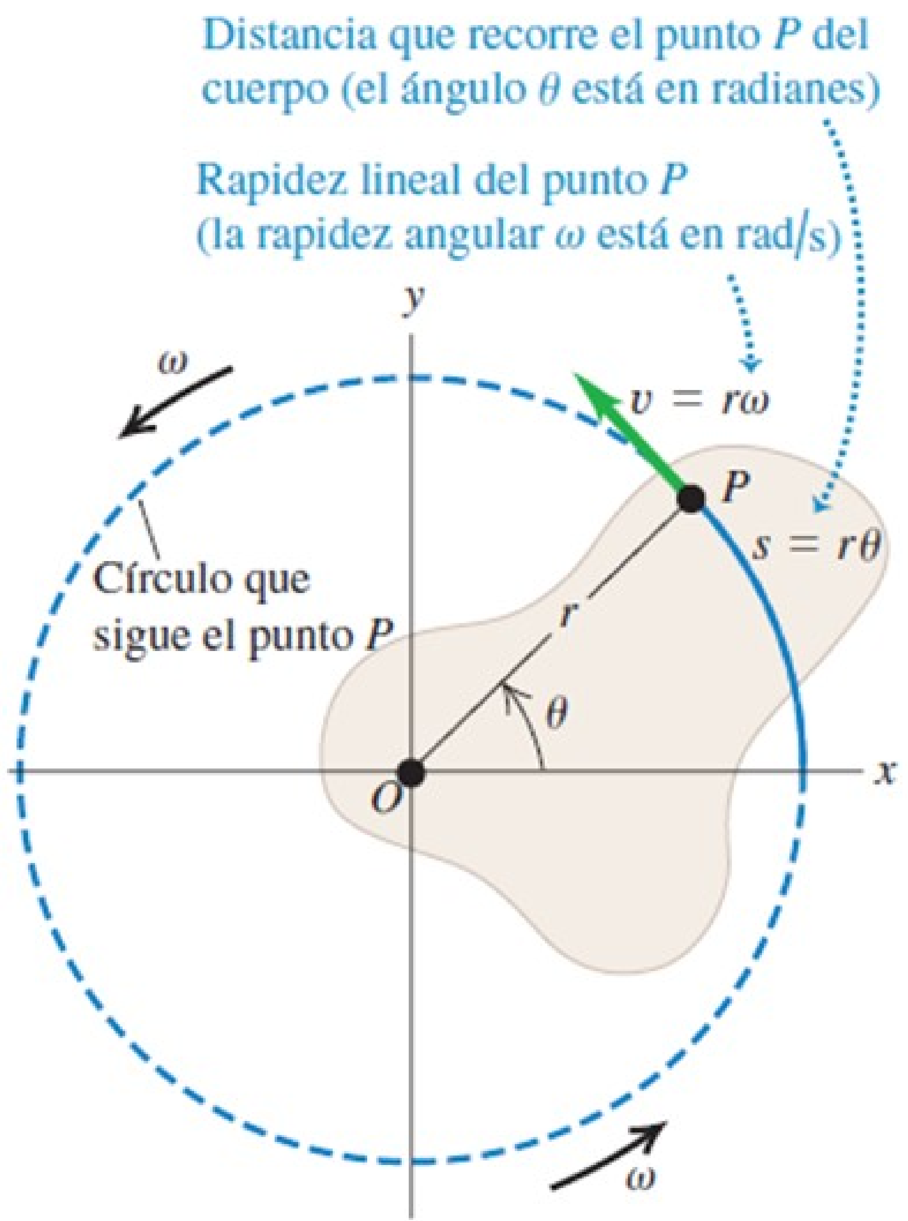
Consideramos que la aceleración angular α_z es constante

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \qquad \theta = \theta_0 + \omega_{0z} t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$$

Tabla 9.1 Comparación del movimiento lineal y angular con aceleración constante

Movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante		Rotación sobre un eje fijo con aceleración angular constante	
a_x = constante		α_z = constante	
$v_x = v_{0x} + a_x t$	(2.8)	$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t$	(9.7)
$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$	(2.12)	$\theta = \theta_0 + \omega_{0z} t + \frac{1}{2}\alpha_z t^2$	(9.11)
$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0)$	(2.13)	$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0)$	(9.12)
$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t$	(2.14)	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t$	(9.10)

Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido



Cuerpo rígido girando alrededor de un eje fijo que pasa por O.

Las partículas se mueven en una trayectoria circular, en un plano perpendicular al eje.

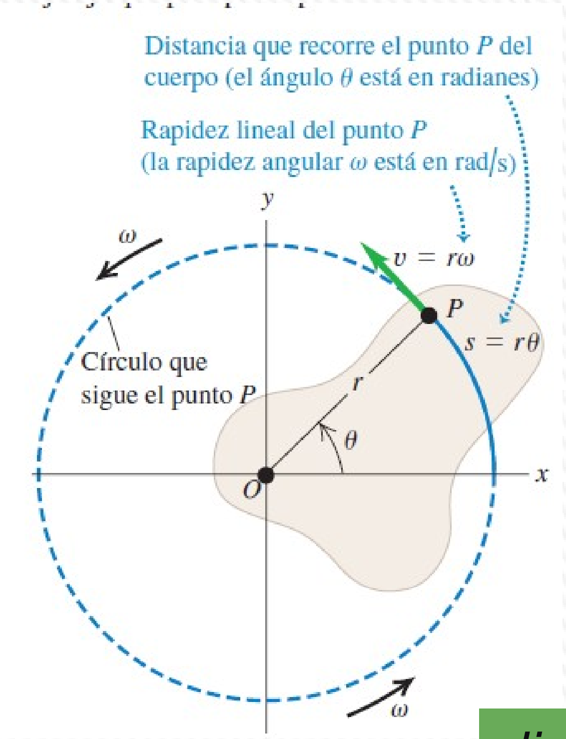
Punto *P a una distancia constante r de O, describe círculo de radio r.*

Ángulo θ (en radianes) y la longitud del arco s: $s = r.\theta$

Derivando con respecto al tiempo (*r es constante)* y tomando el valor absoluto:

$$\left|\frac{ds}{dt}\right| = r\left|\frac{d\theta}{dt}\right|$$

Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido



$|ds/dt|$ *valor absoluto de la tasa de cambio de la longitud de arco,* igual a la **rapidez *lineal instantánea v de la partícula***.

$|d\theta/dt|$ valor absoluto de la razón de cambio del ángulo, **rapidez angular instantánea ω** (magnitud velocidad angular instantánea en rad/s)

$$v = r\,\omega$$

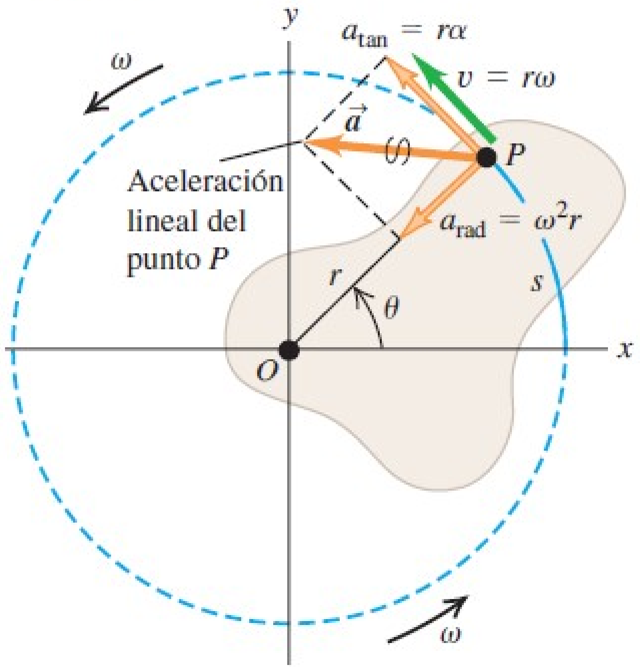
dirección del *vector v: tangente a la trayectoria circular en todos los puntos*

Cada punto sobre el objeto rígido tiene la misma rapidez *angular, pero no todo punto tiene la misma rapidez tangencial* *porque r no es el* mismo para todos los puntos sobre el objeto.

Aceleración lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Componentes de aceleración radial y tangencial:

- $a_{rad} = \omega^2 r$ es la aceleración centrípeta del punto P.
- $a_{tan} = r\alpha$ significa que la rotación de P está aumentando (el cuerpo tiene aceleración angular).



Derivando respecto al tiempo: $v = r\,\omega$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\,\frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha_z$$

Se vio que un punto que se mueve en una trayectoria circular tiene una **aceleración radial *a_r* *dirigida hacia el centro de rotación y cuya magnitud* es la de la aceleración centrípeta *v^2/r***.

Como $v = r\,\omega$, la aceleración centrípeta en dicho punto se puede expresar en términos de rapidez angular

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\,\omega^2$$

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{(r\alpha_z)^2 + (r\,\omega^2)^2} = r\sqrt{\alpha_z^2 + \omega^4}$$

PREGUNTAS RÁPIDAS

Nadia y Teo viajan en una calesita. Nadia viaja en un caballo en el borde exterior de la plataforma circular, al doble de distancia del centro de la plataforma circular que Teo, quien viaja en un caballo interior.

i) **Cuando la calesita tiene una rotación** a una rapidez angular constante, ¿cuál es la rapidez angular de Nadia?

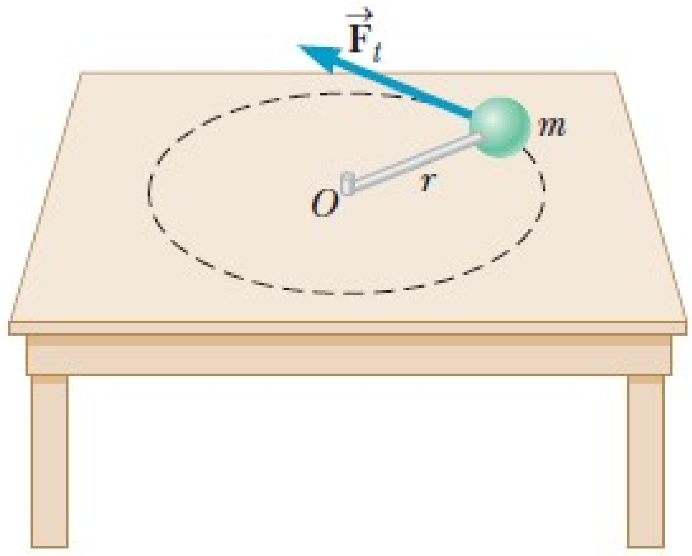
a) el doble de la de Teo,
b) la misma que la de Teo,
c) la mitad de la de Teo,
d) imposible de determinar.

ii) Cuando la calesita tiene una rotación con una rapidez angular constante, describa la rapidez tangencial de Nadia con la misma lista de opciones.

a) el doble de la de Teo,
b) la misma que la de Teo,
c) la mitad de la de Teo,
d) imposible de determinar.

Relación entre el torque y la aceleración angular

Veremos que cuando un rígido está sujeto a un torque neto, experimenta una aceleración angular proporcional al mismo, resultado similar a la 2da. ley de Newton, pero para rotaciones.



Sistema de la figura: objeto de masa *m unido a una barra muy* ligera de longitud *r, que gira alrededor del punto O sobre* una mesa *horizontal sin fricción. Supongamos que una fuerza F_t actúa perpendicularmente* a la barra (tangente a la trayectoria circular del objeto).

Debido a que no hay fuerza opuesta a la fuerza tangencial, el objeto experimenta una aceleración tangencial a_t *de acuerdo con la segunda ley del Newton:* $m.a_t = F_t$

Muliplicando ambos miembros por r: $m.a_t.r = F_t.r$

Y ahora, sustituyendo: $a_t = \alpha.r$ *resulta:* $m.\alpha.r^2 = F_t.r$

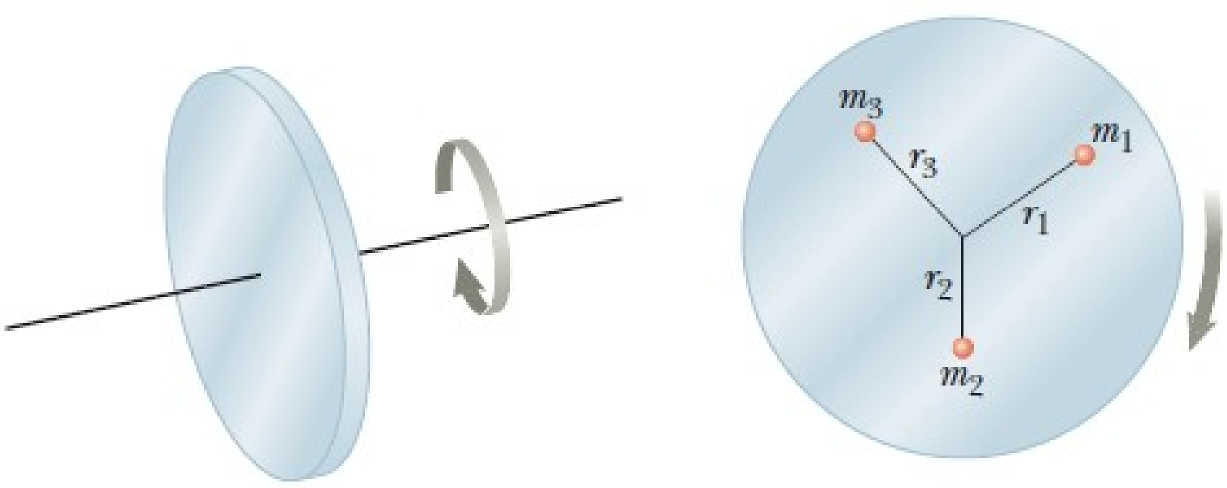
Pero el 2do. miembro es el torque que actúa sobre el objeto en relación con su eje de rotación, así que se puede rescribir como $m.\alpha.r^2 = \tau$

Relación entre el torque y la aceleración angular

$m.r^2\,\alpha = \tau$

$I.\alpha = \tau$

El torque (τ) sobre el objeto es proporcional a la aceleración angular (α) de éste, donde la constante de proporcionalidad *mr^2 se conoce como el* ***momento de inercia (I)*** del objeto de masa *m con respecto al punto O.* *(Como la barra es muy ligera, su momento de* inercia puede despreciarse).



Sea un disco sólido que rota sobre su eje como en la figura.
El disco consiste en muchas partículas a varias distancias del eje de la rotación.
El torque en cada una de estas partículas está dado por la ecuación anterior.

El torque *neto sobre* el disco está dado por la suma de los torques individuales τ_i en todas las partículas, y etiquetando a c/u de las masas y a sus distancias con respecto al eje con un subíndice *i* :

$$\sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i . r_i^2\right)\alpha$$

Como el disco es rígido, todas sus partículas tienen la *misma aceleración angular,* así que a no está involucrada en la suma.

Relación entre el torque y la aceleración angular

$$\sum_i m_i . r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots$$

Esta cantidad es el **momento de inercia, *I,*** *de todo el cuerpo:*

El momento de inercia tiene unidades SI de kg.m^2.
Utilizando este resultado en la ecuación anterior, vemos que el torque neto sobre un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo está dado por:

$$\sum \tau = I\alpha$$

Esta ecuación indica que **la aceleración angular de un objeto rígido es proporcional al torque neto que actúa sobre él,** y es el análogo rotatorio de la 2da. Ley de Newton.

En esta ecuación el torque sustituyendo a la fuerza, el momento de inercia que sustituye a la masa y la aceleración angular, a la aceleración lineal.

Aunque el momento de inercia de un objeto se relaciona con su masa, hay una importante diferencia entre ellos. La masa *m depende solamente de la cantidad de materia en un objeto, mientras* que el momento de la inercia, *I, depende de la cantidad de materia y de su distribución* (con el término *r* ^{2} *en I =Σmr*^{2}*) en el objeto rígido.*

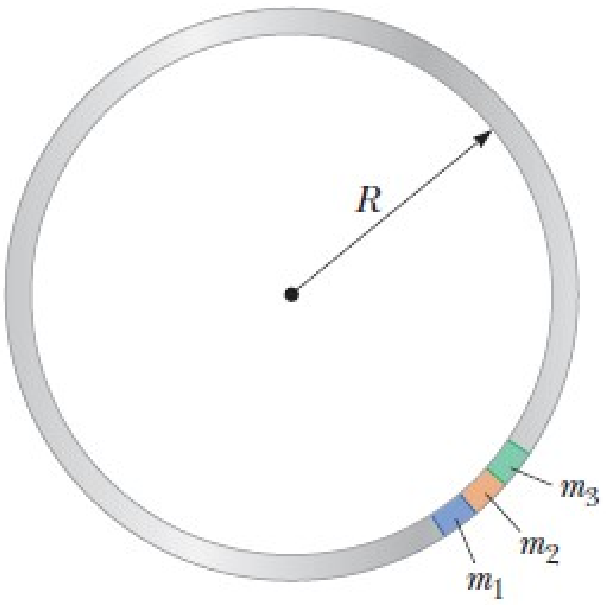
Momento de inercia

Como vimos una partícula tiene un momento de inercia igual a mr^2 *en relación con un cierto eje.*

El momento de inercia respecto a un eje de un objeto compuesto **es igual a la suma de los momentos de inercia respecto al eje de los componentes del objeto (es aditivo).**

$$I = \sum_i m_i . r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots$$

La masa es una característica intrínseca del objeto y que no cambia, mientras que el **momento de inercia de un sistema depende de cómo la masa se distribuye y de la ubicación del eje respecto al cual se calcula I .**



Cuando el objeto es continuo, como una esfera o un cilindro se requieren a menudo técnicas del cálculo, a menos que una cierta simetría esté presente.

Un objeto de solución simple es el de un aro respecto a un eje perpendicular a su plano y que pasa por su centro (como la rueda de una bicicleta).

Para evaluar el momento de inercia del aro, podemos todavía utilizar la ecuación $I = \Sigma mr^2$ *e imaginar que la masa del aro M está dividida en n pequeños segmentos de* masas $m_1, m_2, m_3, \ldots m_n$, *como se ve en la figura, con* $M = m_1 + m_2 + m_3 + \ldots m_n$.

Momento de inercia

Podemos expresar *I como la suma:* $$I = \sum_i m_i . r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots + m_n r_n^2$$

Todos los segmentos alrededor del aro están a la *misma distancia R del eje de rotación, así* que podemos usar subíndices en las distancias y factorizar R_2 *para obtener*

$$I = (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n) R^2 = MR^2$$

Expresión que se puede usar para el momento de inercia de cualquier objeto de forma anular, que rota sobre un eje a través de su centro y perpendicular a su plano.

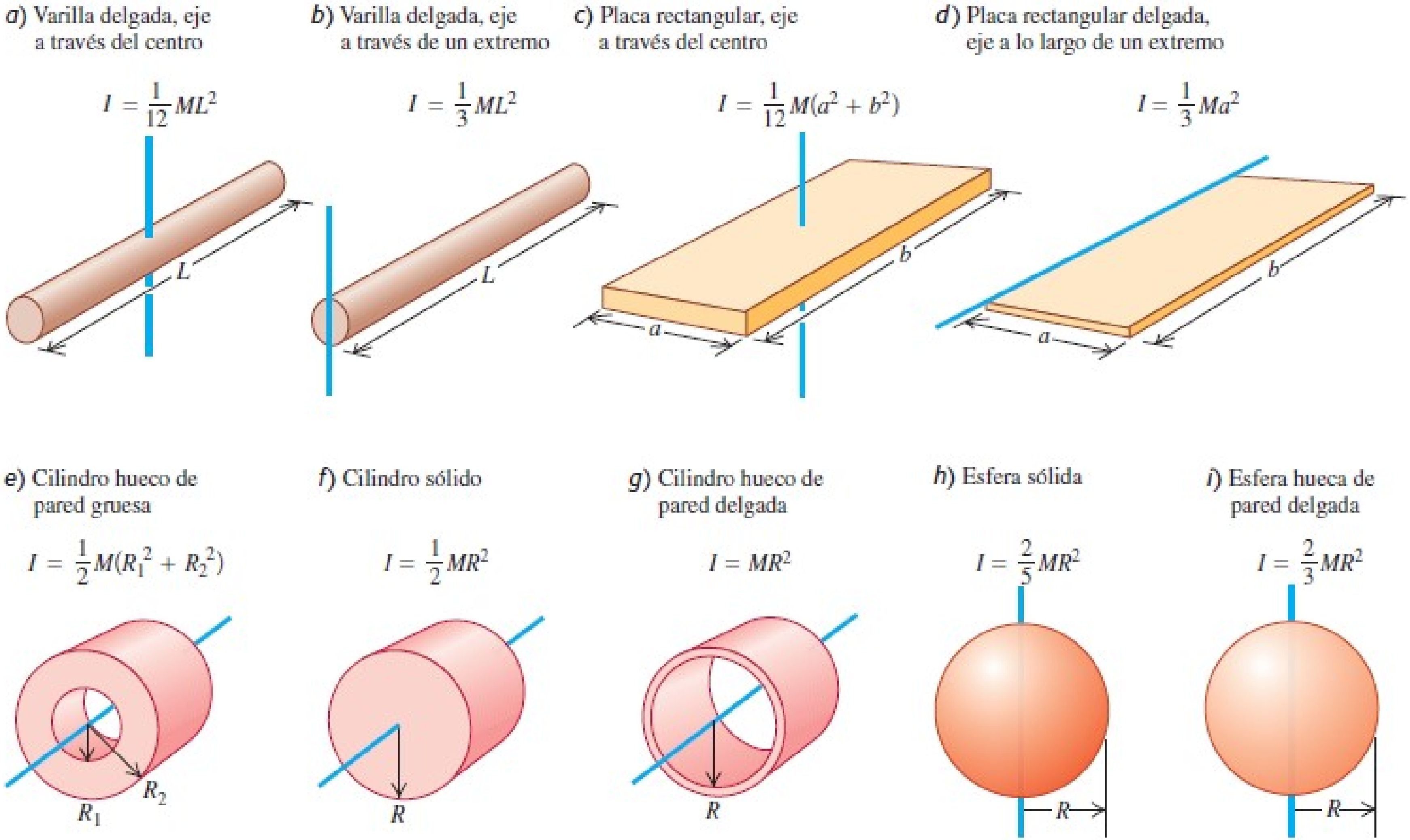
Este resultado es estrictamente válido solamente si el grueso del anillo es pequeño en relación con su radio interno.

Desafortunadamente, para objetos más extensos el cálculo es más difícil porque no todos los elementos de masa están situados a la misma distancia del eje, por lo que se requieren los métodos del cálculo integral.

Los momentos de inercia para algunas otras formas comunes se muestran en la próxima diapositiva.

Vamos a utilizar esta tabla cuando necesitemos determinar el momento de inercia de un cuerpo que tiene las formas mencionadas.

Momentos de inercia de diversos cuerpos homogéneos



Ejemplo: Descenso de un balde en un pozo

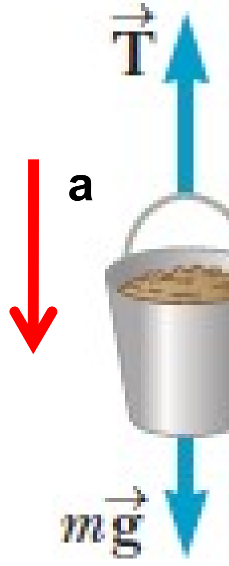
Un carrete sólido cilíndrico sin fricción, de masa *M=3,00 kg y radio R=0,400 m, se usa para* sacar agua de un pozo. Un balde de masa *m*= 2,00 kg se ata a una cuerda ideal que se enrolla alrededor del cilindro. Encuentre la tensión *T en la cuerda y la aceleración a del balde.*

Este problema involucra tres incógnitas: la aceleración *a del balde, la aceleración* angular α *del cilindro y la tensión T en la cuerda, por lo que debemos establer tres ecuaciones:*

1) la segunda ley de Newton aplicada al balde, $ma = \Sigma F$;
2) *la versión rotatoria* de la segunda ley aplicada al cilindro: $I\alpha = \Sigma\tau$, *y*
3) *la* relación entre las aceleraciones lineal y angular, $a = r\alpha$, que conecta las dinámicas del balde y del cilindro.

Comencemos realizando los DCL del balde y del carrete

Ejemplo: Descenso de un balde en un aljibe



Como el balde está cayendo, la aceleración a es hacia abajo.

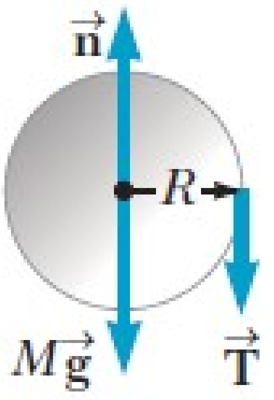
Entonces voy a escribir la 2da. Ley de Newton, según el eje vertical, y considerando en sentido positivo hacia abajo:

m.a= m.g – T (1)

El carrete se encuentra en equilibrio de traslación: la fuerza n equilibra la otras dos fuerzas actuantes: su peso Mg y la tensión T que le ejerce el balde a través de la cuerda.

Por tanto el carrete sólo puede rotar. Por lo que aplicamos *la versión rotatoria* de la segunda ley aplicada al cilindro: $I\alpha = \Sigma\tau$

En este caso, la única fuerza que realiza torque, es la tensión T con un brazo de palanca igual a R: $I\alpha = T.R$



Ahora sustituimos: α=a/R y el valor de I correspondiente a un cilindro macizo ($MR^2/2$)

$$\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{a}{R} = T.R \qquad \frac{1}{2}Ma = T \quad (2)$$

Sustituyo T en (1) y operando: $ma = mg - \frac{1}{2}Ma \qquad \left(m + \frac{1}{2}M\right)a = mg$

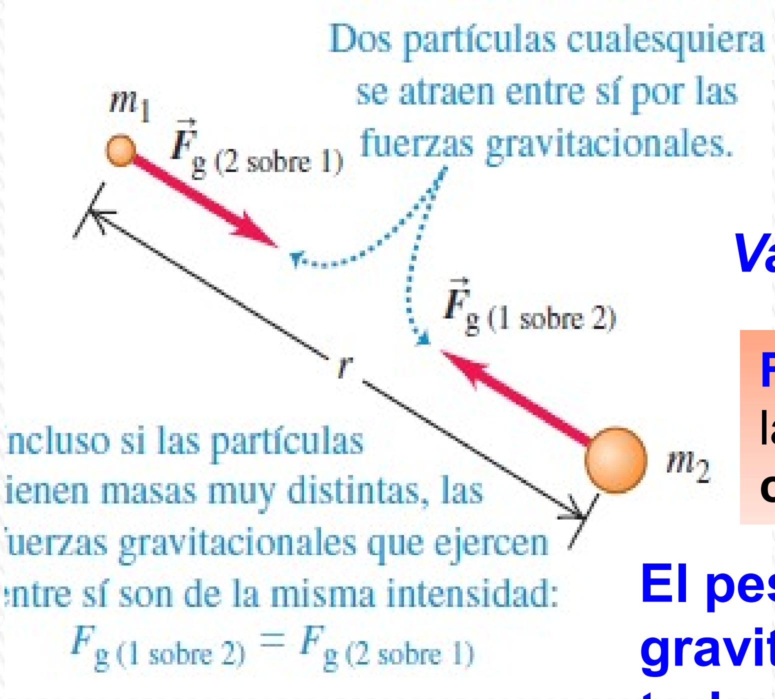
$$a = \frac{m}{m + \frac{1}{2}M}g = \frac{2{,}00}{2{,}00 + \frac{1}{2}(3{,}00)}9{,}80 = 5{,}60\ m/s^2$$

$$T = \frac{1}{2}Ma = \frac{1}{2}(3{,}00)(5{,}60) = 8{,}40\ N$$

13- Gravitación y movimiento de satélites

El **Sputnik 1** (en ruso Спутник-1, que significa *satélite*) lanzado el 4/10/1957por la Unión Soviética fue el primer satélite artificial de la historia.[1] Tenía una masa de lanzamiento de 83,6 kg y un periodo de 96,2 minutos.

La ley de Newton de la gravitación



$$F_g = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

Valor aceptado de $G = 6{,}674\times10^{-11}$ N.m^2/kg^2

Fuerzas gravitacionales actúan a lo largo de la línea que une las dos partículas **(fuerzas centrales)**, y forman un **par acción-reacción**.

El peso de un cuerpo es la fuerza gravitacional total ejercida sobre éste por todos los demás cuerpos del Universo.

Si un cuerpo está cerca de la superficie terrestre, se pueden despreciar las demás fuerzas gravitacionales y considerar el peso tan solo como la atracción de la Tierra. Si de nuevo modelamos la Tierra como un cuerpo esféricamente simétrico con radio *R_E y masa m_E, el* ***peso w de un cuerpo pequeño de masa m en la superficie terrestre*** (a una distancia *R_E del centro) es*

$$w = F_g = \frac{Gm_Em}{R_E^2}$$

PREGUNTA RÁPIDA

Saturno tiene aprox. 100 veces la masa de la Tierra y está alejado del Sol casi 10 veces más que nuestro planeta. En comparación con la aceleración de la Tierra causada por la atracción gravitacional solar,
¿qué tan grande es la **aceleración de Saturno debida a la gravitación solar**, es decir la aceleración centrípeta respecto al Sol?

i. 100 veces mayor;

ii. 10 veces mayor;

iii. es igual;

iv. 1/10 ;

v. 1/100

Respuesta: v. 1/100. Si bien las fuerzas que experimentan ambos planetas son iguales, la aceleración es igual a dicha fuerza sobre la masa del planeta.

PESO y g

El peso *w de un cuerpo es la fuerza* que provoca la aceleración *g en caída libre, de modo que por la segunda ley de Newton, w = mg.*

$$g = \frac{Gm_E}{R_E^2}$$

Podemos obtener el valor de la masa de la Tierra, usando *R_E = 6.380 km = 6,38 ×10^6 m y g = 9,80 m/s^2, se obtiene:*

$$m_E = \frac{gR_E^2}{G} = \frac{(9{,}80)(6{,}38 \times 10^6)^2}{6{,}674 \times 10^{-11}} = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$$

muy cerca del valor actualmente aceptado de 5,974 × 10^{24} kg.
Una vez que Cavendish midió *G, calculó la masa terrestre precisamente así.*
En un punto arriba de la superficie terrestre a una distancia *r del centro de la Tierra* (una altura *h= r - R_E sobre la superficie), el peso de un cuerpo está dado por:*

$$w = F_g = \frac{Gm_E m}{r^2}$$

$$g(h) = G\,\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

Valores de g

Tabla 13.1 Variaciones de g con la latitud y la elevación

Estación	Latitud norte	Elevación (m)	$g(\mathrm{m/s^2})$
Zona del Canal	09°	0	9.78243
Jamaica	18°	0	9.78591
Bermudas	32°	0	9.79806
Denver, CO	40°	1638	9.79609
Pittsburgh, PA	40.5°	235	9.80118
Cambridge, MA	42°	0	9.80398
Groenlandia	70°	0	9.82534

Valor normalizado: 9,80665 m/s^2

Polo: 9,832 m/s^2

Ecuador: 9,78 m/s^2

Montevideo: 9,7974 m/s^2

$$g(h) = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

	h = 0 m	h = 1 km	h= 10 km
g	9,8226	9,81949	9,79181
Error (%)		0,031	0,314

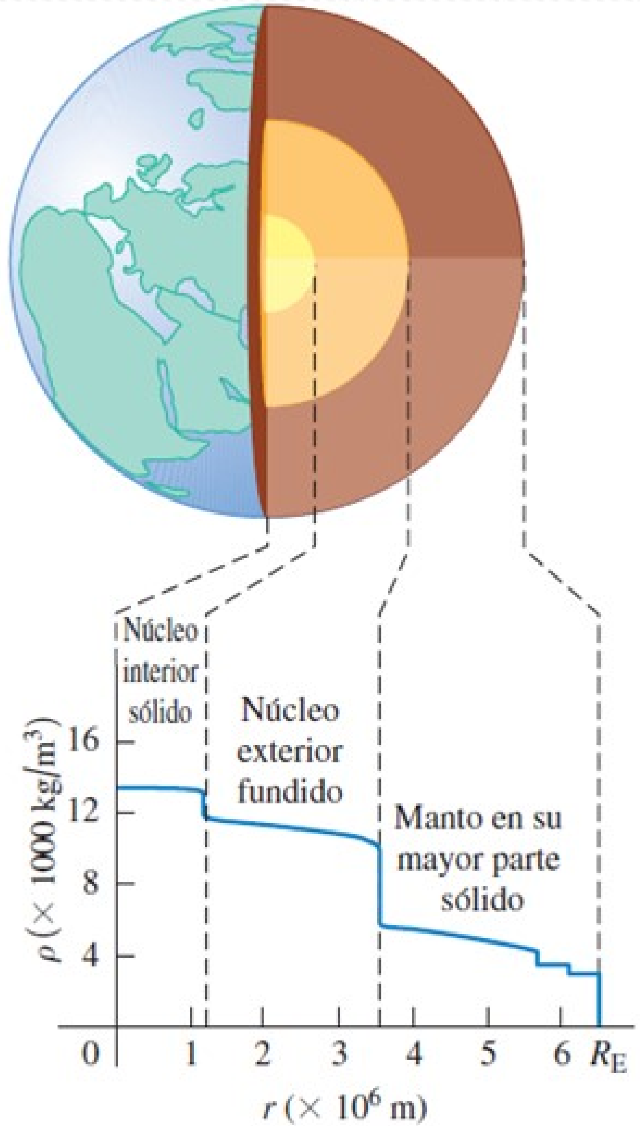
DENSIDAD DE LA TIERRA

Aun cuando la Tierra es una distribución de masa con simetría esférica aproximada, *no es uniforme volumétricamente.*

Si calculamos su densidad media, suponiendo una Tierra esférica:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R_E^3 = \frac{4}{3}\pi(6{,}38 \times 10^6)^3 = 1{,}09 \times 10^{21}\ m^3$$

$$\rho_E = \frac{m_E}{V_E} = \frac{5{,}98 \times 10^{24}}{1{,}09 \times 10^{21}} = 5{,}48 \times\times 10^3\ \ kg/m^3$$



Si la Tierra fuera uniforme, la densidad de las rocas cerca de la superficie debería tener ese valor.
Pero la densidad de las rocas superficiales es bastante menor: de 2.000 kg/m^3 para rocas sedimentarias, a cerca de 3.300 kg/m^3 para el basalto (un tipo de roca volcánica).
Por lo tanto, **la Tierra *no puede ser uniforme*,** y el **interior debe ser mucho más denso que la superficie** para que la densidad *media sea* de 5500 kg/m^3.
Según modelos geofísicos del interior de la Tierra, la densidad máxima en el centro es de aproximadamente 13,000 kg/m^3.