Introducción a la teoría de errores

Accidente acontecido el 22 de octubre de 1895 en la estación de Montparnasse, Francia, provocó que una locomotora de vapor que hacía la ruta Granville-París, después que sus frenos fallaran, atraviese la fachada.

Capítulo 4

Errores de medición. Incertidumbre del resultado de una medición

En este capítulo presentamos los conceptos básicos asociados a los procesos de medición: magnitud física, errores o incertidumbres de medición, precisión y exactitud de los instrumentos. Se introducen los conceptos de errores de medición según su fuente u origen: error de apreciación, error de exactitud, error de interacción, error de definición. Errores estadísticos, sistemáticos y espurios. También se discute el concepto de cifras significativas.

Objetivos

- ✓ Mediciones, magnitudes y mesurando
- ✓ Instrumentos de medición, unidades
- ✓ Errores o incertidumbres de medición
- ✓ Interacción, definición, calibración
- ✓ Precisión y exactitud
- ✓ Errores estadísticos, sistemáticos y espurios
- ✓ Errores absolutos y relativos
- ✓ Cifras significativas

4.1 Introducción

Una *magnitud física* es un atributo de un cuerpo, un fenómeno o sustancia, susceptible de ser medido de forma directa o indirecta. Ejemplos de magnitudes son la longitud, la masa, la potencia, la velocidad, etc. A una magnitud específica de un objeto que queremos medir la llamamos *mesurando*. Por ejemplo, si estamos interesados en medir la longitud de una barra, esa longitud específica será el mesurando.

El objetivo de una medición es comparar y determinar el valor del mesurando. Este proceso requiere de la elección de *instrumentos de medición* y un sistema de *unidades de medición*. Por ejemplo, si deseamos medir el largo de una varilla, el instrumento de medición será una regla y si elegimos el Sistema Internacional de Unidades (SI), la unidad será el metro. La regla a usar deberá estar calibrada en metros o en algún submúltiplo del mismo. El método de medición consistirá en determinar cuantas veces la unidad y fracciones de ella están contenidas en el valor del mesurando.[1]

En general, el resultado de una medición es sólo una aproximación o estimación del valor del mesurando. Esto se debe a las limitaciones propias del proceso de medición como consecuencia de:

- ✓ la sensibilidad y exactitud de los instrumentos usados,
- ✓ la interacción del método de medición con el mesurando,
- ✓ la definición del objeto a medir,
- ✓ la influencia del observador u observadores que realizan la medición.

Estas imperfecciones dan lugar a un *error o incertidumbre* en el resultado de la medición. Coloquialmente es usual el empleo del término error como análogo o equivalente a equivocación, pero en las ciencias e ingeniería el error de una medición está asociado al concepto de *incertidumbre* en la determinación de un resultado. Más precisamente, lo que procuramos en toda medición es conocer las cotas o límites probabilísticos de estas incertidumbres. Buscamos establecer un intervalo

$$\bar{x} - \Delta x \leq x \leq \bar{x} + \Delta x \tag{4.1}$$

como el que se ilustra en la Fig. 4.1, en el que podamos decir, con cierta probabilidad, se encuentra el *mejor valor* de la magnitud *x*. En otras palabras el objetivo de la medición es establecer un *intervalo de confianza* ($\bar{x}$-Δx, $\bar{x}$+Δx) donde con cierta probabilidad podemos asegurar se encuentra el valor más representativo de la medición. El mejor valor o valor más representativo de la medición es $\bar{x}$ y al semiancho del intervalo Δx lo denominamos la *incertidumbre absoluta* (o bien *error absoluto*) de la medición.

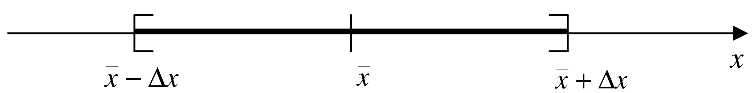


Figura 4.1. Intervalo asociado al resultado de una medición. Al valor representativo del intervalo ($\bar{x}$) lo llamamos el mejor valor de la magnitud en cuestión, este valor podría ser el centro del mismo. El semiancho del intervalo (Δx) se denomina la *incertidumbre absoluta o error absoluto de la medición*

La sensibilidad de un instrumento está asociada a la variación mínima de la magnitud que el mismo puede detectar. Por ejemplo, con una regla graduada en milímetros no puede detectar variaciones menores que una fracción del milímetro, su sensibilidad es un milímetro. Los instrumentos de medición tienen una sensibilidad finita, la mínima variación que puede detectar, se denomina la *apreciación nominal* del instrumento, y en general coincide con división más pequeña de su escala. Ver Figura 4.2.

La *interacción* del método de medición con el mesurando genera una incertidumbre en la medición. Cuando usamos un termómetro para medir una temperatura, algo de calor fluye del objeto al termómetro (o viceversa), de modo que el resultado de la medición de la temperatura del objeto es un valor modificado del original debido a la inevitable interacción que debimos realizar. Es claro que esta interacción podrá o no ser significativa. Si estamos midiendo la temperatura de un metro cúbico de agua, la cantidad de calor transferida al termómetro puede no ser significativa, pero sí lo será si el volumen en cuestión es de una pequeña fracción del mililitro. En general, siempre que realizamos una medición, interactuamos con el objeto de medición.

A su vez, las magnitudes a medir tampoco están definidas con infinita precisión. Imaginemos que queremos medir el largo de un listón de madera. Es posible que al usar instrumentos cada vez más precisos empecemos a notar las irregularidades típicas del corte de los bordes o, al ir aun más allá, finalmente detectemos la naturaleza atómica o molecular del material que lo constituye. En este punto la longitud dejará de estar bien definida. En la práctica, es posible que mucho antes de estos casos límites, la falta de paralelismo en sus bordes haga que el concepto de la "longitud del listón" comience a hacerse cada vez menos definido. Esta limitación intrínseca aporta una *incertidumbre intrínseca* debido a la falta de definición de la magnitud en cuestión.

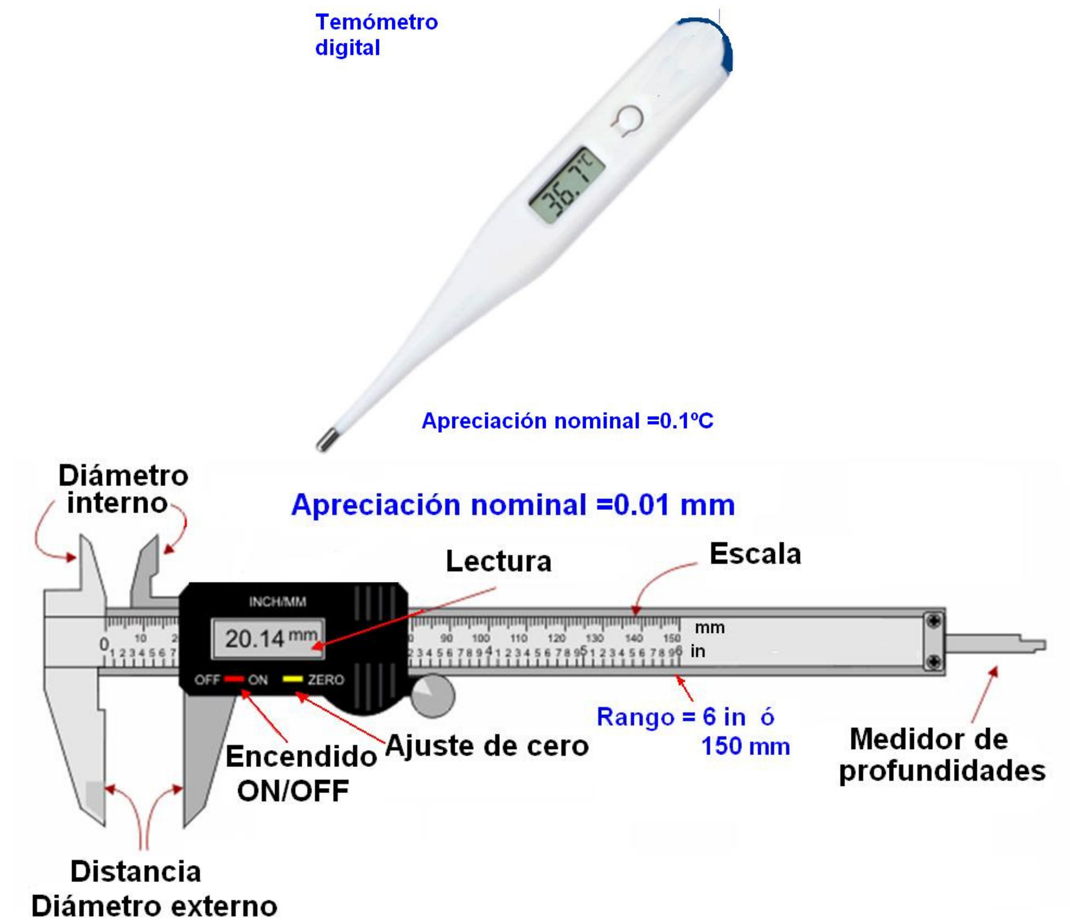


Figura 4.2. Arriba vemos un termómetro digital con apreciación nominal de 0.1ºC. Abajo un calibre o vernier digital de apreciación nominal de 0.01mm y rango o alcance de 150mm.

Otro ejemplo, asociado a la falta de definición de una magnitud física, es el caso en que se cuenta la cantidad de partículas alfa emitidas por una fuente radioactiva en un intervalo de tiempo, por ejemplo en cinco segundos. Sucesivas mediciones de la misma magnitud, para la misma fuente y con idénticos instrumentos, arrojarán resultados diferentes (similares, pero en general distintos). En este caso, de nuevo, estamos frente a una manifestación de una incertidumbre intrínseca asociada a la magnitud "número de partículas emitidas en cinco segundos", más que a las incertidumbres que tienen como origen las imperfecciones de los instrumentos o del observador. De hecho esta incertidumbre es intrínseca del carácter estadístico de la física y la naturaleza misma.[2]

Todas estas limitaciones derivan en que no podamos obtener con certeza "el" valor de un mesurando, sino que solo podamos establecer un rango posible de valores donde pueda estar razonablemente contenido, lo que hacemos evaluando e informando la incertidumbre de la medición. En este sentido, el proceso de medición en física es similar a la "estimación por intervalo" que se realizar en Estadística.[3]

Una forma de expresar el resultado de una medición es:

$$(\bar{x} \pm \Delta x)\ unidades \tag{4.2}$$

donde $\bar{x}$ es el mejor valor nuestra medición y Δx la incertidumbre o error absoluto. Aquí *unidades* indica la *unidad de medición adoptada*.

Asimismo son muy útiles los siguientes conceptos:

- ✓ la incertidumbre relativa o error relativo, $\varepsilon_x = \dfrac{\Delta x}{x}$, que expresa cuán significativa es la incertidumbre comparada con el valor medido o mejor valor.
- ✓ La incertidumbre relativa porcentual o error relativo porcentual: $\varepsilon\% = \varepsilon_x\ 100\%$.

Estas dos últimas cantidades son más descriptivas de *la calidad de la medición* que el error absoluto. El siguiente ejemplo puede hacer más claro este punto; imaginemos que medimos, con una regla graduada en milímetros, la longitud (l) y diámetro (d) de una mina de lápiz. Si suponemos que dicha mina tiene aproximadamente $l \approx 20$ cm y $d \approx 1$ mm respectivamente; dado que la apreciación nominal de la regla es de 1 mm, ambas magnitudes tendrán el mismo error absoluto ($\Delta d \approx \Delta l \approx 1$ mm). Sin embargo, es claro que la medición de la longitud es de mejor calidad que la del diámetro que se describen claramente por: $\Delta d/d \approx 100\%$ y $\Delta l/l \approx 5\%$.

Otra forma usual de expresar un resultado y su incertidumbre es la notación concisa siguiente: *valor medido (incertidumbre)*, por ejemplo:

$L = 21.1\ (1)$ cm significa $L = 21.1 \pm 0.1$ cm,

o también

$B = 5.076(5) \times 10^{-11}$ m significa $B = (5.076 \pm 0.005) \times 10^{-11}$ m.

En ambos casos, el valor entre paréntesis (*incertidumbre*) está referido al último dígito del valor informado (*valor medido*).

Ejemplo 1. Se realizaron mediciones del radio de la Tierra R_T, su distancia al Sol d_{ST} y la distancia Sol-Marte d_{SM}. Los resultados fueron:

I. $R_T = (6.38 \pm 0.02) \times 10^6$ m
II. $d_{ST} = (1.50 \pm 0.02) \times 10^{11}$ m
III. $d_{SM} = (2.28 \pm 0.02) \times 10^{11}$ m

Compare los errores absolutos y relativos de estas mediciones ¿Cuál de todas estas mediciones tiene "mejor calidad"? ¿Cuál es el parámetro que se ha medido con mayor precisión?

Los errores relativos y absolutos para cada caso son:

I. $\dfrac{\Delta R_T}{R_T} = \dfrac{0.02}{6.38} \approx 0.003$ o sea $\varepsilon_{R_T} \approx 0.3\%$ y ΔR_T=2x10^4 m

II. $\dfrac{\Delta R_{ST}}{R_{ST}} = \dfrac{0.02}{1.5} \approx 0.01$ o sea $\varepsilon_{R_{ST}} \approx 1\%$ y ΔR_{ST}=2x10^9 m

III. $\dfrac{\Delta R_{SM}}{R_{SM}} = \dfrac{0.02}{2.28} \approx 0.009$ o sea $\varepsilon_{SM} \approx 0.9\%$ y ΔR_{SM}=2x10^9 m

El radió de la Tierra (R_T) es el parámetro que tiene "mejor calidad" ya que su error relativo es el menor de los tres. También este parámetro, R_T, es el que fue medido con mayor precisión, ya que tiene menor error absoluto.

4.2 Sensibilidad, precisión, y exactitud

Como vimos, la *sensibilidad de un instrumento o de un método* de medición está asociada a la o menor variación de la magnitud que se pueda detectar con el instrumento o método. Así, decimos que un tornillo micrométrico (con una apreciación nominal de 10 μm) es más sensible que una regla graduada en milímetros; y que un cronómetro con una apreciación de 10 ms es más sensible que un reloj común.

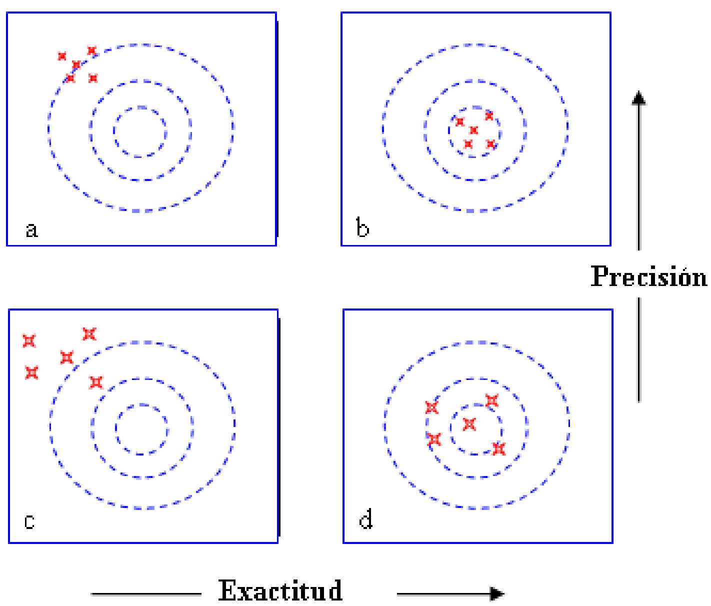


Figura 4.3. Ilustración de modo esquemático de los conceptos de precisión y exactitud de un conjunto de mediciones. Los centros de los círculos indican la posición del "mejor valor" del mesurando y las cruces los valores de varias determinaciones del centro. La dispersión de los puntos da una idea de la precisión, mientras que su centro efectivo (centroide) está asociado a la exactitud. a) Es una determinación precisa pero inexacta, mientras d) es más exacta pero imprecisa; b) es una determinación más exacta y más precisa; c) es menos precisa que a).

Cuando nos referimos a la *precisión de un conjunto de mediciones*, estamos haciendo referencia a la dispersión que presentan los valores obtenidos, mismo mesurando, entre si. La precisión de una serie de mediciones está asociada a la *repetitividad* de la misma, es decir al hecho mediciones repetidas del mismo mesurando, arrojen resultados similares o no. La figura 4.3 ilustra este aspecto de la precisión y su relación con la exactitud

La exactitud de un instrumento o método de medición está asociada a la calidad de la calibración se haya hecho de los mismos, respecto de los patrones estándares (kilogramo patrón, metro patrón, etc.). Cuando hablamos de la exactitud de *un conjunto de mediciones*, estamos haciendo referencia a cuanto se acerca o se desvía el valor medio de estas mediciones del mejor valor de la misma. Esto tiene que ver con el mayor o menor *sesgo* de las mediciones realizadas con un dado método o instrumento de medición.

Por ejemplo, si realizamos un conjunto de mediciones de longitud con una regla dilatada, independientemente de su precisión, el conjunto de mediciones presentará un sesgo respeto de su mejor valor.

Imaginemos que un cronómetro que usamos es capaz de determinar la centésima de segundo pero adelanta dos minutos por hora, mientras que un reloj de pulsera común no lo hace. En este caso decimos que el cronómetro es todavía más sensible que el reloj común, pero menos exacto.

La exactitud de un instrumento es una medida de la calidad de la calibración del mismo respecto de *patrones de medida* aceptados internacionalmente. En general, los instrumentos vienen calibrados, pero dentro de ciertos límites. Es deseable que la calibración de un instrumento sea tan buena como su sensibilidad o apreciación.

4.3 Fuente de errores

Las fuentes de errores tienen orígenes diversos y pueden clasificarse del siguiente modo:

I. Errores introducidos por el instrumento

- ✓ **Error de apreciación**, σ_{ap}**:** si el instrumento está correctamente calibrado la incertidumbre que tendremos al realizar una medición estará asociada a la mínima división de su escala que podemos resolver con algún método de medición. Nótese que el *error de apreciación* se establece como la mínima división discernible y no como la mínima división del instrumento. El error de apreciación puede ser mayor o menor que la apreciación nominal, dependiendo de la habilidad (o falta de ella) del observador. Así, es posible que un observador entrenado pueda apreciar con una regla común fracciones del milímetro mientras que otro observador, con la misma regla pero con dificultades de visión, sólo pueda apreciar 2 mm. La apreciación nominal es una característica del instrumento, pero el error de apreciación depende tanto de instrumento como del observador. El error de apreciación está íntimamente relacionado con la *sensibilidad* del instrumento o método de medición.

- ✓ **Error de exactitud**, σ_{exac}**:** representa el error absoluto con el que el instrumento ha sido calibrado frente a patrones confiables.

- ✓ **Error de interacción, σ_{int}:** proviene de la interacción del método de medición con el objeto a medir. Su determinación depende de la medición que se realiza y su valor se estima de un análisis cuidadoso del método usado.

- ✓ **Falta de definición en el objeto sujeto a medición, σ_{def} :** se origina en el hecho de que las magnitudes a medir no están definidas con infinita precisión. Con σ_{def} designamos la incertidumbre asociada con la falta de definición del objeto a medir y representa su incertidumbre intrínseca.

En general, todas estas fuentes de error estarán presentes en una medición, de modo que resulta útil definir la *incertidumbre o error nominal de una medición* σ_{nom}, como la combinación de todas las incertidumbres identificadas:

$$\sigma_{nom}^2 = \sigma_{ap}^2 + \sigma_{def}^2 + \sigma_{\text{int}}^2 + \sigma_{exac}^2 + \ldots \qquad (4.3)$$

Este procedimiento de sumar los cuadrados es un resultado de la estadística y proviene de suponer que las distintas fuentes de error son todas independientes unas de otras[4],[5]. Los puntos suspensivos indican los aportes de otras posibles fuentes de error. Por ejemplo, una medición de tiempo con un cronómetro manual se ve afectada por el *tiempo de reacción* del operador. En este caso debe incluirse en la Ec. (4.3) un término que tenga en cuenta esta nueva contribución.

Ejemplo 2. Se desea determinar el diámetro del tronco de un árbol, *d*, y el área de su sección transversal, *A*. ¿Cómo procederíamos y cuáles son las fuentes principales de incertidumbre en esta determinación?

Un método podría consistir en medir el perímetro, *P*, con una cinta métrica y luego determinar el diámetro a partir de la relación $P=\pi.d$, usando este valor calculamos el área. En este caso, la mayor contribución a la incertidumbre proviene de la falta de definición del diámetro. Una forma de estimar la incertidumbre sería determinar los valores máximos y mínimos del diámetro usando una serie de mediciones y tomar como $\sigma_{diámetro}$ la semidiferencia de estos valores:

$$\sigma_{def} = \sigma_{diámetro} \cong 1/2\ (D_{máx} - D_{mín}). \qquad (4.4)$$

4.4 Clasificación de los errores

Según su carácter los errores pueden clasificarse en sistemáticos, estadísticos e ilegítimos o espurios.

a) **Errores sistemáticos:** Se originan por las imperfecciones de los métodos de medición. Por ejemplo, pensemos en un reloj que atrasa o adelanta, en una regla dilatada, en el error de paralaje, etc. Los errores introducidos por estos instrumentos o métodos imperfectos afectarán nuestros resultados siempre en *un mismo sentido*.
Los errores de exactitud constituyen una fuente de error sistemático, aunque no son los únicos ni lo mismo. Imaginemos el caso de una balanza bien calibrada que se usa para conocer el peso de las personas en los centros comerciales u otros negocios. Como es usual, en público todas las personas medimos nuestra masa (nos pesamos) vestidos, los valores registrados con estas balan-

zas tendrán un error sistemático debido la masa de la vestimenta. La única manera de detectar y corregir errores sistemáticos es a través de la comparación de nuestras mediciones con otros métodos alternativos y realizando un análisis crítico de los instrumentos y procedimientos empleados. Por esto es aconsejable intercalar en el proceso de medición patrones confiables que permitan calibrar el instrumento durante la medición.

b) **Errores estadísticos:** Son los que se producen al azar. En general son debidos a causas múltiples y fortuitas. Ocurren cuando, por ejemplo, nos equivocamos en contar el número de divisiones de una regla, o si estamos mal ubicados frente al fiel de una balanza. Estos errores pueden cometerse con igual probabilidad tanto por defecto como por exceso. Por consiguiente, midiendo varias veces y promediando el resultado, es posible reducirlos considerablemente. Es a este tipo de errores a los que comúnmente hace referencia la teoría estadística de errores de medición que formularemos sucintamente en siguiente. A estos errores los designaremos con σ_{est}.

c) **Errores ilegítimos o espurios:** Son los que cometemos por equivocación o descuido. Supongamos que deseamos calcular el volumen (V) de un objeto esférico y para ello determinamos su diámetro (d) y usamos la expresión incorrecta: $V=4\pi.d^3/3$, en lugar de la correcta: $V=\pi.d^3/6$. Si al introducir el valor del diámetro en la fórmula nos equivocamos en el número introducido o lo hacemos usando unidades incorrectas, o bien usando una expresión equivocada del volumen, claramente habremos cometido "un error." Esta vez este error es producto de una equivocación. A este tipo de errores los designamos como ilegítimos o espurios. Para este tipo de errores no hay tratamiento teórico posible y el modo de evitarlos consiste en poner mucha atención en la ejecución y análisis de los procedimientos involucrados en las mediciones.

Un error de este tipo puede dar lugar a situaciones graves y hasta dramáticas. Por ejemplo, la misión espacial Mars Climate Orbiter de la NASA fracasó en diciembre de 1999 debido a un error cometido en el cambio de unidades inglesas a unidades métricas en las fórmulas usadas para dirigir su sistema de navegación. Este error produjo que la sonda fuese destruida por la fricción con la atmósfera del planeta.

La expresión final de la incertidumbre Δx de una medición tiene en cuenta todas las distintas contribuciones, de diferente origen y tipo. La prescripción usual es combinarlas de la siguiente manera:

$$\Delta x=\sigma_{ef}=\sqrt{\sigma_{est}^2+\sigma_{nom}^2}=\sqrt{\sigma_{est}^2+\sigma_{ap}^2+\sigma_{def}^2+\sigma_{\mathrm{int}}^2+\sigma_{exac}^2+\ldots} \tag{4.5}$$

A Δx llamamos la *incertidumbre combinada o error efectivo* de la medición.

En 1993, la Organización Internacional de Normalización (ISO) publicó la primera guía oficial a nivel mundial para la expresión de la incertidumbre de medidas. En esta guía, las incertidumbres estadísticas a se denominan *incertidumbres tipo A*, mientras que las que no se corrigen a partir de la repetición de mediciones se suelen asociar a la *incertidumbres tipo B*[6,7,8] que incluye los errores sistemáticos y todos los otros factores de incertidumbre que el experimentador considera importantes y no se corrigen por mediciones repetidas del mismo mesurando. Según esta guía, al informar sobre la medición, el valor medido debe ser reportado, junto con una estimación del total combinado de las incertidumbres tipo A y B del valor. La incertidumbre total o error efectivo se encuentra mediante la combinación los componentes de la incertidumbre similar a como se describe en la Ec.(4.5).

En muchas aplicaciones prácticas y publicaciones científicas, las incertidumbres de cada tipo se expresan en forma separada, de modo de indicar sus respectivas incidencias en el resultado.

Sin embargo, si se desea comparar las mediciones del mismo parámetro o mesurando provenientes de dos o más métodos o experimentos distintos, conviene definir una *incertidumbre efectiva* que englobe a ambas fuentes, de modo de poder verificar si hay o no discrepancia entre las mediciones. En este caso, para obtener la incertidumbre efectiva, las incertidumbre de cada tipo se suman en cuadratura, en forma similar a la indicada por la Ec.(4.5).

Cifras significativas

El resultado de una medición, expresado en la forma $\bar{x} \pm \Delta x$ tiene que ser consistente en cuanto al número de cifras que se informen para el mejor valor $\bar{x}$ y la incertidumbre Δx. Esto tiene que ver con el número de *cifras significativas* que incluyamos en cada una de ellas.

Consideremos una medición realizada con una regla graduada en milímetros. Está claro que, si somos cuidadosos, podremos asegurar nuestro resultado hasta la cifra de los milímetros o, en el mejor de los casos, con una fracción del milímetro, pero no más. De este modo nuestro resultado podría ser

$$L = (95.2 \pm 0.5) \text{ mm}, \tag{4.6}$$

o también

$$L = (95 \pm 1) \text{ mm}. \tag{4.7}$$

En el primer caso decimos que nuestra medición tiene tres *cifras significativas* y en el segundo caso sólo dos. El número de cifras significativas es igual al número de dígitos contenidos en el resultado de la medición que están a la izquierda del primer dígito afectado por el error, incluyendo este dígito. El primer dígito, o sea el que está más a la izquierda, es el más significativo (9 en nuestro caso), y el último, el menos significativo. Nótese que carece de sentido incluir en nuestro resultado de L más cifras que aquellas en donde tenemos incertidumbre. De modo que no es correcto expresar el resultado como, por ejemplo,

$$L = (95.\underline{321} \pm 1)\ \text{mm}, \tag{4.8}$$

ya que si tenemos una incertidumbre del orden de 1 mm, no podemos asegurar en el resultado valores de centésimas y milésimas del milímetro. Operativamente, lo que hacemos es: una vez que calculamos la incertidumbre de la medición redondeamos el valor del mesurando (que puede provenir de un promedio y tener muchas cifras) y adaptamos el número de cifras significativas para que sea compatible con el valor de la incertidumbre.

Es usual expresar las incertidumbres o errores con *una sola cifra significativa*, y solo en casos excepcionales y cuando exista claro fundamento para ello, se pueden usar más. Esto se debe a que por lo general la estimación de los *errores* se realiza con presiones del orden del 10%-50%, los que implica que no se pueda asegurar más de una cifra significativa. Hay casos en los que está justificado usar más de una cifra significativa para los errores. Imaginamos que realizamos una medición de longitud con una regla graduada en pulgadas (1"=1 pulgada=25.4 mm) y divisiones cada $\frac{1}{16}$". Si el resultado fuese $2\frac{3}{16}$" ± $\frac{1}{16}$", cuando reportamos esta medición en el sistema métrico podemos decir que el resultado es: 55.6 ± 1.6 mm, ya que la incertidumbre de $\frac{1}{16}$" equivale a 1.6mm.

Si no se la indica explícitamente la incertidumbre de un resultado, es usual considerar que la incertidumbre es del orden de la cifra menos significativa (la última cifra). Por ejemplo, si sólo disponemos de la información que la masa de un cuerpo es $m = 52.4$ g, podemos suponer que la incertidumbre es del orden de las décimas de gramo, es decir $m = 52.4 \pm 0.1$g.

Una posible ambigüedad se presenta cuando se hace un cambio de unidades. Por ejemplo, si queremos expresar a la longitud $L = (95 \pm 1)$ mm en µm, ¿cuántas cifras significativas debería tener el resultado, tras la conversión de unidades? Si escribimos $L = 95000$ µm, la conversión habrá incrementado el número de cifras significativas de dos a cinco, dando la impresión que hemos medido con un instrumento que aprecia el micrón, cosa que no es cierta. Nótese que 95 mm ≠ 95000 µm (a propósito, es útil comparar los costos de los instrumentos para realizar estas dos clases de determinaciones). Para evitar esta ambigüedad descripta, se emplea la notación científica. Con su uso, la conversión de valores implica sólo la transformación de la unidad, conservado el número de cifras significativas de los valores originales. Cuando aplicamos esto a $L = (95 \pm 1)$ mm obtenemos

$$L = (95 \pm 1)\ \text{mm} = (95 \pm 1) \times 10^3\ \mu\text{m} = (9.5 \pm 0.1) \times 10^4\ \mu\text{m}. \tag{4.9}$$

En efecto, los valores 95 mm y 9.5×10^4 µm tienen el mismo número de cifras significativas. La incertidumbre de 1 mm se ha escrito como 0.1 µm, con una cifra significativa en ambos casos.

4.5 Determinación de los errores de medición

Medición directa única: La discusión presentada hasta aquí, es útil para caracterizar el error o incertidumbre de una magnitud que se mide en forma directa una sola vez. Por ejemplo sirve para determinar el tiempo que tarda la Luna en atravesar la sombra de la Tierra, duración de un eclipse. Sin embargo este es solo una de las situaciones más simples que se pueden presentar en la práctica. Por ejemplo si x es la magnitud medida, su resultado se expresa como:

$$x \pm \Delta x \quad \text{con} \quad \varepsilon_x\% = 100 \cdot \frac{\Delta x}{x}, \tag{4.10}$$

Siendo x el valor medido y Δx su error efectivo.

Mediciones directas repetidas: Muchas veces es posible y deseable realizar múltiples mediciones de una dada magnitud. Esta técnica, posibilita entra otras cosas minimizar los errores estadísticos o aleatorios, que siempre están presentes en una medición. En el capítulo siguiente se discute con más detalle este importante aspecto de las mediciones y modos de optimizar este proceso de medición. Si se realizan N mediciones de un mismo mesurando, el resultado se expresa como:

$$x = \bar{x} \pm \Delta x \quad \text{con} \quad \varepsilon_x\% = 100.\frac{\Delta x}{\bar{x}}, \tag{4.12}$$

Donde $\bar{x}$ es el promedio de las mediciones y Δx la combinación del error efectivo y el error estadístico, que se discute en el próximo capítulo.

Mediciones indirectas: Existen numerosos casos en que la magnitud de interés no se mide directamente, sino que se calcula a partir de otras que si se miden en forma directa. Imaginamos que deseamos conocer el volumen de una esfera maciza, una forma de lograrlo es medir su diámetro y a partir de ella calcular el volumen. La caracterización del error del diámetro se realiza con las pautas discutidas más arriba, pero la determinación del error en el volumen, requiere de uso de técnicas de propagación de errores que desarrollaremos en el Capítulo 6. Por ejemplo, si x e y son las magnitudes que se miden directamente y Z se calcula a partir de ellas tenemos:

$Z=x \pm y$	$\Delta Z^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$
$Z=x.y$ o $Z=x/y$	$\left(\frac{\Delta Z}{Z}\right)^2 = \left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{y}\right)^2$
$Z=f(x,y)$	$\Delta Z^2 = \left(\frac{df}{dx}\right)^2 \Delta x^2 + \left(\frac{df}{dy}\right)^2 \Delta y^2$

Medición de parámetros de un modelo: Hay casos en que la variable de interés resulta del ajuste de una recta u otra función a un conjunto de datos medidos directamente. Por ejemplo la constante k de un resorte que sigue la ley de Hooke: $F=k.x$, siendo F la fuerza aplicada al resorte y x su estiramiento. En este caso medimos las variables F_i y x_i para distintas fuerzas aplicadas y su correspondiente estiramiento. Del grafico de F en función de x determinamos la pendiente, k, de la recta que mejor ajusta estos datos. La pregunta ahora es como calcular el error de esta pendiente. Este importante ejemplo se desarrolla en el Capítulo 7.

4.6 Nonio, vernier o calibre

Petrus Nonius y Pierre Vernier, desarrollaron un instrumento muy útil y versátil para la medición de ángulos con precisión de fracciones de grados. El dispositivo consiste en dos reglas similares contrapuestas, como se muestra en las Figuras 4.2 y 4.4.

La escala pequeña deslizable, denominada nonio o vernier, tiene n divisiones, que coinciden con K divisiones de la escala mayor (regla estándar calibrada). Típicamente, n es un múltiplo decimal (10, 20, 50) y $K= n - 1$. Por ejemplo, si $n = 20$, estas 20 divisiones del nonio ocupan 19 mm. De este modo la distancia entre dos divisiones consecutivas del nonio es: $(n - 1) / n$ unidades. Si la división j del nonio coincide con una división de la regla mayor, entonces al valor indicado por la línea principal o fiel debemos agregar una fracción j/n de la mínima división de la regla y la apreciación nominal del vernier es $1/n$ de la mínima división.

En el caso del vernier de la Fig. 4.4 b): $K = 9$, $n = 10$, la mínima división de la regla es 1 mm, la apreciación de este vernier o nonio es de 0.1 mm. En el ejemplo de la figura, la posición del fiel está entre 4 mm y 5 mm y $j = 3$; por lo que el valor que mide el vernier de la figura corresponde a 4.3 mm.

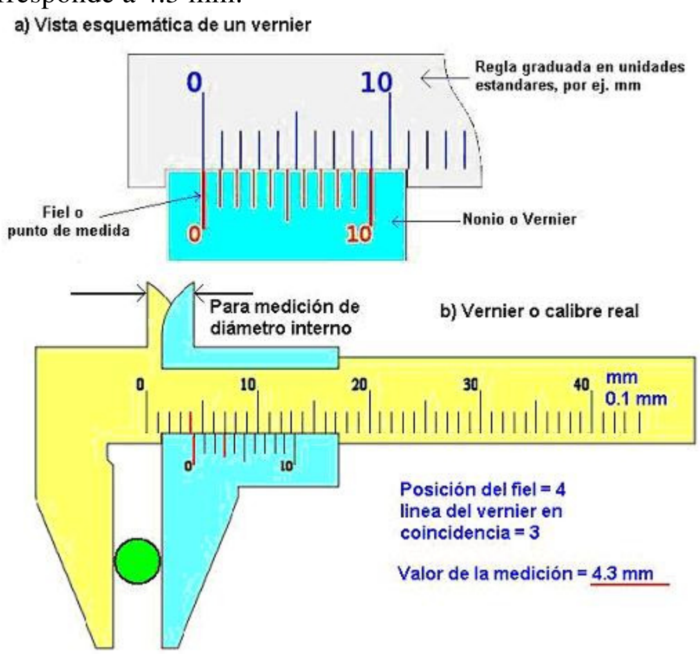


Figura 4.4. Ilustración de un nonio o vernier.

Una descripción más completa de este dispositivo y programas de simulación para practicar su lectura y uso pueden encontrarse en Internet:
http://www.cenam.mx/dimensional/java/Vernier/Vernier_f.htm, y
http://es.wikipedia.org/wiki/Nonio

Resumen de conceptos importantes

Se sugiere que el lector dé una explicación concisa de los siguientes conceptos y, cuando sea posible, indique un ejemplo que ilustre cada uno.

- ✓ Magnitud física y mesurando.
- ✓ Errores de apreciación y de exactitud de los instrumentos, apreciación nominal de los instrumentos de medición.
- ✓ Errores de apreciación, de exactitud, de interacción y de definición.
- ✓ Error nominal de una magnitud que se mide una sola vez.
- ✓ Errores estadísticos, sistemáticos y espurios.
- ✓ Cifras significativas de una medición.

Referencias

(Ver a final)

Ejercicios y problemas

1. Describa brevemente qué son los errores sistemáticos, estadísticos y espurios. En cada caso describa un ejemplo de cada uno de ellos. Lo mismo para el caso de errores de definición, de interacción, de exactitud y de apreciación.

2. Indique como calificaría a los errores siguientes:
   - *a. Un reloj que adelanta 1 min/semana.*
   - *b. Un estudiante toma como pulgadas las medidas de una regla graduada en centímetros.*

3. ¿Cuáles son las fuentes de error de mayor incidencia al medir:
   - *a. el espesor de un soga blanda de algodón con un calibre?*
   - *b. el radio de un árbol?*
   - *c. el ancho de su mesa con una regla metálica graduada en mm?*
   - *d. el diámetro de una bolilla de rodamiento de acero de unos 2 cm de diámetro con un calibre?*

4. Indique brevemente el procedimiento que usaría para medir el diámetro medio del tronco de un árbol y estime la incertidumbre de esta determinación, sin cortar el árbol.

5. Dé el número de cifras significativas de los siguientes valores:

Valor	Número de cifras significativas
72,00	
0,72	
0,0072	
$3{,}80 \times 10^{-3}$	
3,141592	
–300.000	
300.000,00	
0,300000	
5.670,00	
–0,09900	

6. ¿Por qué decimos que 75 m ≠ 75000 mm? ¿Por qué 75 m ≠ 75.00 m?
7. Exprese el resultado de la determinación de un volumen, a partir de los valores que se obtuvieron por cálculo (aplique truncamiento y redondeo para expresar el mejor valor y la incertidumbre con un número de cifras significativas compatibles):

mejor valor: $V = 534{,}5376\ \text{cm}^3$ incertidumbre absoluta: $\Delta V = 0{,}03491\ \text{cm}^3$

$V = (\qquad \pm \qquad)\ \text{cm}^3$

Expreses el mismo resultado en la forma *mejor valor (incertidumbre).*

8. Exprese correctamente los resultados de las siguientes mediciones.

Medición	25.231	41.352	0.8923	253.33	655.3	120.2
Error absoluto	0.0258	0.258	0.0128	36.25	258.3	11.25

En cada caso indique los errores relativos porcentuales e indique cuál de todas estas determinaciones tiene mejor calidad.

9. Se midió una sola vez la longitud de un objeto con un tornillo micrométrico. La longitud medida fue $L = 15.10$ mm.

a. *Dé una estimación del error absoluto y relativo de esta medición.*

b. *Exprese el resultado de esta medición en mm, m y km, respetando el número de cifras significativas. ¿Cuáles son las cifras significativas en este caso? Justifique su respuesta.*

c. *Escriba el resultado de la medición teniendo en cuenta el valor medido y su incertidumbre que proviene de la apreciación del instrumento.*

10. Se dispone de dos relojes. El reloj A tiene una aguja segundera (da un giro completo en un minuto), su fase está dividida en 60 unidades y se sabe que atrasa 10 min por día. El reloj B tiene segundero, pero su fase sólo tiene 24 divisiones, y se sabe que este reloj no adelante ni atrasa más de 5 min en 10 días.

    a. *Estime los errores de apreciación y exactitud de ambos relojes.*

    b. *Si tiene que medir tiempos del orden de los 50 min con un error menor del 0.1%, ¿cual usaría y por qué?*

11. Se midió una sola vez la longitud de un objeto con un calibre de apreciación nominal 1/20 mm. La longitud medida fue L = 15.17 mm. Dé una estimación de los errores absolutos y relativos de esta medición. Escriba el mejor valor de la longitud y su error.

12. Usted ha realizado una serie de mediciones de las cuales debe informar en las formas $\langle A \rangle \pm \Delta A$ y *mejor valor* (*incertidumbre*). Indique como lo haría teniendo en cuenta el número de cifras significativas del mejor valor y la incertidumbre:

    a. $\langle V \rangle = 22.32323$ $\Delta V = 0.002352$

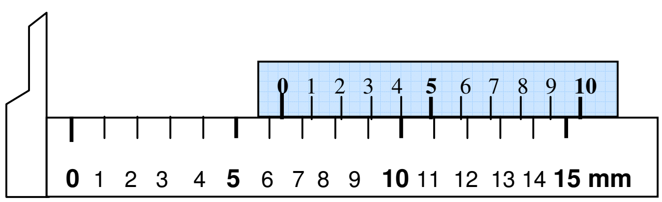
    b. $\langle W \rangle = 2.233259 \times 10^{-2}$ $\Delta W = 1.235 \times 10^{-3}$

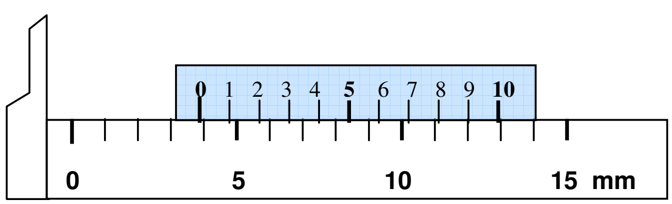
    c. $\langle X \rangle = 2.269$ $\Delta X = 0.022$

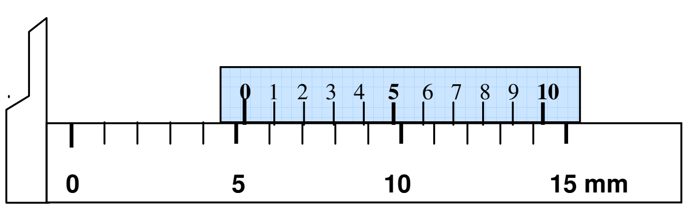
    d. $\langle Y \rangle = 10002{,}909$ $\Delta Y = 23.230$

    e. $\langle Z \rangle = 100.00234$ $\Delta Z = 0.0921$

13. Con un calibre se han realizado las mediciones indicadas en los gráficos. Indique qué valores se han medido y cuáles son sus errores nominales.

A)..


B)..


C)


(Respuesta Probl. 13. A) 6.4 mm, B) 3.9 mm, C) 5.2 o 5.3 mm)

Índice Alfabético

Marcadores	**Nombre Marcador**
magnitud física	*magnitud*
mesurando	*mesurando*
instrumentos de medición	*instrumentos*
unidades de medición	*unidades*
error	error
incertidumbre	Error
incertidumbre absoluta	*Absoluta*
error absoluto	*Absoluta*
precisión	*precisión*
interacción	*Interacción*
definición	*definición*
error relativo	relativo
precisión	*Pres*
exactitud	Exactitud
Apreciación nominal	ap_nom
error de apreciación	apr
sensibilidad	sensibilidad
error de exactitud	Exa
error de interacción	Int
error de definición	Def
error sistemático	Sist
error estadístico	Estad
errores ilegítimos	esp
errores espurios	Esp
cifras significativas	Sig
nonio	Vernier
vernier	Vernier
calibre	Vernier
repetitividad	repetitividad
incertidumbre efectiva	Efecto
Incertidumbre tipo A	INC_a
Incertidumbre tipo B	INC_B

Referencias

[1] S.Allie, A.Buffler,B. Campbell, F.Lubben, D.Evangelinos, D.Psillos, y O.Valassiades, "Teaching Measurement in the Introductory Physics Laboratory," Phys. Teach. **41**, 394-401 (2003).

[2] J.P. Paz, Einstein contra la mecánica cuántica... el azar, la ignorancia y nuestra ignorancia sobre el azar. Conferencia Departamento de Física UBA, 2006, www.df.uba.ar/~paz/borges/einstein.pdf

[3] Estimation theory, From Wikipedia, the free encyclopedia, 2012, http://en.wikipedia.org/wiki/Estimation_theory

[4] P. Bevington and D. K. Robinson, Data reduction and error analysis for the physical sciences, 2nd ed. (McGraw Hill, New York, 1993).

[5] D. C. Baird, Experimentación, 2ª ed. (Prentice-Hall Hispanoamericana S.A., México, 1991).

[6] NIST Constants, Units & Uncertainty - Essential of expressing measurement uncertainty - http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html

[7] Guide to the expression of uncertainty in measurement, 1st ed., International Organization of Standarization (ISO, Suiza, 1993). http://physics.nist.gov/cuu/Uncertainty/index.html.

[8] W.A. Schmid y R.J. Lazoz Martínez, “Guía para estimar la incertidumbre de la medición,” Mayo 200, CENAM, Centro Nacional de Metrología México, www.cenam.mx.