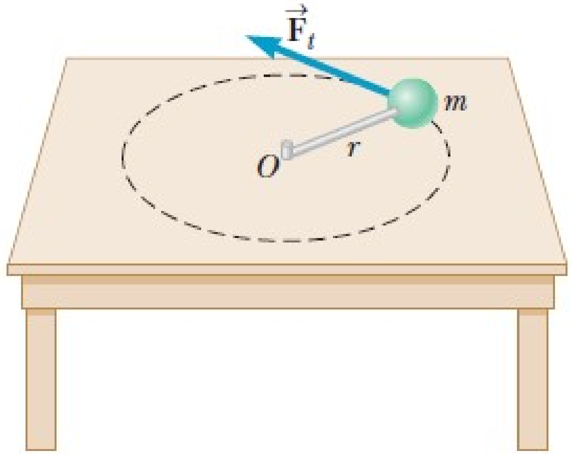
12- Gravitación y movimiento de satélites

El **Sputnik 1** (en ruso Спутник-1, que significa *satélite*) lanzado el 4/10/1957por la Unión Soviética fue el primer satélite artificial de la historia.[1] Tenía una masa de lanzamiento de 83,6 kg y un periodo de 96,2 minutos.

REPASO DE CLASE PASADA

Relación entre el torque y la aceleración angular en un rígido que gira alrededor de un eje fijo



$m.a_t = F_t$

$m.a_t.r = F_t.r$

$m.\alpha.r^2 = F_t.r$

$m.r^2\,\alpha = \tau$

mr^2 se conoce como el ***momento de inercia (I)*** del objeto de masa *m con respecto al punto O.*

$I.\alpha = \tau$

El torque (τ) sobre el objeto es proporcional a la aceleración angular (α) de éste, siendo la constante de proporcionalidad *el momento de inercia (I)*

Se puede generalizar:

$$\sum \tau = I\alpha$$

La **aceleración angular de un objeto rígido es proporcional al torque neto que actúa sobre él, siendo la constante de proporcionalidad el momento de inercia.**

Tanto el torque neto (o sumatoria de torques) como el momento de inercia se calculan respecto al eje de rotación..

REPASO DE CLASE PASADA

El momento de inercia de un sistema de partículas respecto a un cierto eje es igual a la suma de los momentos de inercia de c/u de las partículas respecto al mismo eje.

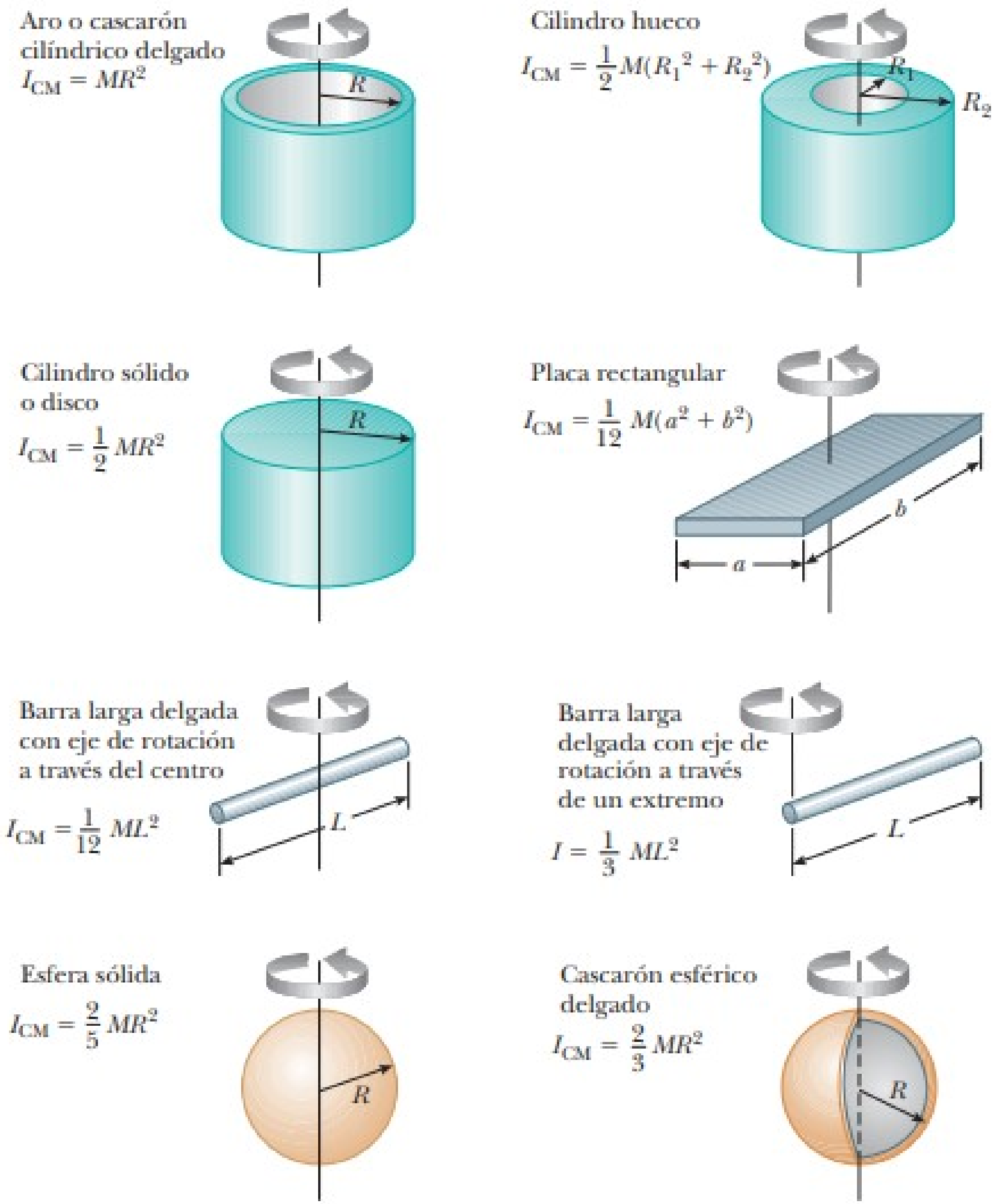
$$I = \sum_i m_i . r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \cdots$$

El momento de inercia de un sistema depende de cómo la masa se distribuye y de la ubicación del eje respecto al cual se calcula I .

Los momentos de inercia para algunos cuerpos con simetría y homogéneos se muestran en la próxima diapositiva.
Se puede utilizar esta tabla cuando necesite determinar el momento de inercia de un cuerpo que tiene las formas mencionadas

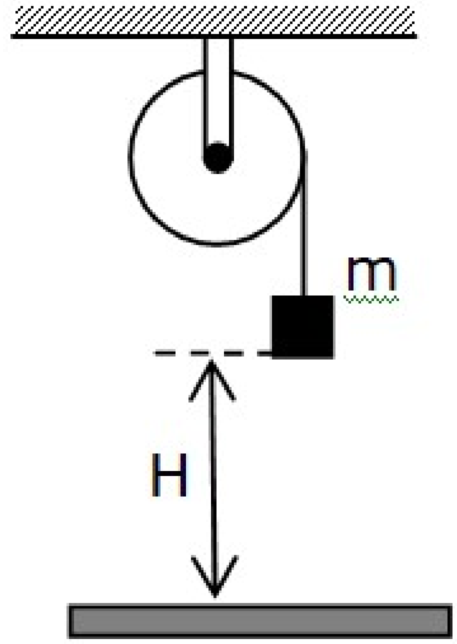
REPASO DE CLASE PASADA

Momentos de inercia de objetos rígidos homogéneos con diferentes geometrías



Ejemplo: Ejercicio 4.15

Examen marzo 2022- a) Un hilo ideal se enrolla sobre una polea de masa **M** y radio **R = 0,210 m**. Con el eje de la polea trabado por un mecanismo de freno, el extremo libre de la cuerda se fija a un cuerpo (puntual) de masa **m = 1,20 kg**, el cual cuelga verticalmente a una altura **H = 1,80 m** del piso (ver figura). En un cierto momento, el eje se destraba y el cuerpo cae arrastrando la cuerda que hace girar a la polea (la cuerda no desliza sobre la polea). Si el cuerpo tarda **1,10 s** en alcanzar el piso, ¿cuánto vale el momento de inercia de la polea, expresándolo en kg.m^2?



La masa cae 1,80 m en 1,10 s, por tanto puedo determinar su aceleración.

$$H = \frac{1}{2}at^2 \qquad \Rightarrow a = \frac{2H}{t^2} = \frac{2(1{,}80)}{(1{,}10)^2} = 2{,}9752\ m/s^2$$

2da. Ley de Newton sobre la masa m: ma= mg – T
por tanto: T= m(g-a) = 1,20(9,80-2,9752) =8,1898 N

2da. Ley de Newton de rotaciones sobre la polea: $I_o\alpha = T.R$

Pero además se cumple que: $\alpha = \dfrac{a}{R}$

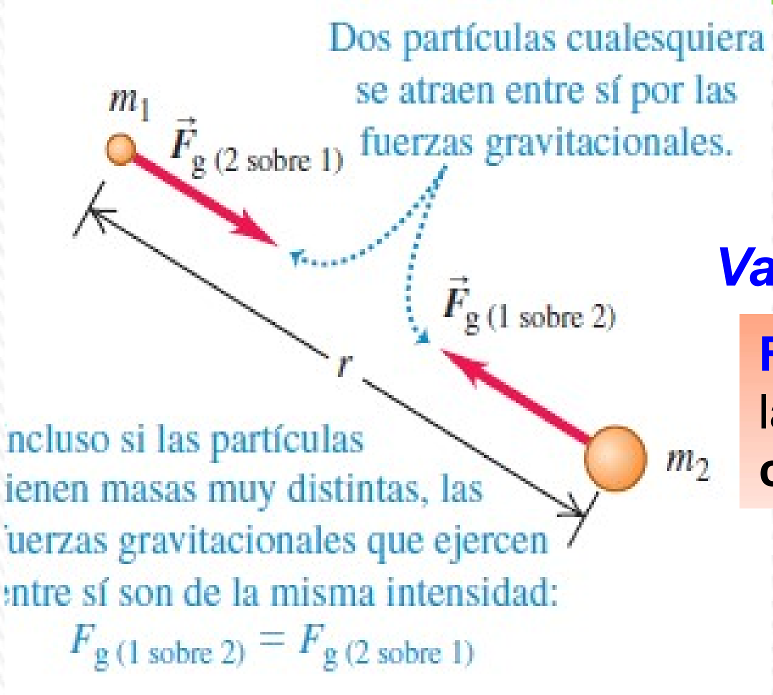
$$I_o\frac{a}{R} = T.R$$

$$I_0 = \frac{TR^2}{a} = \frac{(8{,}1898)(0{,}210)^2}{2{,}9752} = 0{,}121\ kg.m^2$$

I_O =0,121 kg.m^2

REPASO DE CLASE PASADA

La ley de Newton de la gravitación



$$F_g = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

Valor aceptado de G = 6,674×10^{-11} N.m^2/kg^2

Fuerzas gravitacionales actúan a lo largo de la línea que une las dos partículas **(fuerzas centrales)**, y forman un **par acción-reacción**.

PREGUNTA RÁPIDA

Saturno tiene aprox. 100 veces la masa de la Tierra y está alejado del Sol casi 10 veces más que nuestro planeta. En comparación con la aceleración de la Tierra causada por la atracción gravitacional solar,

¿qué tan grande es la aceleración de Saturno debida a la gravitación solar, es decir la aceleración centrípeta respecto al Sol?

i. 100 veces mayor;

ii. 10 veces mayor;

iii. es igual;

iv. 1/10 ;

v. 1/100

Respuesta: v. 1/100. Si bien las fuerzas que experimentan ambos planetas son iguales, la aceleración es igual a dicha fuerza sobre la masa del planeta.

PESO

El peso de un cuerpo es la fuerza gravitacional total ejercida sobre éste por todos los demás cuerpos del Universo.

Si un cuerpo está cerca de la superficie terrestre, se pueden despreciar las demás fuerzas gravitacionales y considerar el peso tan solo como la atracción de la Tierra.

En la superficie de la *Luna, tomaremos el peso de un cuerpo como la atracción gravitacional* de la Luna, y así sucesivamente.

Si de nuevo modelamos la Tierra como un cuerpo esféricamente simétrico con radio R_E *y masa* m_E, *el* ***peso w de un cuerpo pequeño de masa m en la superficie terrestre*** (a una distancia R_E *del centro) es*

$$w = F_g = \frac{G m_E m}{R_E^2}$$

PESO y g

$$w = F_g = \frac{Gm_E m}{R_E^2}$$

Peso *w de un cuerpo es la fuerza* que provoca la aceleración *g en caída libre, de modo que por la segunda ley de Newton, w = mg.*

$$g = \frac{Gm_E}{R_E^2}$$

Podemos obtener el valor de la masa de la Tierra, usando *R_E = 6.380 km = 6,38 ×10^6 m y g = 9,80 m/s^2, se obtiene:*

$$m_E = \frac{gR_E^2}{G} = \frac{(9{,}80)(6{,}38 \times 10^6)^2}{6{,}674 \times 10^{-11}} = 5{,}98 \times 10^{24}\ kg$$

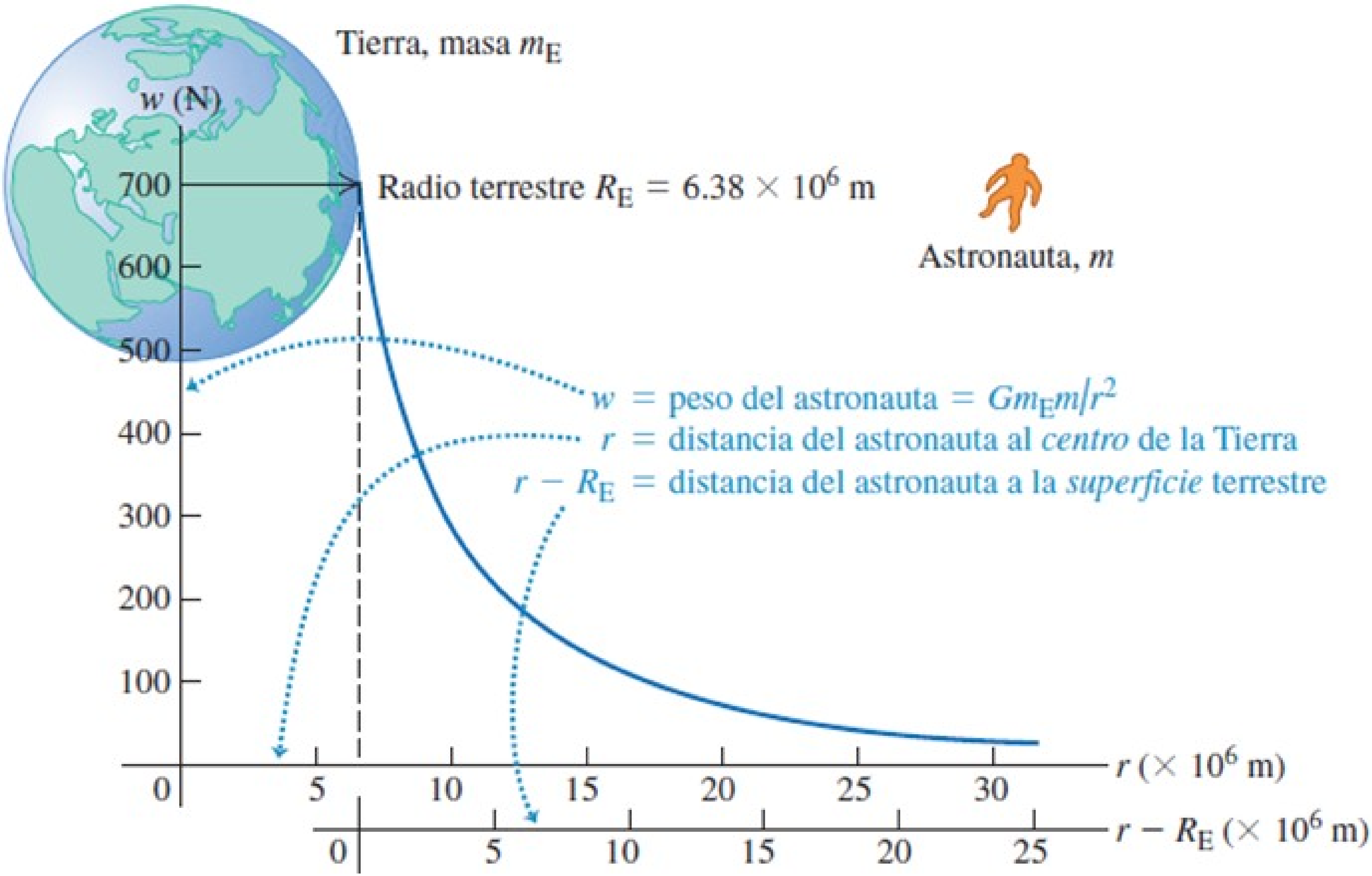
muy cerca del valor actualmente aceptado de 5,974 × 10^{24} kg.
Una vez que Cavendish midió *G, calculó la masa terrestre precisamente así.*

En un punto arriba de la superficie terrestre a una distancia *r del centro de la Tierra* (una altura *h= r - R_E sobre la superficie), el peso de un cuerpo está dado por:*

$$w = F_g = \frac{Gm_E m}{r^2}$$

PESO

El peso de un cuerpo disminuye inversamente con el cuadrado de su distancia al centro de la Tierra. La figura muestra cómo varía el peso de un astronauta en función de su altura sobre la Tierra, si su peso es de 700 N en la superficie.



Valores de g

Tabla 13.1 Variaciones de g con la latitud y la elevación

Estación	Latitud norte	Elevación (m)	$g(m/s^2)$
Zona del Canal	09°	0	9.78243
Jamaica	18°	0	9.78591
Bermudas	32°	0	9.79806
Denver, CO	40°	1638	9.79609
Pittsburgh, PA	40.5°	235	9.80118
Cambridge, MA	42°	0	9.80398
Groenlandia	70°	0	9.82534

Valor normalizado: 9,80665 m/s^2

Polo: 9,832 m/s^2

Ecuador: 9,78 m/s^2

Montevideo: 9,7974 m/s^2

$$g(h) = G\frac{M_T}{(R_T + h)^2}$$

	h = 0 m	h = 1 km	h= 10 km
g	9,8226	9,81949	9,79181
Error (%)		0,031	0,314

DENSIDAD DE LA TIERRA

Aun cuando la Tierra es una distribución de masa con simetría esférica aproximada, *no es uniforme volumétricamente.*

Si calculamos su densidad media, suponiendo una Tierra esférica:

$$V_E = \frac{4}{3}\pi R_E^3 = \frac{4}{3}\pi(6{,}38 \times 10^6)^3 = 1{,}09 \times 10^{21}\ m^3$$

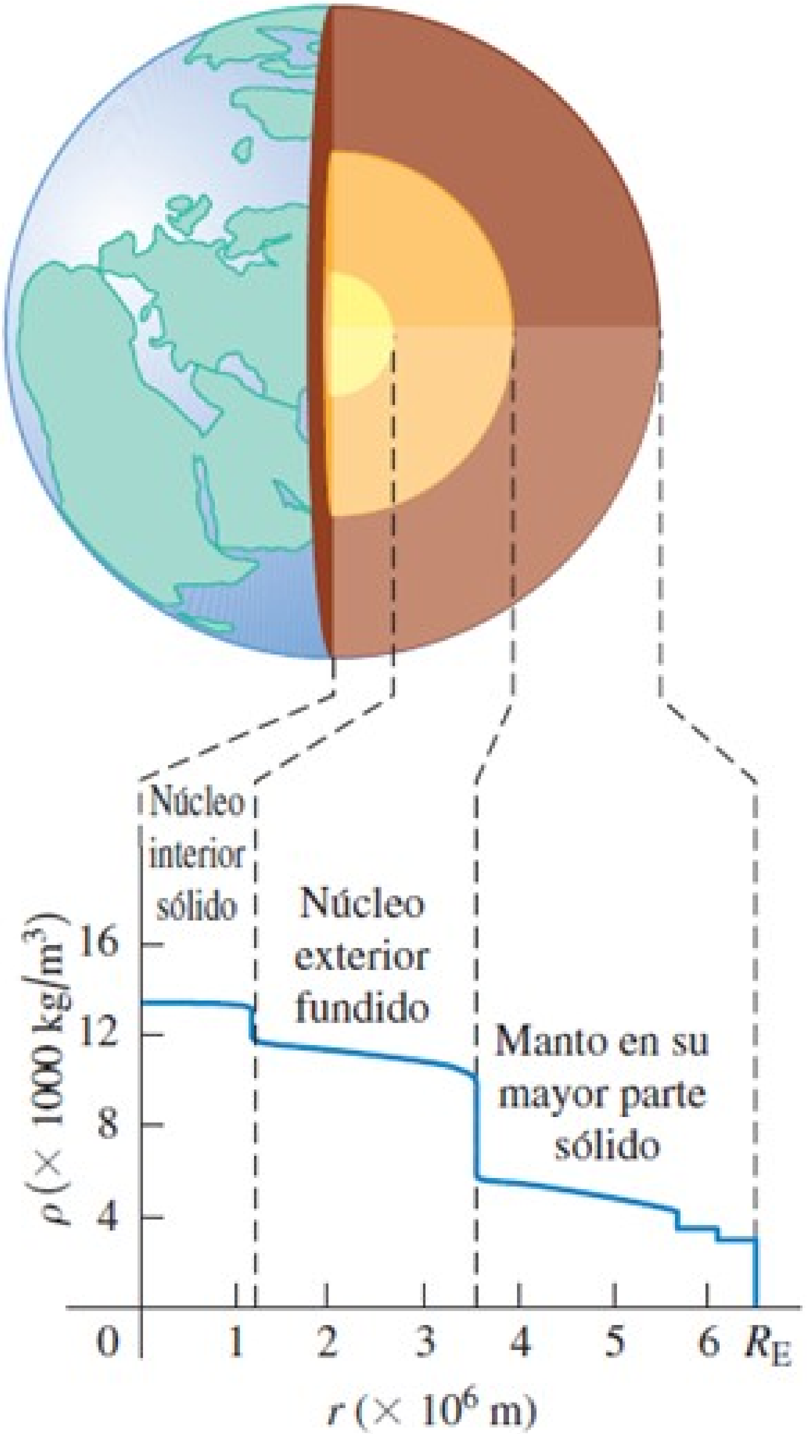
$$\rho_E = \frac{m_E}{V_E} = \frac{5{,}98 \times 10^{24}}{1{,}09 \times 10^{21}} = 5{,}48 \times\times 10^3\ \ kg/m^3$$

Si la Tierra fuera uniforme, la densidad de las rocas cerca de la superficie debería tener ese valor.

Pero la densidad de las rocas superficiales es bastante menor: de 2.000 kg/m^3 para rocas sedimentarias, a cerca de 3.300 kg/m^3 para el basalto (un tipo de roca volcánica).

Por lo tanto, **la Tierra *no puede ser uniforme***, y el **interior debe ser mucho más denso que la superficie** para que la densidad *media sea* de 5500 kg/m^3.

Según modelos geofísicos del interior de la Tierra, la densidad máxima en el centro es de aproximadamente 13,000 kg/m^3.



DENSIDAD DE LA TIERRA

La densidad de la Tierra disminuye al aumentar la distancia al centro.

Ejemplo: Gravedad en Marte

Un vehículo de descenso, que pesa en la Tierra 3.430 N, es enviado a Marte, cuyo radio es R_M = *3,40 ×10⁶ m y cuya masa es* m_M = *6,42×10²³* kg . Calcule su peso F_g *en la superficie marciana* y la aceleración g_M *debida a la gravedad de Marte.*

Masa del vehículo: $$m = \frac{w}{g} = \frac{3430}{9,8} = 350\ kg$$

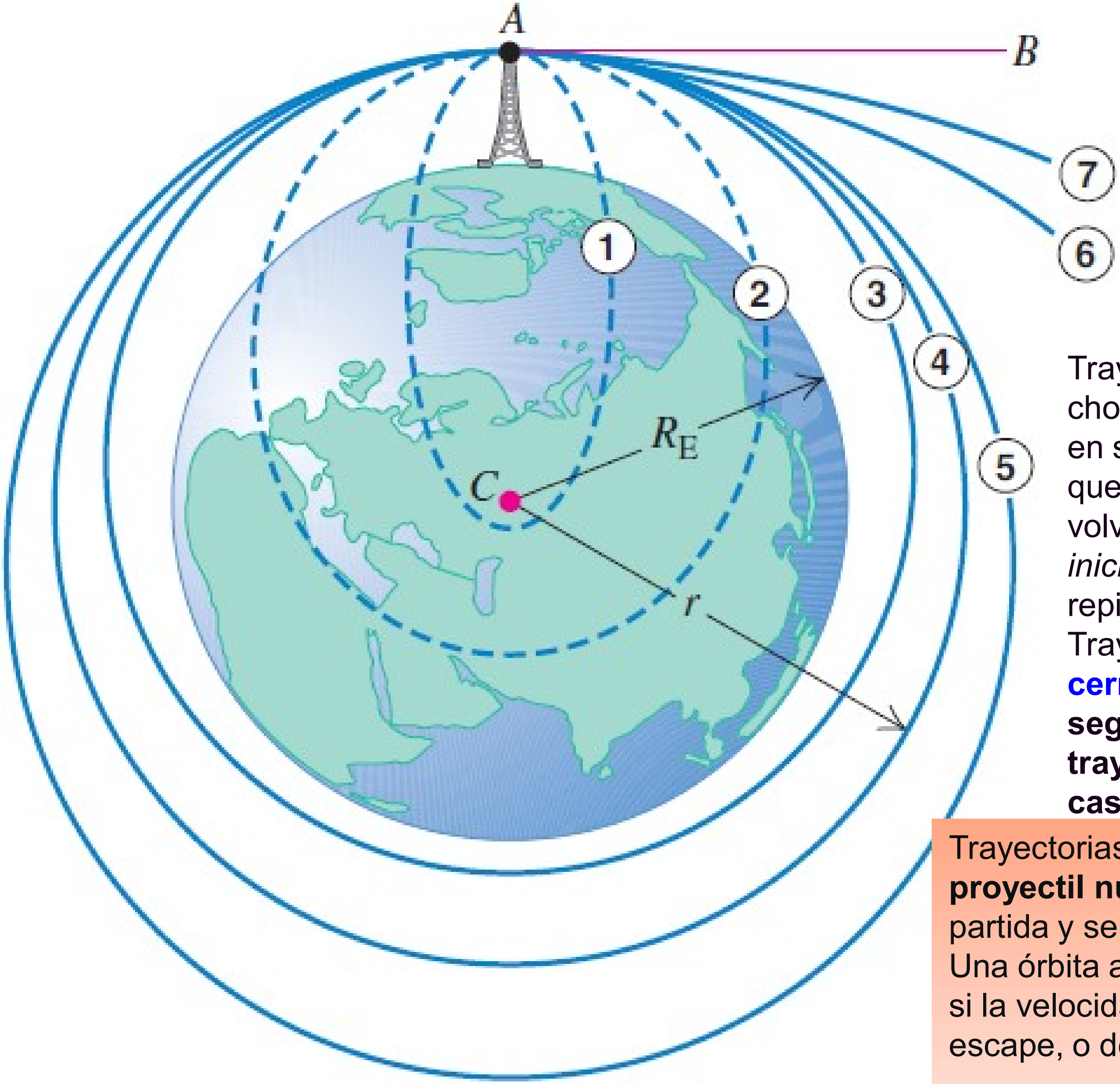
Peso F_g *en la superficie marciana :*

$$F_g = \frac{G m_M m}{R_M^2} = \frac{(6,67 \times 10^{-11})(6,42 \times 10^{23})(350)}{(3,40 \times 10^6)^2} = 1,30 \times 10^3\ N$$

Aceleración g_M *debida a la gravedad de Marte:*

$$g_M = \frac{F_g}{m} = \frac{1,30 \times 10^3}{350} = 3,70\ m/s^2$$

Movimiento de satélites



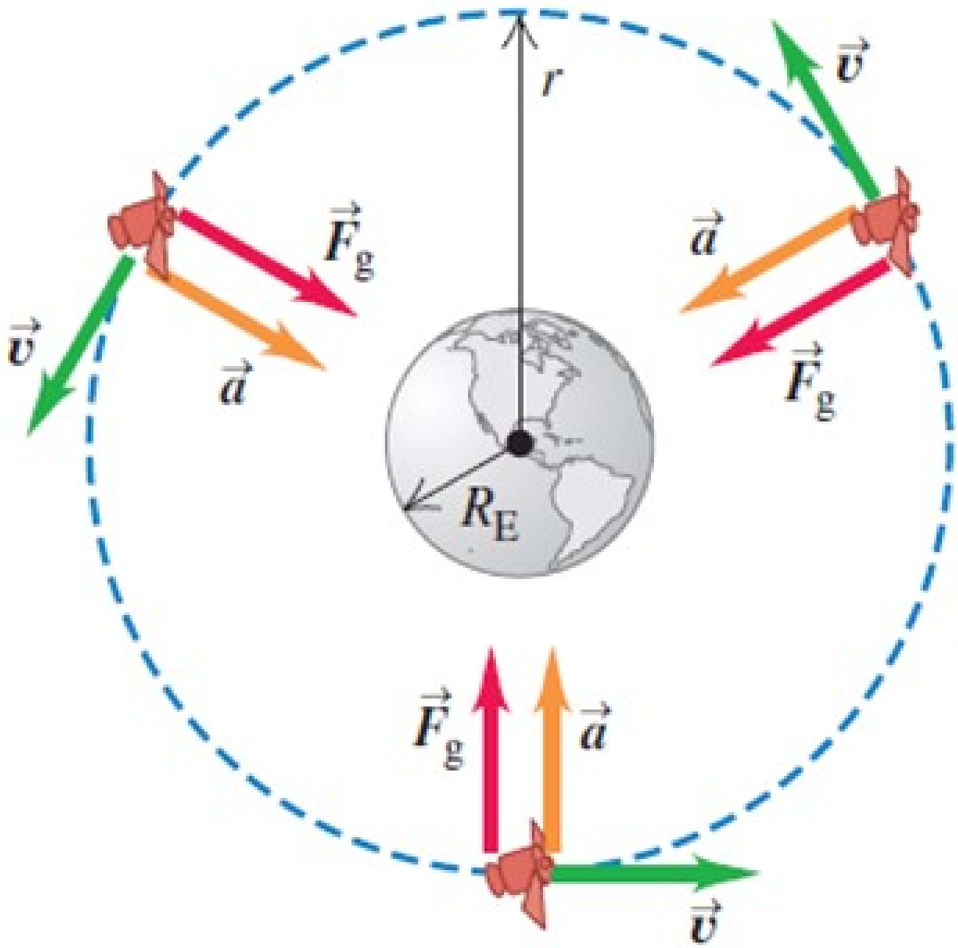
Un proyectil se lanza de *A* a *B*. Trayectorias 1 a 7 muestran el efecto de la rapidez inicial creciente.

Trayectorias 3 a 5, el proyectil no choca contra la Tierra y se convierte en su satélite. Si no hay una fuerza que frene al proyectil, su rapidez al volver al punto *A es la que tenía inicialmente, y el* movimiento se repite indefinidamente.

Trayectorias 1 a 5 **órbitas cerradas: son elipses o segmentos de elipses; la trayectoria 4 es un círculo, un caso especial de la elipse.**

Trayectorias 6 y 7 **órbitas abiertas; el proyectil nunca vuelve** a su punto de partida y se aleja cada vez más de la Tierra. Una órbita abierta tiene forma de hipérbola si la velocidad es mayor que la velocidad de escape, o de parábola si la velocidad es exactamente igual a la velocidad de escape

Satélites: órbitas circulares



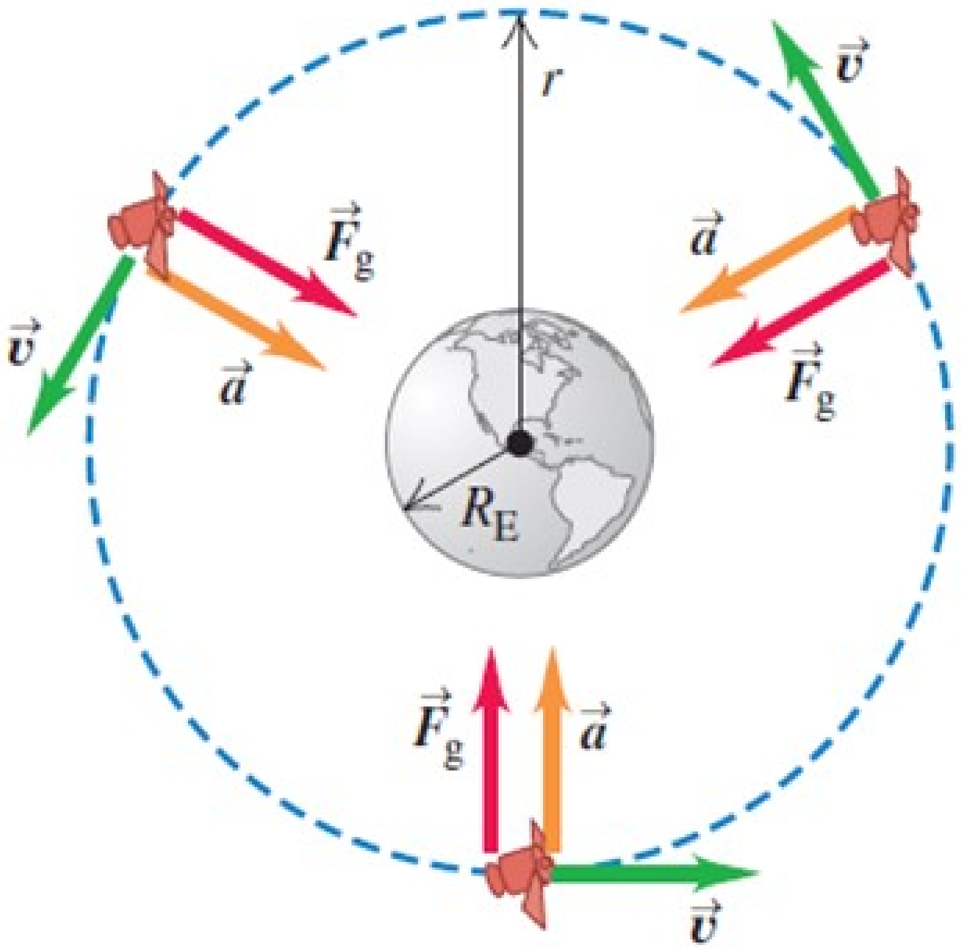
El satélite está en órbita circular: su aceleración $\vec{a}$ es siempre perpendicular a su velocidad $\vec{v}$, por ello, la rapidez v es constante.

Caso más sencillo y muy importante: muchos satélites artificiales tienen órbitas casi circulares, y las órbitas de los planetas alrededor del Sol también son aproximadamente circulares.

La única fuerza que actúa sobre un satélite en órbita circular alrededor de la Tierra es la atracción gravitacional terrestre, dirigida hacia el centro de la Tierra y, por lo tanto, hacia el centro de la órbita.

Esto implica que el satélite está en **movimiento circular *uniforme*** *y su* rapidez es constante.

Satélites: órbitas circulares



El satélite está en órbita circular: su aceleración $\vec{a}$ es siempre perpendicular a su velocidad $\vec{v}$, por ello, la rapidez v es constante.

El satélite no cae *hacia la Tierra; más bien,* ***cae constantemente alrededor de la Tierra****.*

***En una órbita circular, la rapidez es exactamente la necesaria* para mantener constante la distancia entre el satélite y el centro de la Tierra.**

Satélites: órbitas circulares

El radio de la órbita es *r, medido desde el centro de la Tierra; la aceleración del* satélite tiene magnitud $a_{rad} = v^2/r$ *y siempre está dirigida hacia el centro del círculo.*

Por la ley de la gravitación, la fuerza neta (la gravitacional) que actúa sobre el satélite de masa *m tiene magnitud* F_g *y tiene la misma dirección de la aceleración.*

Por la segunda ley de Newton:

$$m\frac{v^2}{r} = G\frac{m_E m}{r^2} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{G m_E}{r}}$$

Rapidez *v* de un objeto en una órbita circular de radio *r* alrededor de un cuerpo de masa *m*:

$$v = \sqrt{\frac{Gm}{r}}$$

Satélites: órbitas circulares

El movimiento del satélite no depende de su masa.

Si pudiéramos partir un satélite a la mitad sin alterar su rapidez, cada mitad seguiría con el movimiento original.

Un astronauta a bordo de un transbordador espacial también es como un satélite de la Tierra, retenido por la atracción gravitacional en la misma órbita que la nave.

El astronauta tiene la misma velocidad y aceleración que la nave, así que nada lo empuja contra el piso o las paredes de la nave.

Se encuentra en un **estado de *ingravidez aparente***, *como en un elevador* en caída libre.

Ingravidez *verdadera:* *solo si el astronauta estuviera infinitamente lejos* de cualquier otra masa, de modo que la fuerza gravitacional sobre él fuera cero.

Satélites: órbitas circulares

Relación entre el radio *r de una órbita circular y el periodo T,* la duración de una revolución:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{Gm_E}{r}}} = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{Gm_E}}$$

$$T = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{Gm_E}}$$

$$GmT^2 = 4\pi^2 r^3$$

Las órbitas más grandes corresponden a rapideces más bajas y a periodos más largos.

Ejemplo, Estación Espacial Internacional orbita la Tierra a 6.800 km del centro de nuestro planeta (400 km arriba de la superficie de la Tierra) con una rapidez orbital de 7,7 km/s y un periodo orbital de 93 minutos.
La Luna gira alrededor de la Tierra en una órbita mucho más grande de radio igual a 384.000 km, y por lo tanto tiene una rapidez orbital menor (1,0 km/s) y un periodo orbital mucho más prolongado (27,3 días).

Ejemplo: Ejercicio 4.6

¿A qué altura sobre la superficie de la Tierra hay que poner en órbita un satélite (suponiendo la órbita circular y sobre el ecuador) para verlo siempre en el mismo lugar del cielo desde nuestra casa?
Este tipo de satélites se denomina **geoestacionario.**

G = 6,674×10^{-11} N.m^2/kg^2 m = 5,972×10^{24} kg T=24×3600=86.400 s =8,640×10^4 s

$$T = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{Gm_E}} \qquad GmT^2 = 4\pi^2 r^3$$

$$r = \left(\frac{6{,}674\times10^{-11}(5{,}972\times10^{24})(8{,}640\times10^4)^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}$$ =4,2240×10^7 m= 42.240 km

Como el radio medio de la Tierra vale 6.341 km: h = 42.240 – 6.341 = 35.861 km

h = 3,59 ×10^7 m

Una órbita geoestacionaria es una órbita circular en el plano ecuatorial terrestre, y un movimiento de Oeste a Este (en el mismo sentido que la rotación de la Tierra). Desde Tierra, un objeto geoestacionario parece inmóvil en el cielo y, por tanto, es la órbita de mayor interés para los operadores de satélites artificiales de comunicación y de televisión.
En realidad se debería considerar como periodo el día sidéreo (23 h 56 min 4 s).

Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

Planeta: del griego "vagabundo": los planetas cambian continuamente su posición en el cielo en relación con el fondo estrellado.

Uno de los grandes logros intelectuales de los siglos XVI y XVII fue darse cuenta de que la Tierra es un planeta, que todos los planetas están en órbita alrededor del Sol y que los movimientos aparentes de los planetas vistos desde la Tierra pueden servir para determinar con precisión sus órbitas.

Primeros descubrimientos publicados:**Nicolás Copérnico (**Polonia, **1543).** Deducción de naturaleza de órbitas planetarias **Johannes Kepler (1601 y 1619)** usando un conjunto de datos precisos acerca de los movimientos planetarios aparentes compilado por su maestro, el danés **Tycho Brahe**. Por medio de ensayo y error, Kepler descubrió tres leyes empíricas que describían con exactitud los movimientos de los planetas:

Las leyes de Kepler y el movimiento de los planetas

1. **Cada planeta se mueve en una órbita elíptica, con el Sol en uno de los focos de la elipse.**

2. Una línea del Sol a un planeta dado barre áreas iguales en tiempos iguales.

3. Los periodos de los planetas son proporcionales a las longitudes del eje mayor de sus órbitas elevadas a la potencia 3/2.

$$T = \frac{2\pi r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{GM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} r^{\frac{3}{2}}$$

Kepler no sabía *por qué los planetas se movían así.*
Tres generaciones después, cuando Newton dirigió su atención al movimiento planetario, descubrió que las leyes de Kepler pueden *deducirse;* ***son consecuencia de las leyes de Newton del movimiento y*** **de la ley de la gravitación**.

Ejemplo: Ejercicio 4.11

Podemos calcular la masa de un planeta poniendo un satélite a girar alrededor del mismo y midiendo el tiempo que demora en completar una vuelta. Si a estos efectos colocamos un satélite con un radio orbital de $4{,}0\text{x}10^7$ km y contamos 122 días para que regrese a su posición inicial. ¿Cuánto vale la masa de este planeta?

$r = 4{,}0\text{x}10^7$ km $= 4{,}0\text{x}10^{10}$ m

$T = 122$ días $= 122\times24\times3600 = 1{,}05408\ \text{x}10^7$ s

$$GmT^2 = 4\pi^2 r^3$$

$$m = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2(4{,}0\times10^{10})^3}{(6{,}674\times10^{-11})(1{,}05408)^2} = 3{,}41\times10^{29}\ \text{kg}$$

$m = 3{,}4\times10^{29}$ kg