Probabilidad 2020 **Centro de Matemática** **Práctico 4**

Variables aleatorias

1. La variable aleatoria X tiene distribución discreta y toma los valores $0, 1, 2$ y 4, con probabilidades $1/2, 1/4, 1/8$ y $1/8$. Hallar la función de distribución $F(x)$ de esta variable aleatoria, y dibujar el gráfico de $y = F(x)$.

2. La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 2)$. Hallar la función de distribución y su densidad. Dibujar los gráficos correspondientes.

3. En el ejercicio 2, calcular $\mathbf{P}(0{,}5 \leq X \leq 1{,}5)$.

4. Consideremos una variable aleatoria X, con distribución normal, con parámetros $(2, 3/2)$. Calcular las siguientes probabilidades: (a) $\mathbf{P}(X \geq 3)$; (b) $\mathbf{P}\big(1 \leq X \leq 4\big)$; (c) $\mathbf{P}(|X - 2{,}5| \geq 0{,}5)$; (d) $\mathbf{P}\big((X-1)^2 \leq 4\big)$.

5. La variable aleatoria X tiene densidad $p(x) = ce^{-|x|}$. (a) Calcular $\mathbf{P}(X \leq 0)$; (b) hallar el valor de la constante c; y (c) calcular $\mathbf{P}(0 \leq X \leq 1)$.

6. La variable aleatoria X tiene distribución normal con parámetros $(3, 4)$. (a) Calcular las probabilidades $\mathbf{P}(X < 0)$ y $\mathbf{P}(-9 < X < 1)$. (b) Hallar el valor de x que cumple la condición $\mathbf{P}(X > x) = 0{,}01$.

7. La variable aleatoria X tiene densidad dada por

$$p(x) = \begin{cases} cx^2, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & \text{si } x < 0 \text{ ó } x > 1 \end{cases}$$

(a) Hallar el valor de c. (b) Hallar la función de distribución de X, y (c) calcular la probabilidad $\mathbf{P}(0{,}1 < X < 0{,}4)$.

8. Una variable aleatoria con función de distribución

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x^2/(2\sigma^2)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

donde $\sigma > 0$, se denomina *distribución de Rayleigh*. Hallar la densidad de esta variable aleatoria, y calcular la probabilidad $\mathbf{P}(0 \leq X \leq \sigma)$.

9. Verificar, que la función dada por

$$p(x) = \begin{cases} \frac{a}{b}\left(\frac{b}{x}\right)^{a+1}, & x > b, \\ 0, & x < b. \end{cases}$$

donde a y b son constantes positivas, es la densidad correspondiente una variable aleatoria, y calcular su función de distribución correspondiente. (Esta distribución se denomina *distribución de Pareto*.)

10. El vector aleatorio (X, Y) tiene distribución discreta, dada en la siguiente tabla:

$x \setminus y$	0	1	2	3
0	0,2	0	0,1	0
1	0,1	0,2	0,1	0
2	0	0,1	0,1	0,1

donde se indican las probabilidades $\mathbf{P}(X = x, Y = y)$, de forma que, por ejemplo, $\mathbf{P}(X = 2, Y = 3) = 0{,}1$. Hallar $\mathbf{P}(X = 0)$, $\mathbf{P}(X = 1)$, $\mathbf{P}(X = 2)$, y la función de distribución de la variable aleatoria X.

11. En las condiciones del ejercicio , calcular $\mathbf{P}(Y = 0)$, $\mathbf{P}(Y = 1)$, $\mathbf{P}(Y = 2)$, $\mathbf{P}(Y = 3)$ y hallar la función de distribución de la variable aleatoria Y.

12. El vector aleatorio (X, Y) tiene densidad dada por

$$p(x, y) = \begin{cases} cxy^2, & 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde c es una constante. Hallar: (a) el valor de c; (b) la función de distribución de la variable aleatoria X; (c) la función de distribución de la variable aleatoria Y; (d) las densidades de las variables aleatorias X e Y.

13. ¿Son independientes las variables aleatorias X e Y del ejercicio ? ¿Son independientes las variables aleatorias X e Y del ejercicio ?

14. En las condiciones del ejercicio , calcular las probabilidades $\mathbf{P}(X \le 1)$, $\mathbf{P}(0{,}5 \le Y \le 1)$ y $\mathbf{P}(X \le 1, 0{,}5 \le Y \le 1)$.

15. El vector aleatorio (X, Y) tiene densidad dada por

$$p(x) = \begin{cases} cxe^{-y}, & 0 \le x \le 1, 0 < y < \infty, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

donde c es una constante. (a) Hallar el valor de c. (b) ¿Resultan independientes las variables aleatorias X e Y?

16. La duración en horas de un cierto tipo de lámpara es una variable aleatoria que tiene densidad dada por

$$p(x) = \begin{cases} 0{,}001e^{-0{,}001x} & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Se elijen al azar 3 lámparas de una cierta partida. Calcular las probabilidades de que: (a) ni una de las lámparas se tenga que cambiar en el transcurso de las primeras 1000 horas; (b) las tres lámparas tengan que ser cambiadas en el mismo lapso de tiempo.

17. Una urna contiene 6 bolas numeradas del 1 al 6. Se eligen al azar, y sin remplazo, 3 bolas. Sea X la variable aleatoria que indica el mayor de los números obtenido en las bolas elegidas. Hallar la función de distribución de la variable aleatoria X, y calcular $\mathbf{P}(X \geq 5)$.

18. La variable aleatoria X tiene función de distribución $F(x)$ y densidad $p(x)$. Hallar la función de distribución y la densidad de la variable aleatoria $Y = aX + b$, donde $a > 0$ y b son constantes.

19. La variable aleatoria X tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Demostrar que la variable aleatoria $Y = 2X - 1$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(-1, 1)$.

20. La variable aleatoria X tiene función de distribución $F(x)$ continua y estrictamente creciente. Demostrar que la variable aleatoria $F(X)$ tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$.

21. Consideremos una variable aleatoria Y con distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$, y sea $F(x)$ una función de distribución continua y estrictamente creciente. Demostrar que la variable aleatoria $F^{-1}(Y)$, donde F^{-1} denota la función inversa de la función F, tiene función de distribución $F(x)$.

22. Construir un ejemplo de dos variables aleatorias distintas, que tengan igual función de distribución.

23. La variable aleatoria X tiene función de distribución $F(x)$. Hallar las funciones de distribución de las variables aleatorias $Y = X^3$ y $Z = -X$.

24. Las variables aleatorias X e Y son independientes, y tienen la misma densidad, dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Demostrar que la variable aleatoria $X + Y$ tiene densidad, dada por

$$g(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

25. Demostrar la siguiente proposición: Si X e Y son variables aleatorias independientes con distribución de Poisson con parámetros λ_1 y λ_2 respectivamente, entonces $X+Y$ es una variable aleatoria con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_1 + \lambda_2$.

26. Sean X e Y variables aleatorias independientes, cada una de las cuales tiene distribución uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Hallar la densidad de $X+Y$.

27. Sean X e Y variables aleatorias independientes, con densidades respectivas $p_1(x)$ y $p_2(x)$. Hallar la densidad de la diferencia $X - Y$.

28. (a) Sea X una variable aleatoria con distribución exponencial de parámetro $\alpha > 0$. Demostrar que

$$\mathbf{P}(X > x + y \mid X > x) = \mathbf{P}(X > y). \tag{1}$$

Esta propiedad se denomina *pérdida de memoria*.

(b) Sea $G\colon [0, \infty) \to \mathbf{R}$ una función real, que verifica $G(0) = 1$, y cumple la ecuación funcional

$$G(x + y) = G(x)G(y) \text{ para todo } x \geq 0,\ y \geq 0.$$

(i) Demostrar que $G(x) = G(1)^x$ para todo x racional. (ii) Demostrar que si además la función $G(x)$ es decreciente, entonces existe $\alpha > 0$ tal que $G(x) = e^{-\alpha x}$. (iii) Concluir que una variable aleatoria que cumple la propiedad (1) tiene distribución exponencial.