

CURSO DE MATEMÁTICA.

Repartido Teórico 4

Mariana Pereira

Noviembre, 2007

1. Ecuaciones Diferenciales

Una ecuación diferencial es una ecuación donde la incógnita es una función de una variable, y la ecuación relaciona a la función con sus derivadas. Muchas leyes de la física, química y biología se pueden expresar naturalmente mediante ecuaciones diferenciales. En este capítulo estudiaremos ciertos tipos particulares de ecuaciones de primer orden (es decir, las ecuaciones involucran únicamente la variable, la función y su derivada primera). Por ejemplo,

$$x'(t) = x(t) - t$$

es una ecuación diferencial (la variables es t) y tenemos que

$$x(t) = e^t + t + 1$$

es una solución, pues:

$$x'(t) = e^t + 1 = (e^t + t + 1) - t = x(t) - t.$$

Notar que $x(t) = Ce^t + t + 1$ con C una constante cualquiera, también es solución.

1.1. Ecuaciones de variables separables

Una ecuación diferencial de variables separables es una ecuación que se puede expresar como

$$f(x(t)) x'(t) = g(t).$$

Veamos algunos ejemplos.

Modelo Malthusiano para el crecimiento de una población

Si $P(t)$ es el tamaño de una población al instante de tiempo t ; se supone que en el instante inicial $t = 0$, el tamaño de la población es $P(0) = P_0$ y que la velocidad de variación de $P(t)$ (o **tasa de crecimiento de $P(t)$**) es decir $P'(t)$, es proporcional al tamaño de la población. De manera que la ecuación que modela esta situación es

$$P'(t) = kP(t)$$

donde k es la constante de proporcionalidad. Esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{P'(t)}{P(t)} = k$$

y por lo tanto tenemos una ecuación diferencial de variables separables. Para resolver esta ecuación, integramos ambos lado de la ecuación con respecto a la variable t :

$$\int \frac{P'(t)}{P(t)} dt = \int k dt.$$

Realizando el cambio de variable $u = P(t)$, tenemos que $du = P'(t) dt$ y por lo tanto:

$$\int \frac{1}{u} du = \int k dt.$$

Ahora calculamos ambas primitivas:

$$\log(|u|) = kt + c,$$

es decir

$$\log(|P(t)|) = kt + c,$$

de donde

$$P(t) = \pm e^{kt+c} = \pm e^{kt} e^c$$

y como

$$P(0) = \pm e^c$$

tenemos que

$$P(t) = P_0 e^{kt}.$$

Verifiquemos que esta función verifica la ecuación (cpln condición inicial)

$$\begin{cases} P'(t) = kP(t) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

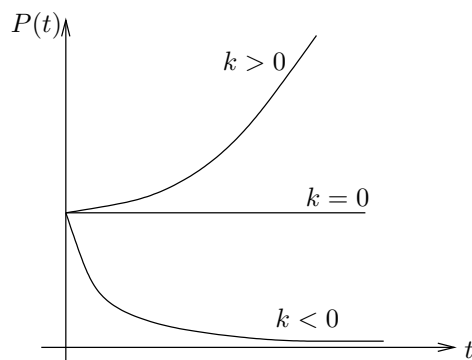
Tenemos

$$P'(t) = (P_0 e^{kt})' = P_0 e^{kt} k = k (P_0 e^{kt}) = k P(t)$$

y además

$$P(0) = P_0 e^0 = P_0.$$

El comportamiento de estas poblaciones se describe en la siguiente figura:



Es decir que si $k > 0$, entonces la población crece exponencialmente, si $k < 0$ la población tiende a extinguirse, y si $k = 0$ entonces la población se mantiene constante.

Ejemplo biológico: difusión de un soluto a través de la membrana celular

Una célula está en un líquido que contiene un soluto, como el potasio, con una concentración constante a . Si $c(t)$ es la concentración del soluto dentro de la célula, el principio de Fick para difusión pasiva a través de la membrana celular establece que la velocidad con que crece $c(t)$ es proporcional a $(a - c(t))$. Supongamos que $c(0) = 0$, busquemos:

1. Plantear y resolver la ecuación diferencial para $c(t)$.
2. Determinar el comportamiento de la solución para $t \rightarrow \infty$.

1. El principio de Fick junto con la condición inicial se puede expresar como:

$$\begin{cases} c'(t) = k(a - c(t)) & k > 0 \\ c(0) = 0 \end{cases}$$

Resolvamos esta ecuación diferencial. Si reescribimos la ecuación obtenemos:

$$\frac{c'(t)}{a - c(t)} = k$$

Procedemos de forma análoga al ejemplo anterior: integramos ambos lados de la ecuación con respecto a t

$$\int \frac{c'(t)}{a - c(t)} dt = \int k dt$$

Para el lado izquierdo, realizamos el cambio de variable $u = a - c(t)$ y por lo tanto $du = -c'(t) dt$ y por lo tanto obtenemos:

$$-\int \frac{1}{u} = kt + C \quad \Rightarrow \quad -\log |u| = kt + C$$

y por lo tanto

$$-\log |a - c(t)| = kt + C \quad \Rightarrow \quad |a - c(t)| = e^{-(kt+C)} = e^{-kt} e^{-C}$$

Es decir,

$$a - c(t) = \pm e^{-kt} e^{-C}$$

Utilizamos ahora la condición inicial ($c(0) = 0$):

$$a - 0 = \pm e^0 e^{-C} \quad \Rightarrow \quad a = \pm e^{-C}$$

y por lo tanto

$$a - c(t) = a e^{-kt}$$

y la solución a la ecuación es

$$c(t) = a - a e^{-kt}$$

2. $\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} a - a e^{-kt} = a$ (pues $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt} = 0$ dado que $k > 0$). Es decir, que la concentración del sustrato en la célula, a medida que pasa el tiempo, se acerca cada vez más a a .

Desintegración radioactiva

Se supone que la velocidad de descomposición de una sustancia radiactiva en cada instante es proporcional a la cantidad de sustancia existente. Si $X(t)$ es la cantidad de sustancia en el instante t , nuestra ecuación será

$$X'(t) = -k X(t)$$

donde $k > 0$ es una constante que depende de la sustancia (el signo negativo es porque la cantidad de sustancia decrece). Si $X(0) = X_0$, procedemos de forma análoga al primer ejemplo y obtenemos

$$X(t) = X_0 e^{-kt}.$$

Observar que en este caso $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$, y por lo tanto la sustancia tiende a desaparecer.

Calculemos ahora cuanto tiempo debe transcurrir para que la masa de la sustancia disminuya a la mitad de la masa inicial. Necesitamos hallar t tal que

$$X(t) = \frac{X_0}{2}.$$

$$X_0 e^{-kt} = \frac{X_0}{2} \Rightarrow e^{-kt} = \frac{1}{2} \Rightarrow -kt = \log(1/2) \Rightarrow$$

$$t = -\frac{\log(1/2)}{k} = \frac{\log(2)}{k}$$

A este valor se lo llama **tiempo de vida media de la sustancia**; observar que no depende de la cantidad inicial de sustancia (X_0), sino que depende únicamente de la constante de proporcionalidad k .

Todos los ejemplos anteriores son ecuaciones de la forma

$$f(X)X' = g(t)$$

(**ecuación diferencial de primer orden de variables separables**).

Este tipo de ecuaciones conviene resolverla en cada caso particular siguiendo los procedimientos de los ejemplos: integramos ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo

$$\int f(X(t))X'(t) dt = \int g(t) dt$$

y realizando el cambio de variable $u = X(t)$ se tiene que $du = X'(t)dt$ y por lo tanto

$$\int f(u) du = \int g(t) dt.$$

De aquí se hallan ambas primitivas (no olvidarse de la constante), se despeja $X(t)$, y de haber condición inicial ($X(t_0) = X_0$), se la utiliza para hallar la constante.

Tenemos el siguiente resultado que no demostraremos:

Teorema 1. La ecuación diferencial $f(X)X' = g(t)$ con g continua en un intervalo I , f continua y que no se anula en un intervalo J , con la condición inicial $X(t_0) = X_0$ (con $t_0 \in I$ y $X_0 \in J$), tiene una única solución definida en un subintervalo de I al cual pertenece t_0

Veamos otros ejemplos:

Ejemplo:

Sea la ecuación diferencial $X' = \frac{3}{X^2}$ con condición inicial $X(0) = 3$. Tenemos entonces

$$X^2 X' = 3 \Rightarrow \int X^2 X' dt = \int 3 dt \Rightarrow \int u^2 du = 3t + c \Rightarrow$$

$$\frac{u^3}{3} = 3t + c \Rightarrow \frac{(X(t))^3}{3} = 3t + c.$$

Como $X(0) = 3$ tenemos que $9 = c$ y despejando $X(t)$ obtenemos :

$$X(t) = \sqrt[3]{9t + 27}.$$

Ejemplo: (Ejercicio de Examen de Matemática I, Julio 2007)

Una población está modelada por $X'(t) = 3(2000 - X(t))$ donde $X(t)$ es el tamaño de la población al instante de tiempo t .

1. Resolver la ecuación diferencial con la condición inicial $X(0) = 200$
 2. Hallar $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t)$
 3. ¿Qué sucede con la población cuando pasa mucho tiempo?
1. Para resolver la ecuación diferencial, la escribimos de tal forma que las $X(t)$ estén únicamente del lado izquierdo de la ecuación:

$$\frac{X'(t)}{(2000 - X(t))} = 3$$

y luego integramos con respecto a t :

$$\int \frac{X'(t)}{(2000 - X(t))} dt = \int 3 dt \Rightarrow \int \frac{1}{(2000 - u)} du = t + C,$$

(realizamos el cambio de variable $u = X(t)$). Por lo tanto

$$-\log|2000 - u| = 3t + C \Rightarrow \log|2000 - X(t)| = -3t - C$$

$$\Rightarrow 2000 - X(t) = \pm e^{-3t} e^{-C}.$$

Utilizando la condición inicial $X(0) = 200$ obtenemos que $\pm e^{-C} = 1800$ y por lo tanto

$$X(t) = 2000 - 1800 e^{-3t}.$$

2. $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} 2000 - 1800 e^{-3t} = 2000$
3. La población tiende a estabilizarse en 2000 individuos.

1.2. Ecuaciones lineales de primer orden

Una ecuación diferencial de la forma

$$X'(t) + a(t)X(t) = b(t)$$

donde a y b son funciones (de t) continuas en un cierto intervalo I , es una **ecuación diferencial lineal de primer orden**.

Teorema 2. *La ecuación $X' + aX = b$ con la condición inicial $X(t_0) = X_0$ donde a y b son funciones de t continuas en un intervalo I (y $t_0 \in I$), tiene una única solución.*

Veamos como son las soluciones a la ecuación

$$X'(t) + a(t)X(t) = b(t).$$

Sea $A(t)$ una primitiva de $a(t)$, es decir $A'(t) = a(t)$.

Si multiplicamos ambos lados de la ecuación por $e^{A(t)}$ obtenemos:

$$X'(t) e^{A(t)} + a(t)X(t) e^{A(t)} = b(t) e^{A(t)}.$$

Observar que el lado izquierdo de la ecuación es $(X(t) e^{A(t)})'$ y por lo tanto $X(t) e^{A(t)}$ es una primitiva de $b(t) e^{A(t)}$, es decir

$$X(t) e^{A(t)} = \int b(t) e^{A(t)} dt.$$

Por lo tanto, si $F(t)$ es una primitiva de $b(t)e^{A(t)}$ tenemos que

$$X(t) e^{A(t)} = F(t) + C \quad \Rightarrow \quad X(t) = e^{-A(t)} (F(t) + C).$$

Es decir, las soluciones a la ecuación $X' + aX = b$ son de la forma

$$X(t) = e^{-A(t)} (F(t) + C) \text{ donde}$$

$$A(t) \text{ es una primitiva de } a(t) \text{ y}$$

$$F(t) \text{ es una primitiva de } b(t)e^{A(t)}$$

Veamos algunos ejemplos:

Caída de un cuerpo en un medio resistente

Un cuerpo de masa m es lanzado a gran altura en la atmósfera terrestre. Suponemos que cae en línea recta y que las únicas fuerzas que actúan sobre él son la gravedad (mg) y una fuerza resistente (debida al rozamiento del aire) que es proporcional a la velocidad del cuerpo. Estudiemos el movimiento resultante.

Sea $v(t)$ la velocidad del cuerpo en el instante t , con $v(0) = v_0$ su velocidad inicial; $a(t) = v'(t)$ es la aceleración del cuerpo en el instante t . Como Fuerza total = masa \times aceleración tenemos que la ecuación del movimiento es

$$m a(t) = m g - kv(t),$$

es decir

$$v'(t) + \frac{k}{m}v(t) = g$$

con $k, m > 0$.

Obtenemos una ecuación lineal de primer orden; para resolverla necesitamos: $A(t)$, una primitiva de $\frac{k}{m}$; es decir

$$A(t) = \frac{k}{m}t.$$

Ahora

$$\int g e^{\frac{k}{m}t} dt = g \frac{m}{k} e^{\frac{k}{m}t} + C$$

y por lo tanto

$$v(t) = e^{-\frac{k}{m}t} \left(g \frac{m}{k} e^{\frac{k}{m}t} + C \right)$$

es decir

$$v(t) = \frac{gm}{k} + C e^{-\frac{k}{m}t}$$

Para obtener $v(t)$ solo resta calcular C . Sustituimos $t = 0$ en la solución:

$$v_0 = \frac{gm}{k} + C \quad \Rightarrow \quad C = v_0 - \frac{gm}{k}$$

y por lo tanto

$$v(t) = \frac{gm}{k} + \left(v_0 - \frac{gm}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Para terminar el análisis de este ejemplo hacemos las siguientes observaciones:

1. $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{gm}{k}$, que no depende de v_0 . (Este límite se llama velocidad de régimen).
2. $a(t) = v'(t) = -\frac{k}{m} \left(v_0 - \frac{gm}{k}\right) e^{-\frac{k}{m}t}$. Por lo tanto $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$; es decir que la resistencia del aire tiende a equilibrar la fuerza de la gravedad.

Un problema de disolución

Un depósito contiene 100 litros de una solución salina cuya concentración inicial es de 2,5 gramos de sal por litro. Una solución conteniendo 2 gramos de sal entra al depósito a razón de 5 litros por minuto. La mezcla se hace uniforme y sale a la misma velocidad. Se quiere determinar la cantidad de sal que hay en el depósito en cada instante.

Sea $X(t)$ la cantidad de sal que hay en el depósito en cada instante t . Tenemos que $X(0) = 2,5 \times 100 = 250$. la velocidad de cambio de $X(t)$, es decir $X'(t)$ es la velocidad con la que entra la sal al depósito menos la velocidad con la que sale. Tenemos que la sal entra al depósito con una velocidad de $2 \times 5 = 10$ gramos por minuto. En el instante t , la cantidad de sal en el depósito es de $X(t)$; es decir que cada litro contiene $\frac{X(t)}{100}$ gramos de sal. Y como el agua sale a una velocidad de 5 litros por minuto, tenemos que la sal, en ese instante sale con velocidad de $\frac{X(t)}{100} 5 = \frac{X(t)}{20}$ gramos por minuto. Por lo tanto tenemos que

$$X'(t) = 10 - \frac{X(t)}{20} \quad \Rightarrow \quad X'(t) + \frac{X(t)}{20} = 10$$

y tenemos una ecuación lineal de primer orden. Resolvemos esta ecuación de forma análoga al ejemplo anterior. Necesitamos $A(t)$ una primitiva de $\frac{1}{20}$. Entonces $A(t) = \frac{1}{20}t$. Ahora

$$\int 10e^{\frac{1}{20}t} dt = 10 \cdot 20 e^{\frac{1}{20}t} + C = 200 e^{\frac{1}{20}t} + C$$

y por lo tanto

$$X(t) = e^{-\frac{1}{20}t} \left(200 e^{\frac{1}{20}t} + C\right) = 200 + C e^{-\frac{1}{20}t}.$$

Resta hallar la constante C ; utilizamos el dato que $X(0) = 250$:

$$250 = 200 + C \quad \Rightarrow \quad C = 50$$

y por lo tanto

$$X(t) = 200 + 50 e^{-\frac{1}{20}t}.$$

Observar que $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 200$; es decir, la concentración límite en el depósito es la concentración de la solución que entra.