Notas sobre ecuaciones diferenciales autónomas

Considérese una ecuación del tipo

$$x' = f(x)$$

donde la incógnita es una función $x(t)$. Este tipo de ecuaciones se llaman autónomas porque la función f no depende de la variable independiente t. Observe que son ecuaciones de variables separables. Existe un método para resolverla, lo que no quiere decir que siempre se pueda resolver (es posible que las integrales que aparezcan no se puedan calcular). Por otro lado, el hecho de que la ecuación sea de variables separables implica que existe una única solución de la ecuación que satisface $x(t_0) = x_0$ si $f(x_0) \neq 0$.

Por ejemplo la ecuación $x' = \lambda x$ para el crecimiento de una población es una ecuación de este tipo. En general las ecuaciones de evolución son de este tipo. Intuitivamente, el hecho de que la f no dependa de t dice que una solución de la ecuación que en t_0 valga x_0, tendrá la misma evolución que aquella que en el instante t_1 vale x_0. Esta propiedad se expresa formalmente de la siguiente manera: si $x(t)$ es la solución que en t_0 vale x_0, entonces $x(t+T)$ es la solución que en t_1 vale x_0, donde $T = t_0 - t_1$. Gráficamente esto significa que una solución se obtiene corriendo la otra T unidades hacia la izquierda. Esta propiedad se demuestra usando la unicidad de las soluciones de las ecuaciones en variables separables.

Otra manera de entender el significado de una ecuación autónoma es el siguiente: si $x(t)$ es una solución, entonces su derivada en el punto t depende solamente del valor de la función $x(t)$ y no de t. Por lo tanto para saber si una solución será creciente en un determinado momento t, basta conocer el signo de la función f en el valor $x(t)$. Así, si f es positiva en x, una solución que valga x en algún instante será creciente, sin importar cual sea ese instante. Además, si la f vale 0 en un cierto valor a entonces una solución que en t_0 vale a tendrá derivada 0 en ese punto. Como además no tiene "motivo" para aumentar o disminuir, resulta que es constante. Es claro que esto se puede demostrar, y es muy fácil: se define la función constante $x(t) = a$ y se verifica inmediatamente que $x(t)$ es solución de la ecuación $x' = f(x)$ con condición inicial $x(t_0) = a$; luego por la unicidad de soluciones se concluye que esta es la solución. Esto nos conduce a la siguiente definición:

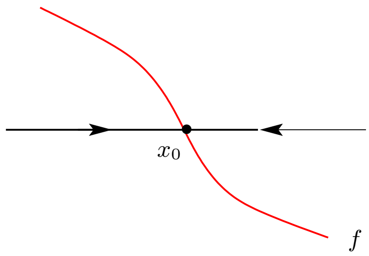
Definición 1. Un punto x_0 se llama punto de equilibrio de la ecuación $x' = f(x)$ si $f(x_0) = 0$. En este caso, la solución que en algún instante t valga x_0, será necesariamente constante igual a x_0.

Si se tiene un modelo poblacional, el hecho de que x_0 sea un punto de equilibrio significa que, si la población inicial es x_0, entonces se mantendrá en este valor en el futuro. Cabe preguntarse qué sucede si en vez de valer exactamente x_0 el valor inicial de la población es cercano a x_0. Podría suceder que el modelo que se está considerando sufra una pequeña alteración en un cierto momento (por ejemplo una guerra, o una repentina inmigración), y se quiere saber si después de esta perturbación la población volverá a estabilizarse en el valor

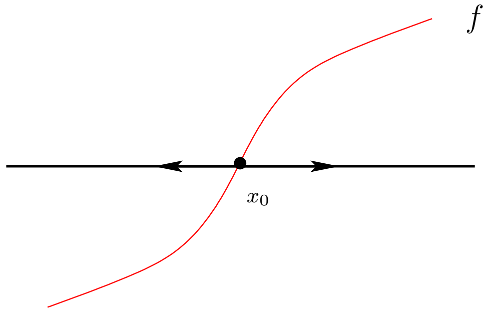
x_0 o si en cambio tomará otro rumbo completamente distinto. Planteamos así la siguiente definición:

Definición 2. Un punto de equilibrio x_0 es estable si existe un entorno de x_0 tal que toda solución que en algún instante t caiga en ese entorno permanecerá dentro de él en el futuro y tenderá a x_0 cuando el tiempo t tiende a $+\infty$. En caso contrario, el punto de equilibrio se llamará inestable.

Ahora, sería bueno saber cómo decidir si el punto de equilibrio es estable o no. Para esto volvamos a la argumentación de arriba: si la función f es positiva en x toda solución que en un cierto valor t sea igual a x tendrá que ser creciente en el instante t. Por lo tanto, si $f(x_0) = 0$ y $f(x)$ es positiva en un semientorno izquierdo de x_0, entonces para cualquier x en ese entorno, se tiene que la solución que pasa por x crece y por lo tanto se mantendrá en el entorno y tenderá a x_0. Si, en cambio, $f(x)$ es negativa en un semientorno izquierdo de x_0, entonces la solución que valga x decrecerá, alejándose así de x_0. El mismo tipo de consideraciones sirve para un entorno derecho de x_0.

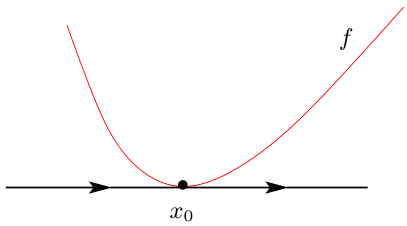


Estable

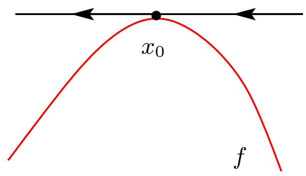


Inestable

Notar que, en particular, si en un entorno reducido de x_0 el signo de f es constante, entonces x_0 es inestable:



Inestable



Inestable

Concluimos los siguientes resultados:

Proposición 1 (Criterio de estabilidad)**.** *Un punto de equilibrio x_0 es estable si $f(x)$ es positiva en un semientorno izquierdo de x_0 y negativa en uno derecho.*

Proposición 2 (Criterio de inestabilidad)**.** *Un punto de equilibrio x_0 es inestable si $f(x)$ es negativa en un semientorno izquierdo de x_0 o positiva en uno derecho.*

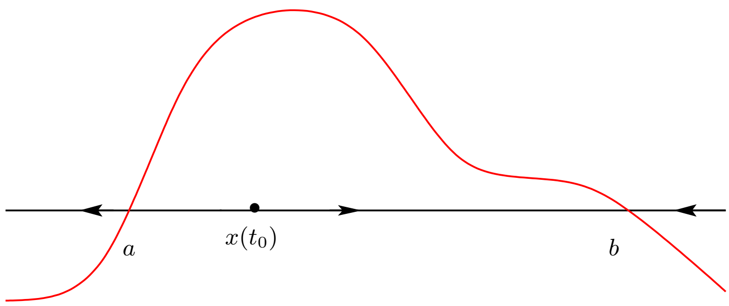
Si f es una función derivable, la condición de la Proposición 1 es verificada siempre que $f'(x_0) < 0$, y entonces se tiene el siguiente corolario:

Corolario 3. *Un punto de equilibrio x_0 es estable si $f'(x_0) < 0$*

Idénticas consideraciones permiten afirmar también:

Corolario 4. *Un punto de equilibrio x_0 es inestable si $f'(x_0) > 0$*

Finalmente, observamos que, aún cuando una ecuación autónoma no pueda resolverse por lo complicadas que puedan ser las integrales involucradas, de todos modos es posible calcular el límite de una solución cuando t tiende a $\pm\infty$. En efecto, supongamos que se tiene determinado el signo de la función f y que x es una solución cuyo valor en algún instante t pertenece a un intervalo (a, b) donde f es positiva y que $f(b) = 0$. Entonces x es una función creciente, y sólo dejaría de ser creciente si en algún momento $x(t)$ se pasa de b. Pero esto no es posible porque el punto b es de equilibrio, y si x alcanza alguna vez el valor b quiere decir que es b para todo t. Se concluye que la solución es creciente para todo $t > 0$, y resta ver hasta donde llega, es decir, queremos saber todavía cuánto vale el $\lim_{t\to+\infty} x(t)$, que sabemos que existe porque la $x(t)$ es creciente. Afirmamos que el límite es precisamente b: en efecto, si fuera menor, sería algún $\alpha < b$ donde la f es positiva, y entonces $x'(t)$ es mayor que una constante positiva a partir[1] de un cierto t, y eso es absurdo ya que implicaría que la $x(t)$ tiende a $+\infty$.



La conclusión es la siguiente:
si $x(t_0)$ pertenece a un intervalo donde f es positiva, entonces $\lim_{t\to+\infty} x(t) = b$, donde b es la menor de las raíces de f mayores que $x(t_0)$. Si no hay raíces de f a la derecha de $x(t_0)$, entonces el $\lim_{t\to+\infty} x(t) = +\infty$
Idénticas consideraciones permiten afirmar que:
si f es negativa en un intervalo que contiene a $x(t_0)$, entonces $x(t)$ es decreciente y tiende a la mayor raíz de f a la izquierda de $x(t_0)$. Como antes, si no hay raíces a la izquierda de

[1] En efecto, supóngase que $\lim_{t\to\infty} x(t) = \alpha \in (a, b)$, y sea $\epsilon \in (0, f(\alpha))$. Entonces $\lim_{t\to\infty} x'(t) = \lim_{t\to\infty} f\big(x(t)\big) = f(\alpha) > \epsilon$, de donde existe t_0 tal que $x'(t) \geq \epsilon$ si $t \geq t_0$, y por lo tanto: $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} x'(s)ds > x(t_0) + \epsilon(t - t_0)$, que tiende a ∞ cuando $t \to \infty$.

$x(t_0)$, entonces el límite es $-\infty$.

Ejemplo : El siguiente es un modelo para la temperatura de un fluido:

$$x' = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$$

donde $x(t)$ indica la temperatura en el instante t. Si intentamos resolverla como las ecuaciones de variables separables, quedaría

$$\frac{x'}{(x^2 - 3x + 2)e^{-x}} = 1$$

o sea

$$\int \frac{1}{(x^2 - 3x + 2)e^{-x}} dx = \int 1 dt$$

y la integral de la izquierda parece difícil de calcular. Puede ser que nuestro interés sea averiguar si la temperatura llegará a 0 o no y cuáles son los estados de equilibrio estables del sistema.
Para eso estudiamos el signo de la función $f(x) = (x^2 - 3x + 2)e^{-x}$:

$$\begin{array}{ccccc} + & 0 & - & 0 & + \\ \hline & 1 & & 2 & \end{array}$$

Los puntos de equilibrio (o sea las raíces de f) son $x = 1$ y $x = 2$; se tiene que f es negativa entre 1 y 2 y positiva fuera del intervalo $[1, 2]$.
Por lo tanto obtenemos las siguientes conclusiones:

1. Como f es positiva a la izquierda de 1 y negativa a su derecha, resulta que 1 es punto de equilibrio estable.
2. Como f es negativa a la izquierda de 2 y positiva a su derecha, resulta que 2 es punto de equilibrio inestable.
3. Si la condición inicial es $x_0 < 1$ entonces la solución tenderá al punto de equilibrio 1.
4. Si la condición inicial es $x_0 \in (1, 2)$ entonces la solución tenderá al punto de equilibrio estable: 1.
5. Si la condición inicial es $x_0 > 2$ entonces la solución tenderá a $+\infty$.
6. Si la temperatura inicial es positiva, entonces se mantendrá positiva en el futuro.