

EXAMEN MARZO 2026 - PRÁCTICO

1. Consideramos la ecuación diferencial

$$\dot{x} = \cos(t + x).$$

- a) Encontrar las soluciones de la forma  $x(t) = at + b$ .
- b) Probar que existe una única solución para cada condición inicial cuyo intervalo maximal es  $\mathbb{R}$ .
- c) Determinar el lugar geométrico de los máximos y mínimos locales de las soluciones y bosquejarlas.

2. Consideramos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Determinar la matriz fundamental de la ecuación  $\dot{x} = Ax$  y dar una expresión para la solución con condición inicial  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$ .
- b) Resolver el problema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + (t^2, t) \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

3. Encontrar una función  $u : [0, \pi] \times [0, +\infty)$  de clase  $C^2$  que cumpla las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) & \text{para todo } (x, t) \in (0, \pi) \times (0, +\infty) \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{para todo } t \geq 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x) & \text{para todo } x \in [0, \pi] \end{cases}$$

**No se permite usar material.  
Justificar todas las respuestas.**

## Solución

1. a) Imponiendo la ecuación tenemos

$$a = (at + b)' = \cos(t + at + b) = \cos((1 + a)t + b).$$

Como la parte izquierda no depende de  $t$  deducimos  $a = -1$ . Luego la igualdad  $-1 = \cos(b)$  nos da  $b = \pi + 2k\pi$  para  $k \in \mathbb{Z}$ .

Tenemos entonces que hay infinitas soluciones afines y son todas las funciones de la forma

$$x(t) = -t + (2k + 1)\pi$$

con  $k \in \mathbb{Z}$ .

- b) La función  $f(t, x) = \cos(t + x)$  es de clase  $C^\infty$  y por lo tanto localmente Lipschitz. Luego el Teorema de Picard nos da la existencia y unicidad de soluciones definidas en un entorno del tiempo inicial. Esto además nos da la existencia de soluciones maximales y nos permite usar el Teorema de Escape de Compactos.

Para determinar el intervalo de definición de las soluciones maximales observamos, por un lado, que las soluciones halladas en la parte anterior están claramente definidas para todo tiempo.

Por otro lado, tomemos  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^2$  y  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  la solución maximal que cumple  $\varphi(t_0) = x_0$ . Suponemos además  $-t + \pi + 2k\pi < x_0 < -t + \pi + 2(k + 1)\pi$  con  $k \in \mathbb{Z}$ . Si  $\varphi$  no estuviese definida en un tiempo  $t_1 > t_0$ , entonces el gráfico de  $\varphi$  restringido a los tiempos mayores a  $t_0$  estaría contenido en el paralelogramo delimitado por las rectas  $t = t_0$ ,  $t = t_1$ ,  $x = -t + \pi + 2k\pi$  y  $x = -t + \pi + 2(k + 1)\pi$ , lo que contradice la tesis del Teorema de Escape de Compactos. Esto implica que  $\varphi(t)$  está definida para todo  $t > t_0$ . Por un argumento análogo también está definida para todo  $t < t_0$ , lo que implica que su intervalo de definición es todo  $\mathbb{R}$ .

- c) Comenzamos estudiando los puntos  $(t, x)$  donde se anula  $\cos(t + x)$ . Esto nos da la igualdad  $x = -t + \pi/2 + k\pi$  para  $k \in \mathbb{Z}$ . Es decir que la derivada de las soluciones se anula en los puntos de la forma  $(t, -t + \pi/2 + k\pi)$ . Para determinar cuáles de estos puntos son máximos o mínimos podemos estudiar el signo de  $\cos(t + x)$ , lo que expresamos en el primer dibujo (ver penúltima página).

Tenemos entonces que los puntos de la forma  $(t, -t + \pi/2 + 2k\pi)$  son máximos y los de la forma  $(t, -t - \pi/2 + 2k\pi)$  son mínimos.

Para bosquejar las soluciones observamos que si  $\varphi$  es una solución, entonces  $\varphi + 2k\pi$  (es decir, una traslación horizontal) también lo es para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . Además también lo es la función  $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(t + c) - c$  también lo es para todo  $c \in \mathbb{R}$ . Esto último nos dice que obtenemos gráficos al trasladar cualquier gráfico por el vector  $(c, -c)$ . Teniendo esto en cuenta vamos a estudiar la solución con condición inicial  $(0, 0)$ , a la que notamos por  $\varphi_0$ , luego obtendremos las demás soluciones no afines al trasladar el gráfico de esta. Ya sabemos que tiene un máximo y un mínimo local y cómo es el signo. Para tener una idea de cómo completar el bosquejo estudiamos su comportamiento con  $t \rightarrow \pm\infty$ . Sabemos que existen  $t_1 < 0 < t_2$  tal que  $\varphi_0(t) < -t - \pi/2$  para todo  $t < t_1$  y  $\varphi_0(t) > -t + \pi/2$  para todo  $t > t_2$ . En ambos casos  $-1 > \varphi_0(t) > 0$ , lo que implica

$$|\varphi_0(t) - (-t - \pi/2)| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow -\infty$$

y

$$|\varphi_0(t) - (-t + \pi/2)| \rightarrow 0 \text{ cuando } t \rightarrow +\infty.$$

Teniendo todo lo anterior en cuenta hacemos el bosquejo de las soluciones (ver última página).

2. a) La matriz fundamental es

$$\Phi(t) = e^{tA} = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego la solución con condición inicial  $(t_0, x_0)$  es

$$x(t) = e^{(t-t_0)A}x_0 = e^{(t-t_0)} \begin{pmatrix} 1 & (t-t_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_0.$$

b) Aplicamos el método de variación de constantes y buscamos una solución de la forma

$$x(t) = \Phi(t)y(t) = \Phi(t) \begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

Imponiendo la propiedad de la matriz fundamental tenemos

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \dot{\Phi}(t)y(t) + \Phi(t)\dot{y}(t) \\ &= A\phi(t)y(t) + \Phi(t)\dot{y}(t) \\ &= Ax(t) + \Phi(t)\dot{y}(t). \end{aligned}$$

Si  $x(t)$  es solución de la ecuación no homogénea se debe dar

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{b}(t) \end{pmatrix} = \Phi(t)^{-1} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ te^{-t} \end{pmatrix}.$$

De aquí obtenemos  $a(t) = k_1$  y  $b(t) = k_2 - (t+1)e^{-t}$ , y luego

$$x(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 - (t+1)e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1e^t + k_2te^t - t(t+1) \\ k_2e^t - (t+1) \end{pmatrix}.$$

Imponiendo la condición inicial tenemos  $k_1 = 0$  y  $k_2 = 1$ . Esto nos da la solución

$$x(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 - (t+1)e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} te^t - t(t+1) \\ e^t - (t+1) \end{pmatrix}.$$

3. Para buscar la solución hallamos los coeficientes de Fourier de la extensión impar de la función  $f(x) = x(\pi - x)$ :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \operatorname{sen}(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left( -x(\pi - x) \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_0^\pi + \int_0^\pi (\pi - 2x) \frac{\cos(kx)}{k} dx \right) \\ &= \frac{2}{k\pi} \int_0^\pi (\pi - 2x) \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{k\pi} \left( (\pi - 2x) \frac{\operatorname{sen}(kx)}{k} \Big|_0^\pi + \frac{2}{k} \int_0^k \operatorname{sen}(k\pi) dx \right) \\ &= \frac{4}{k^2\pi} \int_0^k \operatorname{sen}(k\pi) dx \\ &= -\frac{4}{k^2\pi} \frac{\cos(kx)}{k} \Big|_0^\pi \\ &= \frac{4(1 - \cos(k\pi))}{k^3\pi}. \end{aligned}$$

Observar que  $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k| < +\infty$ , luego

$$u(t, x) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k e^{k^2 t} \operatorname{sen}(kx) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{4(1 - \cos(k\pi))}{k^3\pi} e^{k^2 t} \operatorname{sen}(kx)$$

es solución al problema.



