

EXAMEN MARZO 2026 - TEÓRICO

1. Probar que si $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una función continua y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, entonces existe una solución de la ecuación $\dot{x} = A(t)x$ definida en todo $\mathbb{R}$ que cumple $x(0) = x_0$.

Recordar el Lema de Gronwall: si $u, v : [a, b] \rightarrow [+\infty)$ son continuas y existe $\alpha > 0$ tal que

$$u(t) \leq \alpha + \int_a^t u(s)v(s) ds$$

para todo $t \in [a, b]$, entonces para todo $t \in [a, b]$ también vale $u(t) \leq \alpha e^{\int_a^t v(s) ds}$.

2. Consideramos una ecuación autónoma $\dot{x} = X(x)$ (con $X : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un campo localmente Lipschitz).
- a) ¿Qué significa que $x_0 \in \Omega$ sea un punto de equilibrio estable? ¿y asintóticamente estable?
 - b) Enunciar los teoremas de Lyapunov que dan condiciones suficientes para la estabilidad y estabilidad asintótica.