

Práctico 1

Introducción: trabajo virtual y ecuaciones de D'Alembert

1. Demuestre que la magnitud R del vector posición del centro de masa con origen arbitrario para un conjunto de partículas \mathbf{r}_i de masa m_i cumple la ecuación

$$M^2 R^2 = M \sum_j m_j r_j^2 - \frac{1}{2} \sum_{i,j} m_i m_j r_{ij}^2,$$

donde M es la masa total, $r_i = |\mathbf{r}_i|$ y $r_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$.

2. Un sistema de dos partículas obedece las ecuaciones de movimiento

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{L}_0}{dt} = \mathbf{M}_0,$$

donde M es la masa total, \mathbf{R} la posición del centro de masa, \mathbf{F} la fuerza externa, \mathbf{L}_0 el momento angular total y \mathbf{M}_0 el torque externo. De las ecuaciones individuales de movimiento de cada partícula pruebe que las fuerzas internas entre ellas satisfacen las leyes débil y fuerte de acción y reacción. Ver que puede generalizarse para un número cualquiera de partículas.

3. Sea $\tilde{X} \equiv (\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N)$ una solución de las ecuaciones de movimiento de un sistema de N partículas, con K vínculos holónomos $f_I = 0$ y fuerzas reactivas que no realizan trabajo virtual. Demuestre que la potencia total de las fuerzas reactivas:

$$P = \tilde{R} \cdot \dot{\tilde{X}} \equiv \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{R}_\alpha \cdot \dot{\mathbf{r}}_\alpha$$

satisface:

$$P = \sum_{I=1}^K \lambda_I \frac{\partial f_I}{\partial t}$$

Nota: El trabajo neto y no-virtual de las fuerzas reactivas sólo puede ser no nulo si los vínculos dependen explícitamente del tiempo.

4. Usando la notación $\dot{F} \equiv \frac{dF}{dt}$:

a. Dada una función $F(q, t)$ que no depende de las velocidades generalizadas, demuestre que:

$$\frac{\partial \dot{F}}{\partial \dot{q}_a} = \frac{\partial F}{\partial q_a}$$

b. Dada una función $F(q, \dot{q}, t)$, demuestre que:

$$\frac{\partial \dot{F}}{\partial q_a} = \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial q_a}$$

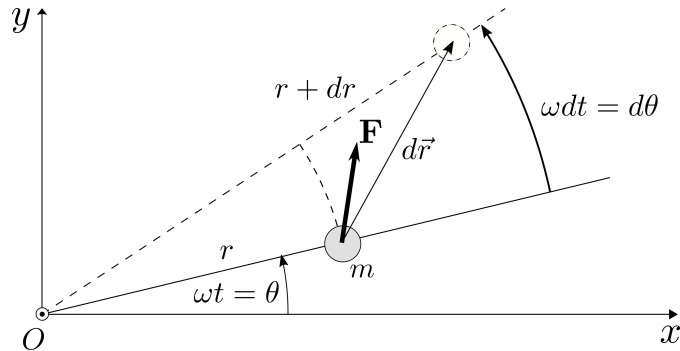
5. Demuestre que la energía de un sistema de partículas $T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} |\dot{\mathbf{r}}_{\alpha}|^2$, se escribe en función de las coordenadas generalizadas como $T = T_2 + T_1 + T_0$ con:

$$T_2 = \sum_a \sum_b \frac{1}{2} g_{ab}(q, t) \dot{q}_a \dot{q}_b \quad T_1 = \sum_a b_a(q, t) \dot{q}_a \quad T_0 = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \left| \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} \right|^2$$

$$g_{ab}(q, t) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_a} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_b} \quad b_a(q, t) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_{\alpha}}{\partial q_a}$$

El subíndice en T_i indica el grado de homogeneidad de la función en su dependencia con las velocidades generalizadas.

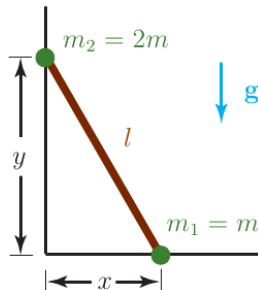
6. La barra rígida de la figura está obligada a rotar en el plano xy con velocidad angular ω constante. Una partícula de masa m se mueve sin rozamiento sobre la barra y sobre ella hay aplicada una fuerza externa \mathbf{F} .



a. Escriba un desplazamiento virtual y uno real para m .

b. Escriba las ecuaciones de d'Alembert.

7. Las dos esferitas de la figura están obligadas a moverse sin roce sobre rieles mientras están unidas por una varilla sin masa de longitud l . El riel de la esfera 1 es horizontal y lo tomaremos como eje x y el de la esfera 2 es vertical y se toma como eje y . El origen es el punto de corte de los rieles.



a. Explique cuántos grados de libertad tiene el sistema. Escoja coordenadas generalizadas q_a y escriba en función de ellas y de la base cartesiana los vectores posición de las partículas \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 .

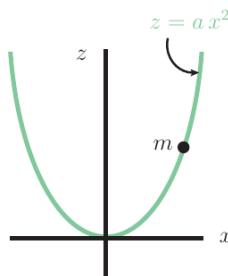
b. La posición del sistema se define como un vector en \mathbb{R}^4 dado por $\tilde{X} = (\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Calcule los vectores $\frac{\partial \tilde{X}}{\partial q_a}$ y expréselos en función de las variables x e y .

c. A partir de las ecuaciones de d'Alembert demuestre que:

$$Ay\ddot{x} + Bx\ddot{y} + Cx + Dy + E = 0$$

donde A, B, C, D y E son constantes a determinar.

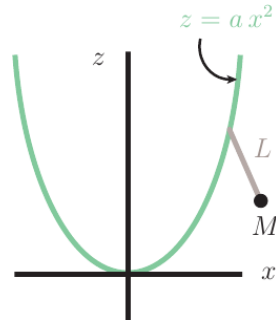
8. La cuenta de la figura desliza sin rozamiento por el alambre en forma de parábola. El eje z es vertical.



a. Escoja coordenadas generalizadas y escriba las energías cinética y potencial en términos de ellas.

b. La cuenta se coloca inicialmente en reposo en el punto con $x = x_0$. Halle el vector velocidad de la partícula cuando se encuentre en un punto x cualquiera tal que $|x| \leq x_0$.

9. El punto de suspensión de un péndulo desliza libremente por un alambre en forma de parábola de ecuación $z = ax^2$, donde el eje z es vertical. El péndulo tiene longitud L , está obligado a moverse en el plano xz y en su extremo inferior está adherida una partícula de masa M .



a. Determine cuantos grados de libertad tiene el sistema (explique con detalle). Represente gráficamente el espacio de configuración Q del sistema. ¿Es Q una porción del plano xz ?

b. Escoja coordenadas generalizadas y escriba las ecuaciones de d'Alembert (no integre las ecuaciones).

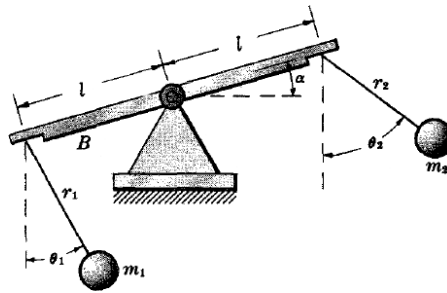
10.* Dos partículas de masas m_1 y m_2 se hallan contenidas en el plano horizontal, fijas al perímetro de una circunferencia de radio variable en el tiempo, dado por una función $R(t)$ conocida. Las partículas se hallan unidas entre sí por una varilla rígida de masa y diámetro despreciables y de longitud L .

a. ¿Cuántos grados de libertad tiene el sistema?

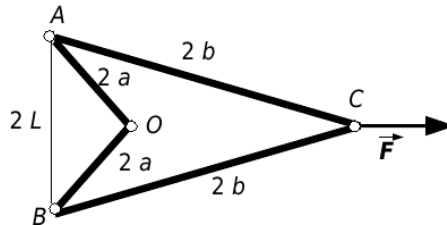
b. Calcule un desplazamiento virtual y uno real para cada una de las partículas.

c. Escriba las ecuaciones de los vínculos, y en caso de ser un sistema holónomo, halle un conjunto de coordenadas generalizadas independientes y exprese sus resultados en función de las mismas.

11.* Las masas m_1 y m_2 están suspendidas por hilos inextensibles de la barra B. La barra rota libremente en torno a un eje horizontal y su momento de inercia respecto a ese eje es I . Asumiendo que todos los movimientos están restringidos al plano de la hoja, determine los grados de libertad y halle una expresión para la energía cinética



12.* Dos barras iguales y sin masa OA y OB, de longitud $2a$, articulan en el punto fijo O. Sus extremos A y B están unidos, respectivamente, a dos barras iguales sin masa, AC y BC, de longitud $2b$, las cuales se unen entre sí en un punto de articulación C. Todas las articulaciones son cilíndricas y lisas. Además un hilo ideal de largo $2L$ une los puntos A y B. Si se aplica una fuerza F horizontal en C, según se muestra en la figura, calcule la tensión del hilo utilizando el Principio de los Trabajos Virtuales.



13.* La grúa de la figura sostiene una masa m por medio de dos brazos AB y BC de masa despreciable y longitudes respectivas L_1 y L_2 . Las articulaciones en A y B tienen resortes de torsión que ejercen torques $T_A = -k\varphi$ y $T_B = -k\psi$. Halle la condición que deben verificar las posiciones de equilibrio del sistema a partir del Principio de los Trabajos Virtuales. ¿Es posible una configuración de equilibrio con $\psi = 0$ y $\varphi \neq 0$? ¿y una con el brazo AB horizontal ($\varphi = \pi/2$)?

