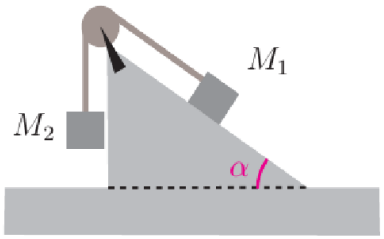
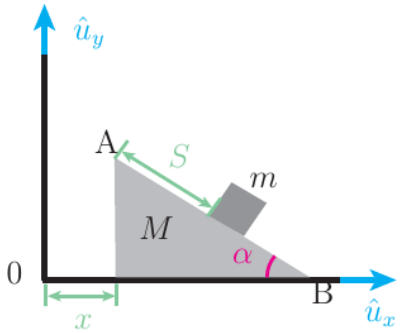
Práctico 2
Ecuaciones de Lagrange para sistemas holónomos

1. En el sitema de la figura la polea y la cuerda de la figura son ideales y los bloques deslizan sin rozamiento. Obtenga las aceleraciones de los bloques a partir de las ecuaciones de Lagrange.



2. La figura muestra una partícula de masa m apoyada sobre una cuña triangular de ángulo α respecto a la horizontal y masa M. No hay fricción entre la cuña y el piso, ni entre la cuña y la partícula. La distancia entre los vértices A y B es D.



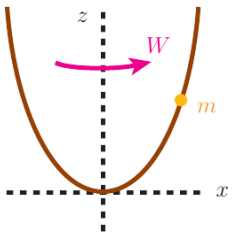
a. Tome como coordenadas generalizadas las variables x y S indicadas. Escriba el lagrangeano y halle $\ddot{x}$ y $\ddot{S}$.

b. Respecto al plano inclinado la partícula parte del reposo y desde el punto A. Demuestre que el tiempo que tarda la partícula en llegar al punto B es:

$$t = \sqrt{\frac{2D(M + m\,\mathrm{sen}^2\,\alpha)}{(M+m)g\,\mathrm{sen}\,\alpha}}$$

c. ¿Hay alguna coordenada cíclica? ¿Cuánto vale su momento generalizado conjugado y qué representa? ¿La funcion energía h se conserva? ¿Es igual a la energía?

3. Un alambre en forma de parábola se hace rotar alrededor de un eje de simetría (eje z) con velocidad angular constante W. El eje z es vertical y cuando el alambre está en el plano xz la ecuación que lo describe es $z = ax^2$ (con a una constante positiva). Una cuenta de masa m desliza sin fricción por el alambre.

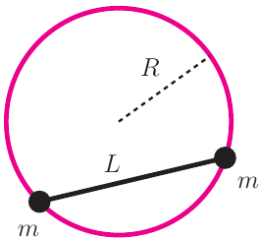


a. Escoja coordenadas generalizadas y halle en función de las mismas el vector velocidad de la cuenta. Tome como base de vectores ortonormales la base usual de coordenadas cilíndricas. Halle también las energías cinética y potencial.

b. Halle el lagrangeano y las ecuaciones de movimiento. ¿Que condición debe cumplirse y cuál debe ser la velocidad inicial de la cuenta respecto al alambre, para que ella pueda tener un movimiento circular de radio R, no nulo, alrededor del eje z?

c. ¿Se conserva la energía? Halle una constante del movimiento. La cuenta se suelta del reposo respecto al alambre, a una altura D sobre el plano xy. ¿Qué valores están permitidos para W si se quiere que la cuenta pase por el origen? Halle la rapidez de la cuenta al pasar por el origen.

4. Dos cuentas de masa m cada una están restringidas a moverse sobre un aro fijo, vertical y de radio R. Las cuentas se mantienen unidas por medio de una barra sin masa y de longitud L ($L < 2R$).



a. Escriba el lagrangeano.
b. Obtenga las ecuaciones de Lagrange.
c. Si la barra se suelta del reposo desde una posición vertical, halle la rapidez del centro de la barra cuando ésta se encuentra en posición horizontal.
d. Calcule la frecuencia de las pequeñas oscilaciones en torno a la posición de equilibrio.

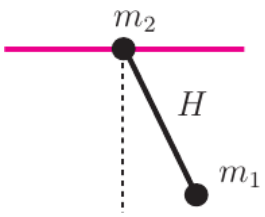
5. Encuentre el lagrangeano de un péndulo plano (un punto pesado que se mueve en un plano vertical, colgado de un hilo tenso sin masa), donde:

a. El hilo tiene longitud fija y el punto de suspensión se desplaza uniformemente en una circunferencia de radio a, con velocidad angular ω.

b. El hilo tiene longitud fija y el punto de suspensión efectúa oscilaciones horizontales de la forma $a\cos(\omega t)$.

c. El hilo tiene longitud fija y el punto de suspensión efectúa oscilaciones verticales de la forma $a\sin(\omega t)$.

6. La figura muestra un péndulo plano formado por una varilla sin masa de longitud H, una partícula de masa m_1 atada a su extremo libre y una de masa m_2 en el punto de suspensión. El punto de suspensión se desliza libremente a lo largo de un eje horizontal sin rozamiento.



a. Escoja coordenadas generalizadas y escriba el lagrangeano.

b. Encuentre dos cantidades conservadas del sistema.

c. Halle las ecuaciones de movimiento (no las resuelva).

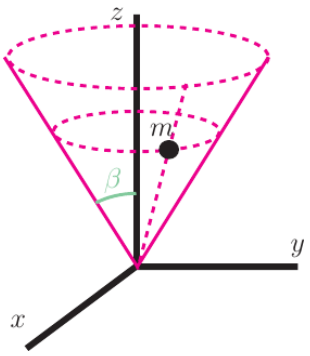
7. Una partícula de masa m está confinada a moverse en la superficie de una esfera de radio R en presencia de un campo gravitacional constante g. Tome el origen en el centro de la esfera y el eje z en la dirección vertical hacia arriba. Use como coordenadas generalizadas los angulos esféricos θ (colatitud) y ϕ (azimut).

a. Obtenga las ecuaciones de movimiento para θ y ϕ.

b. Halle los momentos generalizados P_θ y P_ϕ y demuestre por cálculo directo que corresponden a las componentes en $\hat{e}_\theta$ y $\hat{e}_z$ del momentum angular respecto al origen.

c. Halle dos integrales de movimiento independientes. A partir de ellas escriba una expresión integral que permita obtener $t = t(\theta)$ (no resuelva la integral).

8. Una partícula de masa m puede moverse sin fricción sobre la superficie interior de un cono de ángulo β. El eje principal del cono, eje z, coincide con la vertical (ver figura).



a. Use como coordenadas generalizadas las coordenadas polares $(r,\, \theta)$ y escriba el lagrangeano.

b. Halle dos constantes de movimiento independientes.

c. A partir de las ecuaciones de Lagrange escriba una ecuación diferencial para r (sin la variable θ). Diga cuáles deben ser las condiciones iniciales para $(r,\, \theta,\, z)$ y sus derivadas si se quiere que la órbita de la partícula sea circular de radio R.

9*. Una cuenta de masa $m_1 = m$ se mueve sin fricción enhebrada en un alambre que está contenido en el plano vertical xz y cuya forma está dada por la ecuación $z = ax^2$, siendo a una constante positiva. De la cuenta cuelga, por medio de una cuerda de masa despreciable y longitud h, una esferita de masa $m_2 = m$ que se mueve en el espacio de manera que la cuerda pemanece tensa.

a. Determine cuántos grados de libertad tiene el sistema y seleccione coordenadas generalizadas.

b. Halle las velocidades de las dos partículas en función de las coordenadas generalizadas expresadas en la base cartesiana.

c. Escriba Lagrangiano del sistema.

d. Halle los momentos generalizados y las ecuaciones de movimiento.