Práctico 3
Principios extremales, vínculos no holónomos y conservación.

1. Considere una rampa contenida en un plano vertical que une el punto A con un punto B a menor altura. Por la rampa desliza sin rozamiento un pequeño objeto de masa m debido a la fuerza de gravedad. Encuentre la forma de la rampa que minimiza el tiempo de demora el objeto en llegar desde A hasta B.

2. (*) Al hallar una función que extremase la integral $\int f dx$ se supuso que f era función de x, $y(x)$ y de $\dot{y}(x)$. Pruebe que si f depende también de $\ddot{y}$, y en los extremos no varian ni y ni $\dot{y}$, la ecuación correspondiente de Euler-Lagrange es

$$\frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial f}{\partial \ddot{y}} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Generalice para dependencia en derivadas de orden superior.

3. El oscilador armónico unidimensional tiene el Lagrangiano dado por

$$L = m\dot{x}^2/2 - kx^2/2.$$

Suponga que no conoce la solución del movimiento pero sabe que el movimiento debe ser periódico y por lo tanto puede ser descrito por una serie de Fourier de la forma

$$x(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j cos(j\omega t)$$

(tomando $t = 0$ en el punto de retroceso) donde ω es una incógnita. La representación para $x(t)$ define un camino dependiente de muchos parametros en el espacio de configuraciones. Considere la acción como la integral I entre dos tiempos t_1 y t_2 separados por un período $T = 2\pi/\omega$. Muestre que I es un extremo (para $x(t)$ no idénticamente nulo) solo si $a_j = 0$ para $j \neq 1$ y solo si $\omega = k/m$.

4. Considere un aro homogéneo de radio R y siempre vertical, que rueda sin deslizar sobre una superficie horizontal (vínculo no holónomo), halle las ecuaciones de movimiento, resuélvalas y demuestre que el centro de masa se mueve en un círculo. Halle el radio de este movimiento circular y su rapidez en términos de R y las velocidades angulares.

5. Considere una barra homogénea de masa M y longitud H restringida a moverse en un plano vertical. La barra se desliza sin fricción apoyando un extremo en el piso horizontal

y el otro en una pared vertical.

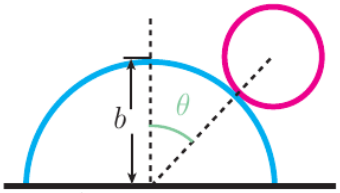
a. Halle las ecuaciones de Lagrange y obtenga los multiplicadores de Lagrange en función del ángulo θ que forma la barra con la horizontal y $\dot{\theta}$.

b. Halle la reacción en la pared.

c. Escriba la energía del sistema en función de θ y $\dot{\theta}$.

d. Si inicialmente la barra está en reposo y $\theta = \theta_0$, demuestre que la barra se despega de la pared cuando $\operatorname{sen}\theta = \frac{2}{3}\operatorname{sen}\theta_0$.

6. Un aro homogéneo de masa M y radio R está restringido a moverse en un plano vertical y rueda sin deslizar apoyado sobre un alambre semicircular de radio b como se muestra en la figura.



a. Escriba los vínculos y encuentre todas las ecuaciones diferenciales que permitan hallar las coordenadas generalizadas y los multiplicadores de Lagrange asociados a los vínculos.

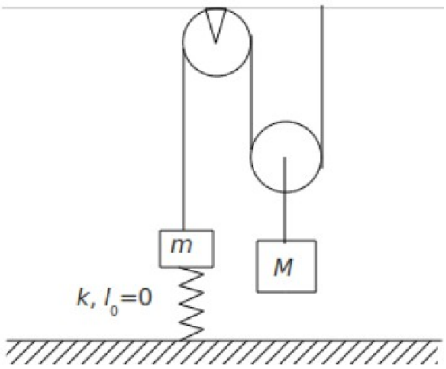
b. Halle los multiplicadores de Lagrange en función de θ. Suponga que el aro parte del reposo en $\theta = 0$.

7. Una rueda uniforme rueda sin deslizar sobre una superficie plana que forma un ángulo α con la horizontal. La rueda ha de permanecer en un plano perpendicular al inclinado, pero puede girar alrededor de un eje perpendicular a la superficie. Halle las ecuaciones integradas del movimiento bidimensional de la rueda, utilizando las ecuaciones de Lagrange y el método de los multiplicadores de Lagrange.

8. Considere el sistema de la figura, formado por dos masas M y m, conectadas entre sí y al techo por un hilo inextensible y sin masa (las poleas tampoco tienen masa). La masa m a su vez esta unida a un resorte ideal de constante k y longitud natural nula.

a. Encuentre y resuelva las ecuaciones de Lagrange del movimiento.

b. Calcule las tensiones de la cuerda por el metodo de multiplicadores de Lagrange.



9. * Considere un aro homogéneo de masa M y radio R restringido a moverse en un plano vertical que que rueda sin deslizar por el interior de otro aro vertical fijo y de radio H.

a. Utilizando el método de los multiplicadores de Lagrange halle una ecuación diferencial para la coordenada angular θ del centro de masas del aro de radio R.

b. Encuentre el valor máximo que alcanza θ.

10. Considere el lagrangeano de un solo grado de libertad $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - mgx$, que representa, por ejemplo, a una partícula que cae.

a. Demuestre que la transformación de coordenadas $x \to x' = x + \epsilon$ es una simetría del lagrangeano.

b. Encuentre la constante de movimiento asociada a esta simetría.

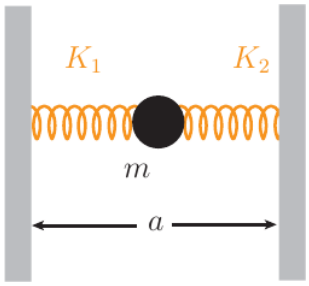
c. Use la constante de movimiento para resolver el movimiento y obtener $x(t)$.

11. Una partícula se mueve en el espacio bajo la influencia de un potencial que en coordenadas cilíndricas (ρ, ϕ, z) tiene la dependencia $V = V(\rho, k\phi + z)$, con k una constante con dimensiones de longitud.

a. Encuentre una simetría del lagrangeano y la constante del movimiento asociada.

b. Halle al menos una constante del movimiento más.

12. * Una partícula de masa m se mueve en una dimensión bajo la acción de dos resortes de constantes elásticas K_1 y K_2 y longitudes naturales nulas.



a. Use como coordenada generalizada q la posición de la partícula respecto a algún punto fijo. Halle el lagrangeano del sistema $L = L(q, \dot{q}, t)$.

b. Halle $q(t)$, la solución general de las ecuaciones de movimiento.

c. Considere la transformación de coordenadas:

$$q \to Q = q + \epsilon \cos(\omega t + \phi) \equiv q + \delta_\epsilon q$$

donde $\omega^2 = (K_1 + K_2)/m$ y ϵ es infinitesimal. Demuestre que es una simetría del lagrangeano, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial \epsilon} L\left(q + \delta_\epsilon q, \dot{q} + \delta_\epsilon \dot{q}, t\right)|_{\epsilon=0} = \frac{d}{dt} G\left(q, t\right)$$

Halle la función $G(q, t)$.

d. De acuerdo al teorema de Noether existe una constante de movimiento $\Gamma(q, \dot{q}, t)$ asociada a la simetría anterior. Hállela.

e. Introduzca la solución hallada en b) en la constante de movimiento $\Gamma(q, \dot{q}, t)$ y compruebe que efectivamente es una constante de movimiento.