Práctico 4: Movimiento Central

1. Una partícula de masa m está obligada a moverse bajo la acción de la gravedad sin rozamiento sobre el interior de un paraboloide de revolución cuyo eje es vertical. Halle el problema unidimensional equivalente a este movimiento. ¿Qué condición debe cumplir la velocidad inicial de la partícula para producir movimiento circular? Halle el periodo de las pequeñas oscilaciones respecto a este movimiento circular.

2. Una partícula de masa m se mueve en un campo de fuerzas centrales definidos por el potencial
$$V = -k\frac{e^{-ar}}{r}$$
donde k y a son constantes positivas. Utilizando el método del potencial unidimensional equivalente estudie la naturaleza del movimiento, estableciendo las gamas de E y l apropiadas para cada uno de los movimientos. ¿Cuándo son posibles órbitas circulares? Halle el periodo de las pequeñas oscilaciones respecto a este movimiento circular.

3. Una partícula se mueve en un círculo de radio R bajo la influencia de una fuerza central atractiva
$$F = -\frac{K}{r^2}e^{-r/a}$$
   (a) Determine la condición que debe cumplir la constante a para que el movimiento circular sea estable.
   (b) Calcule la frecuencia de las pequeñas oscilaciones alrededor de este movimiento circular.

4. Se ha encontrado de forma experimental que el potencial de moléculas diatómicas se aproxima correctamente por el *potencial de Morse*
$$V(r) = D\left(e^{-2\alpha r} - 2e^{-\alpha r}\right), \quad D, \alpha > 0.$$
Ignorando los grados de libertad rotacionales considere el problema unidimensional descrito por la distancia r entre los moléculas.
   (a) Obtenga los puntos de retorno distinguiendo los casos $E > 0$,$E = 0$ y $E < 0$. ¿En qué casos la órbitas son acotadas y en cuáles no? ¿Cuál es la energía minima?
   (b) Obtenga las soluciones $r(t)$ para los distintos casos discutidos previamente.
   (c) Realice un gráfico de algunas soluciones representativas en el espacio de fases ($\dot{r}$ vs. r).

5. Si el vector velocidad de una partícula de masa m sometida a un potencial $U(r) = -k/r$, se coloca con su orígen en el centro de fuerzas, su extremo trazará lo que se llama *hodógrafa* de la partícula. Tomando el producto vectorial del momento angular ($\vec{L}$) por el vector de Laplace-Runge-Lenz ($\vec{A}$), demostrar que la hodógrafa correspondiente a un movimiento elíptico de Kepler es, en función de la cantidad de movimiento, una circunferencia de radio $mk/|\vec{L}|$ con origen desplazado una distancia $A/|\vec{L}|$ respecto al centro de fuerzas.

6. Considere el problema de dispersión con un potencial Coulombiano repulsivo (*scattering de Rutherford*).

(a) Deduzca la fórmula de la sección eficaz diferencial en función del ángulo de dispersión y los parámetros del problema.

(b) ¿Qué diferencias aparecen si el potencial es atractivo en lugar de repulsivo?

7. * Examine el problema de dispersión debido a una fuerza central de la forma $f = kr^{-3}$. Muestre que la sección eficaz diferencial está dada por

$$\sigma(\Theta)d\Theta = \frac{2k}{E}\frac{(1-x)dx}{x^2(2-x)^2\sin(\pi x)}$$

siendo x el cociente Θ/π y E la energía.