19) b) $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \} =$

$$= \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_n \in \mathbb{R} \ \forall n \} =$$

$$\begin{array}{rl} & (1, 1, \pi, 0, -3, \dots, 2, \dots\dots) \\ + & (2, 0, -\pi, 1, 2, \dots \dots, -1, \dots \dots) \\ \hline & (3, 1, 0, 1, -1, \dots \dots, 1, \dots\dots) \end{array}$$

$\to$ Ejemplo de suma en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$$\left[\begin{array}{c} (x_n) + (y_n) = (z_n) \\ z_n = x_n + y_n \end{array} , \quad \begin{array}{c} \lambda (x_n) = (y_n) \\ y_n = \lambda x_n \end{array} \right]$$

Def. de suma y producto por escalar en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

$$X = \{ (x_n^{(i)})_{n \in \mathbb{N}} : i \in \mathbb{N} \}$$

$$(x_n^{(i)}) = (0, 0, \dots, \underset{\substack{\uparrow \\ i\text{-ésimo lugar}}}{1}, 0, \dots, 0, \dots) \to x_n^{(i)} = \begin{cases} 1 & n = i \\ 0 & n \neq i \end{cases}$$

$(x_n^{(1)})_n = (1, 0, \dots 0, 0, \dots)$

$(x_n^{(2)})_n = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$

(ejemplos $i = 1, 2$)

Ojo: la sucesión $(x_n^{(i)})_n$ $\neq$ $x_n^{(i)}$ término n-ésimo de $(x_n^{(i)})_n$

$$\boxed{\# X = \infty}$$

Investigar si X es base

- X es l.i.:

$$\cancel{\alpha_1 (x_n^{(1)}) + \alpha_2 (x_n^{(2)}) + \alpha_3 (x_n^{(3)}) + \dots +}$$

No sabemos sumar infinitas sucesiones ...
(esperar a Topología ☺)

(I) todo subconjunto finito de X es l.i.

(def. de l.i. para conjuntos infinitos)

(II) $X_k = \{(x_n^{(i)}) : i = 1, \dots, k\}$ es l.i. $\forall k$

$$X = \{\underbrace{(x_n^{(1)}), (x_n^{(2)}), \dots, (x_n^{(k)})}_{X_k}, \dots\}$$

(II) $\Rightarrow$ (I) $A \subset X$ finito cualquiera,

- existe k tal que
$$A \subset X_k$$
- como X_k es l.i., A es l.i. (ej 5 A8.)

Prueba de (II): $(x_n^{(1)}) = (1, 0, \dots, 0, \dots 0)$

$(x_n^{(2)}) = (0, 1, 0, \dots, 0, \dots 0)$

$\vdots$

$(x_n^{(k)}) = (0, \dots, 1, 0, \dots, \dots)$

lugar k.

sucesión nula.

$$\alpha_1 (x_n^{(1)}) + \alpha_2 (x_n^{(2)}) + \dots + \alpha_k (x_n^{(k)}) = 0$$

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k, 0, \dots, 0, \dots) = (0, 0, 0, \dots, 0 \dots)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0.$$

$\Rightarrow$ X_k es l.i. $\forall k$.

Base = generador minimal
= l.i + generador
= l.i maximal

- ¿ X es generador de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

$v = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ $x_n = 1$ $\forall n$ $v = (1, 1, \ldots, 1, \ldots, 1, 1, \ldots)$

¿ $v \in \langle X \rangle$? NO

$\boxed{X \text{ no es base}}$

$$v = \text{"} \sum_{k=1}^{\infty} (x_n^{(k)})_n \text{"}$$

$\langle X \rangle = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} :$ es eventualmente cero $\}$

$w \in \langle X \rangle$ $w = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \left(x_n^{(k_i)} \right)_n$ $k_1, k_2, \ldots, k_N \in \mathbb{N}$

ejemplo → ¡la suma es finita!

$(1, 0, 3, 0, \ldots, 0, \ldots) = (x_n^{(1)}) + 3(x_n^{(3)})$

Luego si $N = \max\{k_1, \ldots, k_N\}$

w_n = coordenada n de w $= 0$ $\forall n > N$

Por lo que w es "eventualmente cero"

(v no es eventualmente cero

$v = (1, \ldots, 1, \ldots 1,$ 1's para siempre))