CAPíTULO 7

TRANSFORMACIONES LINEALES.

Las transformaciones lineales son funciones entre espacios vectoriales. Ellas preservan (mantienen) las estructuras lineales que caracterizan a esos espacios: los transformados de combinaciones lineales de vectores son las correspondientes combinaciones de los transformados de cada uno de los vectores.

Las funciones que mantienen las estructuras características de los espacios entre los que actúan son de especial importancia porque permiten "moverse" entre ellos comparando las estructuras que los definen; en particular, permiten analizar cuán diferentes o semejantes son desde el punto de vista de esas propiedades (lineales, en el presente caso). En este sentido las transformaciones lineales son tan importantes en el estudio de los espacios vectoriales, como las isometrías o movimientos lo son en la geometría métrica.

7.1. Transformaciones lineales

DEFINICIÓN 7.1. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y $T: V \to W$ una función. Diremos que T es una **transformación lineal** si satisface :

$$\begin{array}{lll} i) \ T(u+v) = T(u) + T(v) & & \forall\, u, v \in V. \\ ii) \ T(a.v) = a.T(v) & & \forall\, a \in K, \ \forall\, v \in V. \end{array}$$

EJEMPLO 7.1. Sean

$$C^1 = \{f: R \to R \ / \ f \text{ es derivable}\} \subset F = \{f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}.$$

La transformación $T : C^1 \to F$ tal que $T(f) = f'$ es una transformación lineal, pues se cumple que
i) $T(f_1 + f_2) = (f_1 + f_2)' = f_1' + f_2' = T(f_1) + T(f_2)$
ii) $T(\alpha f) = (\alpha f)' = \alpha f' = \alpha T(f)$

EJEMPLO 7.2. Sea V un espacio vectorial y sea $\lambda \in K$. La función $T : V \to V$ tal que $T(v) = \lambda v$ es una transformación lineal. Efectivamente:
i) $T(v_1 + v_2) = \lambda (v_1 + v_2) = \lambda v_1 + \lambda v_2 = T(v_1) + T(v_2)$
ii) $T(a.v) = \lambda a v = a \lambda v = a T(v)$

EJEMPLO 7.3. Sea V un espacio vectorial y $v_0 \neq \vec{0}$ un vector fijo de V. La función $T : V \to V$ tal que: $T(v) = v + v_0$ no es una transformación lineal, pues $T(v_1 + v_2) = v_1 + v_2 + v_0 \neq v_1 + v_0 + v_2 + v_0 = T(v_1) + T(v_2)$.

Las propiedades i) y ii) de la definición anterior se pueden resumir de la siguiente forma:

PROPOSICIÓN 7.1. *$T : V \to W$ es una transformación lineal si y sólo si $T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)$ $\forall a_1, a_2 \in K$ $\forall v_1, v_2 \in V$.*

Demostración. Sean a_1 y a_2 escalares y v_1 y v_2 vectores.
($\Rightarrow$) $T(a_1 v_1 + a_2 v_2) = T(a_1 v_1) + T(a_2 v_2) = a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2)$.
($\Leftarrow$) En el caso particular en que $a_1 = a_2 = 1$ se obtiene $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$, y en el caso particular en que $a_2 = 0$ se obtiene $T(a_1 v_1) = a_1 T(v_1)$. □

PROPOSICIÓN 7.2. *Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces, $T\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$.*

Demostración. $T\left(\vec{0}\right) = T(0.v) = 0.T(v) = \vec{0}$. □

PROPOSICIÓN 7.3. *Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo con* $dim\,(V) = n$*,* $T : V \to W$ *y* $S : V \to W$ *transformaciones lineales. Consideremos una base* $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *de V. Entonces:* $T\,(v) = S\,(v)\ \ \forall\, v \in V$ *si y solo si* $T\,(v_i) = S\,(v_i) \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$.

Demostración. ($\Rightarrow$) Si T y S coinciden en todo el espacio V, en particular coinciden en los vectores de la base B.

($\Leftarrow$) Sea $v \in V$. Como B es base de V, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$. Luego, por ser T y S lineales

$$\begin{aligned} T\,(v) = T\,(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) &= \alpha_1 T\,(v_1) + \cdots + \alpha_n T\,(v_n) \\ = \alpha_1 S\,(v_1) + \cdots + \alpha_n S\,(v_n) &= S\,(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = S\,(v)\,. \end{aligned}$$

□

TEOREMA 7.4. *Sean V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo con* $dim\,(V) = n$ *. Sea* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *una base de V y* $w_1, \ldots, w_n \in W$ *arbitrarios. Entonces, existe una única transformación lineal* $T : V \to W$ *tal que* $T\,(v_i) = w_i \quad \forall\, i = 1, \ldots, n$ *.*

Demostración. Existencia: Si $v \in V$ existen únicos $a_1, \ldots, a_n$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i$. Definimos entonces $T : V \to W$ mediante $T\,(v) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, w_i$. Hay que verificar que T es lineal. Sean v y $\bar{v}$ vectores y λ, μ escalares. Tenemos $v = \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i$ y $\bar{v} = \sum_{i=1}^{n} \bar{a}_i\, v_i$. Entonces $T\,(\lambda\, v + \mu\, \bar{v}) =$

$$= T\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda\, a_i + \mu\, \bar{a}_i)\, v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\, a_i + \mu\, \bar{a}_i)\, w_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i + \mu \sum_{i=1}^{n} \bar{a_i} v_i =$$
$= \lambda\, T\,(v) + \mu\, T\,(\bar{v})$. Luego T es lineal por la proposición 7.1

Unicidad: Supongamos que existan $T : V \to W$ y $S : V \to W$ lineales tales que $T\,(v_i) = w_i$ y $S\,(v_i) = w_i$. Entonces T y S coinciden en una base de V; y por la proposición 7.3, resulta que T=S. □

Hemos probado, pues, que una transformación lineal queda determinada por los valores que toma sobre una base.

EJEMPLO 7.4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineal tal que $T(1,2) = (3,-1,5)$ y $T(0,1) = (2,1,-1)$ Como $\{(1,2),(0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$, T está bien determinada.

Hallemos $T(x,y)$ con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} T(x,y) = T(x\ (1,2) + (-2x+y)(0,1)) &= xT(1,2) + (-2x+y)T(0,1) = \\ = x(3,-1,5) + (-2x+y)(2,1,-1) &= (-x+2y,-3x+y,7x-y). \end{aligned}$$

Así $T(x,y) = (-x+2y,-3x+y,7x-y)$.

EJEMPLO 7.5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal tal que $T(1,0) = T(0,1) = (2,3)$.

Como $\{(1,0),(0,1)\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$, T esta determinada.

Luego

$$\begin{aligned} T(x,y) = T(x(1,0) + y(0,1)) &= xT(1,0) + yT(0,1) = \\ = x(2,3) + y(2,3) &= (x+y)(2,3). \end{aligned}$$

7.2. Operaciones con transformaciones lineales.

DEFINICIÓN 7.2 (Suma de Transformaciones Lineales). Sean V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y $S : V \to W$ y $T : V \to W$ dos transformaciones lineales. Se define la **suma de S y T** como la transformación $S+T : V \to W$ tal que

$$(S+T)(v) = S(v) + T(v) \quad \forall v \in V.$$

.

EJEMPLO 7.6. Sean $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S(x, y, z) = (x + y + z, x - z)$ y $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x - y, y + z)$. Entonces la suma de S y T es la transformación $S + T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} (S + T)(x, y, z) &= S(x, y, z) + T(x, y, z) \\ &= (x + y + z, x - z) + (x - y, y + z) \\ &= (2x + z, x + y). \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 7.5. *Si S y T son transformaciones lineales, entonces $S + T$ es una transformación lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Sean v_1 y v_2 vectores, λ y μ escalares. Probemos

$$(S + T)(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda \ (S + T)(v_1) + \mu \ (S + T)(v_2).$$

En efecto

$$\begin{aligned} (S + T)(\lambda v_1 + \mu v_2) &= S(\lambda v_1 + \mu v_2) + T(\lambda v_1 + \mu v_2) = \\ &= \lambda S(v_1) + \mu S(v_2) + \lambda T(v_1) + \mu T(v_2) = \\ &= \lambda \left[S(v_1) + T(v_1)\right] + \mu \left[S(v_2) + T(v_2)\right] = \\ &= \lambda \left[(S + T)(v_1)\right] + \mu \left[(S + T)(v_2)\right]. \end{aligned}$$

□

DEFINICIÓN 7.3 (Producto por un escalar). Se define **el producto del escalar** $\lambda \in K$ **por la transformación** $\boldsymbol{T}$, como la transformación $(\lambda.T) : V \to W$ tal que $(\lambda.T)(v) = \lambda.T(v) \quad \forall v \in V$.

EJEMPLO 7.7. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y) = (x - 2y, x + y, x)$

Entonces el producto del escalar $\lambda = 5$ por la transformación T es la transformación $5.T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{aligned} (5.T)(x, y) = 5.T(x, y) = 5.(x - 2y, x + y, x) = \\ = (5 - 10y, 5x + 5y, 5x). \end{aligned}$$

PROPOSICIÓN 7.6. *Si T es una transformación lineal y λ un escalar entonces λT es una transformación lineal.*

DEMOSTRACIÓN. Probemos que

$$(\lambda T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (\lambda T)(v_1) + \alpha_2 (\lambda T)(v_2) \;\; \forall v_1, v_2 \; \in V \;\; \forall \alpha_1, \alpha_2 \; \in K$$

En efecto $(\lambda T)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \lambda T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) =$

$$= \lambda [\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(v_2)] = \lambda \alpha_1 T(v_1) + \lambda \alpha_2 T(v_2) =$$

$$= \alpha_1 \; \lambda T(v_1) + \alpha_2 \; \lambda T(v_2) = \alpha_1 (\lambda T)(v_1) + \alpha_2 (\lambda T)(v_2).$$

□

DEFINICIÓN 7.4 (Composición de Transformaciones Lineales.). Sean U, V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, y $S : U \to V$ y $T : V \to W$ dos transformaciones lineales. Se define la composición S y T como la transformación $T \circ S : U \to W$ tal que $(T \circ S)(u) = T(S(u))$.

EJEMPLO 7.8. Sean $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $S(x, y, z) = (2x, y + z)$ y $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y) = (y, x)$.

Luego $T \circ S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es tal que $(T \circ S)(x, y, z) = (y + z, 2x)$.

PROPOSICIÓN 7.7. *Si S y T son lineales, entonces $T \circ S$ es lineal*

DEMOSTRACIÓN. Probemos que $\forall \alpha_1, \alpha_2 \in K \;\; \forall u_1, u_2 \in V$.

$$(T \circ S)(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 \; (T \circ S)(u_1) + \alpha_2 \; (T \circ S)(u_2)$$

En efecto $(T \circ S)(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = T(S(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)) =$

$$= \alpha_1 T(\; S(u_1)) + \alpha_2 T(\; S(u_2)) = \alpha_1 \; (T \circ S)(u_1) + \alpha_2 \; (T \circ S)(u_2).$$

□

7.3. Imagen y núcleo de una transformación lineal.

DEFINICIÓN 7.5. Sean V y W espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K y $T : V \to W$ una transformación lineal.
i) Llamaremos núcleo de T al conjunto de V cuya imagen por T es el vector nulo, es decir $N(T) = \left\{v \in V : T(v) = \vec{0}\right\}$ (también se usará la notación $Ker(T)$ para $N(T)$).
ii) Llamaremos imagen de T al conjunto:
$Im(T) = \{w \in W : \exists v \in V \text{ con } w = T(v)\}$ (también se utilizará la notación $T(V)$ para $Im(T)$.)

EJEMPLO 7.9. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x, y, z) = (x + y + z, 2x + 2y + 2z)$.

1) Hallemos el núcleo de T.

$$(x, y, z) \in N(T) \Leftrightarrow T(x, y, z) = (0, 0) \Leftrightarrow (x + y + z, 2x + 2y + 2z) = (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + y + z = 0$$

Así el $N(T) = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\right\}$.

2) Hallemos la imagen de T.

$$(a, b) \in Im(T) \Leftrightarrow \text{ existe } (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 / \, T(x_0, y_0, z_0) = (a, b)$$

$$\Leftrightarrow \text{ existe } (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } (x_0 + y_0 + z_0, 2x_0 + 2y_0 + 2z_0) = (a, b)$$

$$\Leftrightarrow \text{ existe } (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 = a \\ 2x_0 + 2y_0 + 2z_0 = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{ el sistema } \begin{cases} x + y + z = a \\ 2x + 2y + 2z = b \end{cases} \text{ es compatible}$$

$$\Leftrightarrow \text{ el sistema } \begin{cases} x + y + z = a \\ 0 = b - 2a \end{cases} \text{ es compatible}$$

$$\Leftrightarrow b = 2a$$

Luego: $Im\,(T) = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \ : b = 2a \ \right\}$.

EJEMPLO 7.10. Se considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\,(x,y,z) = (x+y, y+z)$.

1) Hallemos el núcleo de T.

$$(x,y,z) \in \ N\,(T) \Leftrightarrow T\,(x,y,z) = \vec{0} \Leftrightarrow (x+y, y+z) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=0 \end{array} \right.$$

Así el $N\,(T) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : x = -y\,, z = -y \text{ con } y \in \mathbb{R}\right\}$.

2) Hallemos la imagen de T.

$$(a,b) \ \in \ Im\,(T) \Leftrightarrow \ \text{existe } \ (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3 / \ T\,(x_0,y_0,z_0) = (a,b)$$
$$\Leftrightarrow \ \text{existe } \ (x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } \left\{ \begin{array}{l} x_0+y_0=a \\ y_0+z_0=b \end{array} \right.$$
$$\Leftrightarrow \ \text{el sistema } \left\{ \begin{array}{l} x+y=a \\ y+z=b \end{array} \right. \ \text{ es compatible.}$$

Como el sistema es siempre compatible, resulta que $Im\,(T) = \mathbb{R}^2$.

EJEMPLO 7.11. Se considera la transformación lineal $T : P_2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T\,(p) = (p\,(0)\,, p\,(1))$.

1) Hallamos el núcleo $N\,(T)$.

Sea $p : p\,(t) = xt^2 + yt + z$ un polinomio de P_2

$$p \ \in N\,(T) \Leftrightarrow \ T\,(p) = (0,0) \Leftrightarrow (p\,(0)\,, p\,(1)) = (0,0)$$
$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} p\,(0)=0 \\ p\,(1)=0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z=0 \\ x+y+z=0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x \text{ cualquiera} \\ y=-x \\ z=0 \end{array} \right.$$

Luego $N\,(T) = \left\{p \ \in P_2 / \ p : p\,(t) = xt^2 - xt \text{ con } x \in \mathbb{R}\right\}$

2) Hallemos la imagen de T, $Im\,(T)$.

$$(a,b) \in Im(T) \Leftrightarrow \text{ existe } p_0 \in P_2 \text{ tal que } T(p_0) = (a,b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \text{ existe } p_0 \in P_2 \text{ tal que } (p_0(0), p_0(1)) = (a,b)$$

$$\Leftrightarrow \text{ existe } p_0 : p_0(t) = x_0t^2 + y_0t + z_0 \in P_2 \text{ tal que } (x_0, x_0 + y_0 + z_0) = (a,b)$$

$$\Leftrightarrow \text{ existen } x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{R} \text{ tales que } \begin{cases} x_0 = a \\ x_0 + y_0 + z_0 = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{ el sistema } \begin{cases} x = a \\ x + y + z = b \end{cases} \quad \text{es compatible.}$$

Como el sistema anterior es siempre compatible, resulta que $Im(T) = \mathbb{R}^2$

EJEMPLO 7.12. Se considera la transformación lineal

$T : M_{2x2}(\mathbb{R}) \to M_{2x2}(\mathbb{R})$ tal que $T(M) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot M$.

1) Hallemos el $N(T)$ Sea $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un matriz en $M_{2x2}(\mathbb{R})$

$$M \in N(T) \Leftrightarrow T(M) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} M = \vec{0}_{M_{2x2}(\mathbb{R})}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-c & b-d \\ -2a+2c & -2b+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-c &= 0 \\ b-d &= 0 \\ -2a+2c &= 0 \\ -2b+2d &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \\ c \quad \text{cualquiera} \\ d \quad \text{cualquiera} \end{cases}$$

Así $N(T) = \left\{ M \in M_{2x2}(\mathbb{R}) : \ M = \begin{pmatrix} c & d \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{con } c, d \in \mathbb{R} \right\}$.

2) Hallar la $Im\,(T)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Im\,(T) \Leftrightarrow \text{ existe } \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ z_0 & t_0 \end{pmatrix} \in M_{2x2}\,(\mathbb{R}) \text{ tal que}$$

$$T \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ z_0 & t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \text{ existe } \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ z_0 & t_0 \end{pmatrix} \in M_{2x2}\,(\mathbb{R}) \text{ tal que}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ z_0 & t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \text{ existe } \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ z_0 & t_0 \end{pmatrix} \in M_{2x2}\,(\mathbb{R}) \text{ tal que}$$

$$\begin{pmatrix} x_0 - z_0 & y_0 - t_0 \\ -2x_0 + 2z_0 & -2y_0 + 2t_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ existen $x_0, y_0, z_0, t_0 \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{cases} x_0 - z_0 & = & a \\ y_0 - t_0 & = & b \\ -2x_0 + 2z_0 & = & c \\ -2x_0 + 2z_0 & = & d \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \text{ el sistema } \begin{cases} x - z & = & a \\ y - t & = & b \\ -2x + 2z & = & c \\ -2x + 2z & = & d \end{cases} \text{ tiene solución.}$$

$$\Leftrightarrow \text{ el sistema } \begin{cases} x - z & = & a \\ y - t & = & b \\ 0 & = & 2a + c \\ 0 & = & 2b + d \end{cases} \text{ tiene solución}$$

$$\Leftrightarrow 2a + c = 0 \text{ y } 2b + d = 0.$$

Así la $Im\,(T) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2x2}\,(\mathbb{R}) : 2a + c = 0 \text{ y } 2b + d = 0 \right\}.$

PROPOSICIÓN 7.8. *$N\ (T)$ es un subespacio vectorial de V.*

Demostración. Veamos que $N\,(T) \neq \phi$ y que es cerrado respecto de las operaciones del espacio vectorial.

1) $T\,(0) = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \in N\ (T)$.

2) Si $\alpha\,,\,\beta \in K$ y $v_1\,,\,v_2 \in N\ (T)$ entonces:

$$T\,(\alpha\,v_1 + \beta\,v_2) = \alpha\,T\,(v_1) + \beta\,T\,(v_2) = \alpha\,.\,\vec{0} + \beta\,.\,\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\,v_1 + \beta\,v_2 \in N\ (T)$$

Luego $N\ (T)$ es un subespacio de V. □

PROPOSICIÓN 7.9. *$Im\ (T)$ es un subespacio vectorial de W.*

Demostración. Análogamente,

1) $T\left(\vec{0}\right) = \vec{0} \Rightarrow \vec{0} \in Im\ (T)$

2) Si $\alpha\,,\,\beta \in K$ y $w_1\,,\,w_2 \in Im\ (T)$ entonces existen $v_1\,,\,v_2$ tales que $T\,(\,v_1) = w_1$ y $T\,(\,v_2) = w_2$. Entonces si llamamos $v = \alpha\,v_1 + \beta\,v_2$, se tiene $T\,(v) = \alpha\,w_1 + \beta\,w_2$ y por lo tanto $\alpha\,w_1 + \beta\,w_2 \in Im\ (T)$. Luego $Im\ (T)$ es un subespacio de W. □

EJEMPLO 7.13. Hallemos una base del núcleo y una base de la imagen de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T\,(x, y, z, t) = (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t)$$

1) $(x, y, z, t) \in N\,(T) \Leftrightarrow T\,(x, y, z, t) = (0, 0, 0) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x - y + z + t, x + 2z - t, x + y + 3z - 3t) = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z+t = 0 \\ x+2z-t = 0 \\ x+y+3z-3t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z+t = 0 \\ y+z-2t = 0 \\ 2y+2z-4t = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y+z+t = 0 \\ y+z-2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z+t \\ y = -z+2t \end{cases}$$

Luego los vectores del núcleo de T son de la forma

$$(-2z+t, -z+2t, z, t) \text{ con } z, t \in \mathbb{R}. \text{ Como}$$

$$(-2z+t, -z+2t, z, t) = z(-2,-1,1,0) + t(1,2,0,1) \text{ con } z, t \in \mathbb{R},$$

todo vector del núcleo de T es combinación lineal de los vectores $(-2,-1,1,0)$ y $(1,2,0,1)$. Por ser $\{(-2,-1,1,0)$, $(1,2,0,1)$ un conjunto L.I., es una base de *N(T)*.

2) $w \in Im(T) \Leftrightarrow \exists v \in \mathbb{R}^4$ tal que $w = T(v)$, es decir

$$\exists (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \text{ tal que } w = T(x,y,z,t),$$

$$w = (x-y+z+t, x+2z-t, x+y+3z-3t)$$

$\Leftrightarrow \exists x,y,z,t \in \mathbb{R}$ tal que $v = (x,x,x)+(-y,0,y)+z(1,2,3)+t(1,-1,-3)$.

Luego todo vector de la imagen de T es combinación lineal de

$$\{(1,1,1), (-1,0,1), (1,2,3), (1,-1,-3)\}$$

(observar que dichos vectores están en la imagen pues son imagen respectivamente de los vectores de la base canónica).

Pero el conjunto anterior es L.D. pues tiene 4 vectores y $\dim(\mathbb{R}^3)=3$. Observemos que

$$(1,2,3) = 2(1,1,1) + (-1,0,1)$$
$$(1,-1,-3) = -1(1,1,1) + (-2)(-1,0,1)$$

Luego reducimos el generador L.D. hasta obtener el generador

$$\{(1,1,1), (-1,0,1)\}$$

que sí es L.I Luego $\{(1,1,1), (-1,0,1)\}$ es base de $Im(T)$.

PROPOSICIÓN 7.10. *Sea V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo y* $T : V \to W$ *lineal.*
i) Si $\{v_1, \ldots, v_n\}$*es un generador de V, entonces* $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ *es un generador de la* $Im(T)$ *(es decir que la imagen de un conjunto generador de V es un generador de la* $Im(T)$*).*
ii) Si $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ *es un conjunto L.I. en* $Im(T)$ *entonces* $\{v_1, \ldots, v_n\}$ *es conjunto L.I. en V (es decir que la pre-imagen de un conjunto L.I. en la* $Im(T)$ *es un conjunto L.I. en V)*

Demostración. i) Sea $w \in Im(T)$. Entonces existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$.

Como $v \in V$ y siendo $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un generador de V, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ escalares tales que $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$. Luego

$$w = T(v) = T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) == \alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n)$$

Así todo vector $w \in Im(T)$ es combinación lineal de $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\} \subseteq Im(T)$ es decir que $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es un generador de la $Im(T)$.

ii) Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = \vec{0}.$$

Aplicando T y usando la linealidad $\alpha_1 T(v_1) + \cdots + \alpha_n T(v_n) = \vec{0}$ y siendo $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ un conjunto L.I. resulta que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Esto prueba que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es L.I. □

PROPOSICIÓN 7.11. *Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo con* $dim(V) = n$ *y* $T : V \to W$ *una transformación lineal.*

Si $\{e_1, \ldots, e_d\}$ *es una base del* $N(T)$ *y* $\{e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n\}$ *es una base de V entonces* $\{T(e_{d+1}), \ldots, T(e_n)\}$ *es una base de la* $Im(T)$*.*

Demostración. Probaremos que $\{T(e_{d+1}), \ldots, T(e_n)\}$ es base de $Im(T)$.

1) Es L.I. pues $\alpha_{d+1} T(e_{d+1}) + \cdots + \alpha_n T(e_n) = \vec{0}$

$$\Rightarrow T(\alpha_{d+1} e_{d+1} + \cdots + \alpha_n e_n) = \vec{0} \Rightarrow \alpha_{d+1} e_{d+1} + \cdots + \alpha_n e_n \quad \in N(T)$$

$\alpha_{d+1}e_{d+1} + \cdots + \alpha_n e_n$ es C.L de la base de $N(T)$.

$$\alpha_{d+1}e_{d+1} + \cdots + \alpha_n e_n = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_d e_d$$

$$-\alpha_1 e_1 - \cdots - \alpha_d e_d + \alpha_{d+1}e_{d+1} + \cdots + \alpha_n e_n = \vec{0}.$$

Pero $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es L.I. porque es base de V; luego todos los coeficientes α_i son ceros. Hemos probado que $\{T(e_{d+1}), \ldots, T(e_n)\}$ es L.I.

2) $\{T(e_{d+1}), \ldots, T(e_n)\}$ generan la $Im(T)$ pues:

Sea $w \in Im(T) \Rightarrow \exists v \in V$ tal que $T(v) = w$

$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, porque $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es base de V,

$$T(v) = w = T(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) =$$

$$= \alpha_1 T(e_1) + \cdots + \alpha_d T(e_d) + \alpha_{d+1} T(e_{d+1}) + \cdots + \alpha_n T(e_n) =$$

$$= \alpha_{d+1} T(e_{d+1}) + \cdots + \alpha_n T(e_n).$$

Luego todo vector $w \in Im(T)$ es C.L. de $\{T(e_{d+1}), \ldots, T(e_n)\}$, es decir, $\{T(e_{d+1}), \ldots, T(e_n)\}$ genera a $Im(T)$. □

TEOREMA 7.12 (De las dimensiones). *Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, con $dim(V) = n$ y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces $dim\ (V) = dim\ (N(T)) + dim\ (Im(T))$.*

DEMOSTRACIÓN. Como N(T) es subespacio de V, si $d = dim(N(T))$, tenemos $0 \leqslant d \leqslant n$.

Discutiremos tres casos.

1er. Caso. d=n. Como $dim(N(T)) = V$ obtenemos $N(T) = V$.

Entonces $T(v) = \vec{0}\ \ \forall v \in V$, es decir $Im(T) = \vec{0}$ y $dim(Im(T)) = 0$, cumpliéndose la tesis en este caso.

2do. Caso. $0 < d < n$. El resultado es una consecuencia directa de la proposición anterior.

3er. Caso. $d = dim(N(T)) = 0$. Luego $N(T) = \left\{\vec{0}\right\}$.

Sea $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V. Por ser $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un generador de V, por la Proposición 7.10(i) $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ un generador de la $Im(T)$.

Veamos que también es L.I. En efecto

$$\alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = \vec{0} \Leftrightarrow T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \quad \in N(T) \Leftrightarrow \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \ldots . = \alpha_n = 0$$

por ser $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V. Por lo tanto $\{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es base de la $Im(T)$.

Así $dim(Im(T)) = n$ y se cumple que $dim\ V = dim\ N(T) + dim\ Im(T)$.

□

7.4. Transformaciones lineales inyectivas y sobreyectivas.

Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K y $T : V \to W$ una transformación lineal.

Recordemos que T es inyectiva cuando $T(v_1) = T(v_2)$ *entonces* $v_1 = v_2$; o equivalentemente $v_1 \neq v_2$ entonces $T(v_1) \neq T(v_2)$.

PROPOSICIÓN 7.13. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
i) T es inyectiva.
ii) Para todo conjunto A linealmente independiente de V se cumple que $T(A)$ es linealmente independiente en W.
iii) $N(T) = \left\{\vec{0}\right\}$.

DEMOSTRACIÓN. $i) \Rightarrow ii)$ Sabemos que T es inyectiva. Sea $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ un conjunto L.I. de V. Probemos que $T(A) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es L.I. en W.

Sean $\alpha_1, \ldots ., \alpha_n \in K$ tales que $\alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = \vec{0}_w$. Debemos probar que $\alpha_1 = \ldots . = \alpha_n = 0$. Siendo T lineal obtenemos
$T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = \vec{0}_w$.

Así $T(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) = T\left(\vec{0}_v\right)$ y como T es inyectiva se obtiene que

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = \vec{0}_v$$

y siendo $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ L.I., se cumple que $\alpha_1 = \ldots . = \alpha_n = 0$.

$ii) \Rightarrow iii)$ Supongamos, por absurdo, que $N(T) \neq \left\{\vec{0}_v\right\}$.Entonces existe $v \in N(T)$ con $v \neq \vec{0}_v$.

Luego $A = \{v\}$ es L.I. en V $\underset{porhiptesis}{\Rightarrow} T(A) = T(v)$ es L.I. en W y por ii) $T(v) = \vec{0}_w$ es L.I. Absurdo.

$iii) \Rightarrow i) Si T(v_1) = T(v_2) \quad \Rightarrow T(v_1) - T(v_2) = \vec{0}_w$ luego $T(v_1 - v_2) = \vec{0}_w \Rightarrow v_1 - v_2 \in N(T)$ por iii) $v_1 - v_2 = \vec{0}_v$ es decir $v_1 = v_2$. □

Recordemos ahora que T es sobreyectiva cuando $\forall w \in W$ existe $v \in V$ con $T(v) = w$, o equivalentemente $Im(T) = W$.

PROPOSICIÓN 7.14. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones: i) T es sobreyectiva*
ii) Para todo A generador de V se cumple que $T(A)$ es un generador de W
iii) Existe un generador A_0 de V tal que $T(A_0)$ es generador de W.

DEMOSTRACIÓN. $i) \Rightarrow ii)$ Sea A un generador de V. Por la Proposición 7.10 se cumple que $T(A)$ es un generador de la $Im(T)$.Pero $Im(T) = W$, por ser T sobreyectiva. Así $T(A)$ es un generador de W.

$ii) \Rightarrow iii)$ Inmediato. $iii) \Rightarrow i)$ Sabemos que existe $A_0 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ generador de V tal que $T(A_0) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es generador de W.Sea $w \in W$, como $T(A_0)$ es generador de W, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que

$$w = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n)$$

Siendo T lineal se cumple que

$$w = T(\alpha_1 v_1 + \ldots. + \alpha_n v_n)$$

Hemos probado que dado $w \in W$ existe $v_0 = \alpha_1 v_1 + \ldots. + \alpha_n v_n \in V$ tal que

$w = T(v_0)$ luego T es sobreyectiva. □

Recordemos por último que T es biyectiva cuando es inyectiva y sobreyectiva.

PROPOSICIÓN 7.15. *Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*
i) T es biyectiva
ii) Para toda base B del espacio V se cumple que T(B)es una base de W
iii) Existe una base B_0 del espacio V tal que $T(B_0)$ es una base de W.

Demostración.

$$i) \Rightarrow ii) T \text{ es lineal y biyectiva } \Leftrightarrow \begin{cases} \text{T es lineal e inyectiva } (1) \\ \text{T es lineal y sobreyectiva } (2) \end{cases}$$

Por otro lado, B es una base de $V \Leftrightarrow \begin{cases} B \text{ es L.I. } (1') \\ B \text{ es generador de V } (2') \end{cases}$

De (1) y (1') aplicando la Proposición 7.13 se obtiene que $T(B)$ es L.I.(1")

De (2) y (2') aplicando la Proposición 7.14 se obtiene que $T(B)$ es generador de W (2") De (1") y (2") se tiene que $T(B)$ es una base de W.

$ii) \Rightarrow iii)$ Inmediato. $iii) \Rightarrow i)$ Sabemos que existe B_0 es base de V tal que $T(B_0)$ es base de W, en particular existe B_0 es generador de V tal que $T(B_0)$ es generador de W, luego por la proposición 7.14 T es sobreyectiva.Probemos que T es inyectiva, lo cual es equivalente a probar que $N(T) = \left\{\vec{0}\right\}$, si $v \in N(T) \subseteq V$por ser $B_0 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V se cumple que existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.

Luego usando la linealidad de T se obtiene que $T(v) = \alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n)$. Pero como $v \in N(T)$, se tiene que $T(v) = \vec{0}$

$$\alpha_1 T(v_1) + \ldots + \alpha_n T(v_n) = \vec{0}$$

Pero $T(B_0) = \{T(v_1), \ldots, T(v_n)\}$ es L.I. (por ser base) entonces $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ Así $v = \vec{0}$. $\square$

Recordemos que T es biyectiva si y solo si T es invertible, es decir, que existe la función inversa T^{-1}.

PROPOSICIÓN 7.16. *Sean V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo y $T: V \to W$ una transformación lineal y biyectiva.*

Entonces la función inversa $T^{-1}: W \to V$ es una transformación lineal.

Demostración. Sean w_1 y $w_2 \in W$ y λ y $\mu \in K$.

Observando que $TT^{-1}(w) = w$ y que T es lineal,

$$\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda TT^{-1}(w_1) + \mu TT^{-1}(w_2) =$$

$$= T\left(\lambda T^{-1}(w_1) + \mu T^{-1}(w_2)\right)$$

Aplicando T^{-1} a ambos miembros

$$T^{-1}(\lambda w_1 + \mu w_2) = \lambda T^{-1}(w_1) + \mu T^{-1}(w_2).$$

□

7.5. Isomorfismos entre espacios vectoriales

DEFINICIÓN 7.6. Sean V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K.

a) Diremos que una transformación lineal $T : V \to W$ biyectiva es un isomorfismo.

b) Diremos que V y W son isomorfos cuando existe un isomorfismo que lleva V en W.

OBSERVACIÓN 7.17. De acuerdo a la proposición 7.16 si $T : V \to W$ es un isomorfismo entonces $T^{-1} : W \to V$ también lo es.

PROPOSICIÓN 7.18. *Sean V y W dos espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo K. Entonces las proposiciones a) y b) son equivalentes:*

a) $\dim(V) = \dim(W)$

b) V es isomorfo a W.

DEMOSTRACIÓN. $a) \Rightarrow b)$ Sea $dim\,(V) = dim\,(W) = n$. Sean $A = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V y $B = \{w_1, \ldots, w_n\}$ base de W. Luego definimos $T : V \to W$ lineal tal que $T\,(v_i) = w_i$ (T está "bien definida"por el teorema 7.4). Como existe una base A de V tal que $T\,(A) = B$ es base de W, T es un isomorfismo por la proposición 7.15.

$b) \Rightarrow a)$ Como V es isomorfo a W, existe un isomorfismo: $T : V \to W$. Por el teorema de las dimensiones se tiene que $dim\,(V) = dim\,(N\,(T)) + dim\,(Im\,(T))$. Por ser T inyectiva $dim\,(N\,(T)) = 0$.Por ser T sobreyectiva $Im\,(T) = W$. Luego $dim\,(V) = dim\,(W)$. □

COROLARIO 7.19. *Si V es un espacio vectorial, con $dim\,(V) = n$, sobre el cuerpo **K**, entonces V es isomorfo a K^n.*

DEMOSTRACIÓN. En efecto el espacio vectorial K^n sobre el cuerpo K tiene dimensión n. Así $dim\,(V) = dim\,(K^n) = n \Rightarrow V y K^n$ son isomorfos. □

Las coordenadas como transformación lineal

Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo K. Fijemos una base $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ del espacio V, entonces $\forall v \in V$, existen y son únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$.

Luego definimos $coord_B : V \to K^n$ tal que

$$coord_B\,(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

(es decir que a cada vector $v \in V$ le asociamos sus coordenadas en la base B).

PROPOSICIÓN 7.20. *$coord_B$ es un isomorfismo entre V y $\mathbb{K}^n$.*

Demostración. 1) $coord_B$ es lineal. Sean $v, w \in V$, luego existen y son únicos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n \in K$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \;\Rightarrow coord_B\,(v) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$w = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n \;\Rightarrow coord_B\,(w) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

Luego $v + w = (\alpha_1 + \beta_1)\, v_1 + \ldots. + (\alpha_n + \beta_n)\, v_n$

$$\Rightarrow \; coord_B\,(v + w) = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

Así $coord_B\,(v) + \; coord_B\,(w) \; = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} =$ $coord_B\,(v + w)$

Por otro lado si $\lambda \in K$, se tiene que $\lambda v = \lambda\,(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n) =$

$$= \lambda\alpha_1 v_1 + \ldots + \lambda\alpha_n v_n \;\Rightarrow coord_B\,(\lambda v) = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}$$

Así $\lambda \; coord_B\,(v) = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix} = coord_B\,(\lambda v)$

2) Como $dim\,(V) = dim\,(K^n) = n$ para probar que $coord_B$ es biyectiva, alcanza con probar que $coord_B$ es inyectiva.

Como $coord_B(v) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v = 0v_1 + \ldots + 0v_n \Leftrightarrow v = \vec{0}$

$N(coord_B) = \left\{\vec{0}\right\} \Rightarrow coord_B$ es inyectiva. $\square$

7.6. Matriz asociada a una transformación lineal.

Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo K y $T : V \to W$ una transformación lineal. Supongamos que $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base de V y $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ es una base de W. Ahora bien, $T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)$ son vectores de W y por lo tanto cada uno de ellos es una combinación lineal de los vectores de la base B:

$$\begin{array}{l} T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{12}w_2 + \ldots + a_{1m}w_m \\ T(v_2) = a_{21}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{2m}w_m \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ T(v_n) = a_{n1}w_1 + a_{n2}w_2 + \ldots + a_{nm}w_m \end{array}$$

En otras palabras

$$coord_B(T(v_1)) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{pmatrix},$$

$$coord_B(T(v_2)) = \begin{pmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{2m} \end{pmatrix}, \ \ldots, \ coord_B(T(v_n)) = \begin{pmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

Luego definimos:

DEFINICIÓN 7.7. Se llama representación matricial de T en las bases A y B o matriz asociada a T en las bases A y B, a la matriz que representaremos por ${}_B\left((T)\right)_A$ y cuya i-ésima columna son las coordenadas del vector $T\left(v_i\right)$ en la base B.

Esto es

$${}_B\left((T)\right)_A = \left(\begin{array}{cccc} \left[coord_B T\left(v_1\right)\right], & \left[coord_B T\left(v_2\right)\right], & \ldots, & \left[coord_B T\left(v_n\right)\right] \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{array} \right)$$

Nota. La matriz asociada se obtiene çolgando” las coordenadas respecto a la base de W de los vectores de la base de V. Obsérvese que los subíndices de esta matriz están colocados de manera distinta a la habitual; alcanzaría con cambiar las denominaciones de los subíndices de las coordenadas de $T(v_j)$ para obtener la forma habitual.

EJEMPLO 7.14. Consideremos la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que

$T\left(x, y\right) = \left(4x - 2y, 2x + y, x + y\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$, y las bases canónicas $A = \left\{\left(1, 0\right), \left(0, 1\right)\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ y $B = \left\{\left(1, 0, 0\right), \left(0, 1, 0\right), \left(0, 0, 1\right)\right\}$ de $\mathbb{R}^3$. Para hallar la matriz asociada a T en dichas bases

1) Hallamos las imágenes de los vectores de la base A

$$T\left(1, 0\right) = \left(4, 2, 1\right)$$

$$T\left(0, 1\right) = \left(-2, 1, 1\right)$$

2) Calculamos las coordenadas de estos en la base B

$$T\left(1, 0\right) = \left(4, 2, 1\right) = 4\left(1, 0, 0\right) + 2\left(0, 1, 0\right) + 1\left(0, 0, 1\right)$$

$$\Rightarrow coord_B\left(T\left(1,0\right)\right)=\begin{pmatrix}4\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$T\left(0,1\right)=\left(-2,1,1\right)=-2\left(1,0,0\right)+1\left(0,1,0\right)+1\left(0,0,1\right)$$

$$\Rightarrow coord_B\left(T\left(0,1\right)\right)=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}.\text{ Luego }{}_B\left(\left(T\right)\right)_A=\begin{pmatrix}4&-2\\2&1\\1&1\end{pmatrix}.$$

EJEMPLO 7.15. Consideremos la transformación lineal $T:P_2\rightarrow\mathbb{R}^2$ tal que $T\left(p\right)=\left(2a+b,a+b+4c\right)\quad\forall p\in P_2$ tal que $p\left(t\right)=at^2+bt+c\ \ \forall t\in\mathbb{R}$ y las bases $A=\{p_1,p_2,p_3\}$ de P_2 donde $p_1:p_1\left(t\right)=t^2,\ p_2:p_2\left(t\right)=t\ \ ,p_3:p_3\left(t\right)=1\quad\forall t\in\mathbb{R}$; y $B=\{\left(1,1\right),\left(1,0\right)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Para hallar la matriz asociada a T en dichas bases,

1) Hallamos las imágenes de los vectores de la base A

$$T\left(p_1\right)=\left(2,1\right)$$

$$T\left(p_2\right)=\left(1,1\right)$$

$$T\left(p_3\right)=\left(0,4\right)$$

2) Calculamos las coordenadas de estos en la base B

$$T\left(p_1\right)=\left(2,1\right)=1\left(1,1\right)+1\left(1,0\right)\Rightarrow coord_B\left(T\left(p_1\right)\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$T\left(p_2\right)=\left(1,1\right)=1\left(1,1\right)+0\left(1,0\right)\Rightarrow coord_B\left(T\left(p_2\right)\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$T\left(p_3\right)=\left(0,4\right)=4\left(1,1\right)-4\left(1,0\right)\Rightarrow coord_B\left(T\left(p_3\right)\right)=\begin{pmatrix}4\\-4\end{pmatrix}$$

Luego ${}_B\left(\left(T\right)\right)_A=\begin{pmatrix}1&1&4\\1&0&-4\end{pmatrix}$.

EJEMPLO 7.16. Consideremos la transformación lineal $T : P_2 \to P_2$ tal que $T(p) = p'$ y la base canónica de P_2 $A = \{p_0, p_1, p_2\}$ donde $p_i(t) = t^i, \quad i = 0, 1, 2.$

1) Hallemos las imágenes de los vectores de la base A:

$$T(p_0) = 0,\ T(p_1) = p_0,\ T(p_2) = 2p_1$$

2)Calculemos las coordenadas de estos en la base A

$$T(p_0) = 0 = 0p_0 + 0p_1 + 0p_2 \Rightarrow coord_A(T(p_0)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(p_1) = p_0 = 1p_0 + 0p_1 + 0p_2 \Rightarrow coord_A(T(p_1)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(p_2) = 2p_1 = 0p_0 + 2p_1 + 0p_2 \Rightarrow coord_A(T(p_2)) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego $_A((T))_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

OBSERVACIÓN 7.21. Si *dim(V)=n* y *dim(W)=m* la matriz asociada tiene dimensión $m \times n$.

OBSERVACIÓN 7.22. La matriz $_B((T))_A$ como recién vimos, queda completamente determinada conocidas la transformación lineal T y las bases A y B del dominio y codominio respectivamente.

Recíprocamente, dada una matriz M de tamaño $m \times n$ y dos bases A y B de los espacios V y W respectivamente, queda completamente determinada una transformación lineal T tal que $_B((T))_A = M$.

En efecto, al conocer la matriz M, sus columnas son las coordenadas en la base B de las imágenes de dos vectores de la base A.

Esto nos permite conocer a las imágenes de los vectores de la base A, y por el Teorema 7.4, esto es suficiente para determinar T.

EJEMPLO 7.17. Hallar la transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sabiendo que ${}_B((T))_A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donde $A = \{(1,0,1),(2,0,0),(0,1,0)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$ y $B = \{(2,-1),(0,2)\}$ es base de $\mathbb{R}^2$

De acuerdo a la definición de matriz asociada

$$coord_B(T(1,0,1)) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$coord_B(T(2,0,0)) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$coord_B(T(0,1,0)) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Luego

$$T(1,0,1) = 2(2,-1) + 1(0,2) = (4,0)$$

$$T(2,0,0) = 3(2,-1) + 0(0,2) = (6,-3)$$

$$T(0,1,0) = -1(2,-1) + 2(0,2) = (-2,5)$$

Ahora bien siendo $A = \{(1,0,1),(2,0,0),(0,1,0)\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ se cumple que $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ que

$$(x,y,z) = z(1,0,1) + \left(\frac{x-z}{2}\right)(2,0,0) + y(0,1,0)$$

Luego por la linealidad de T

$$T(x,y,z) = z\ T(1,0,1) + \left(\frac{x-z}{2}\right)\ T(2,0,0) + y\ T(0,1,0) =$$

$$z(4,0) + \ \frac{x-z}{2} \cdot (6,-3) + y(-2,5) = \left(3x - 2z - 2y, -\frac{3}{2}x + 5y + \frac{3}{2}z\right)$$

Así $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ es tal que

$$T\left(x,y,z\right)=\left(3x-2z-2y,-\frac{3}{2}x+5y+\frac{3}{2}z\right)$$

PROPOSICIÓN 7.23. *Considere los K-espacios vectoriales U, V y W, con dim(U)=s, dim(V)=n y dim(W)=t, y las transformaciones lineales $S:U\to V$y$T:V\to W$. Sean $A=\{u_1,\dots,u_s\}$, $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ y $C=\{w_1,\dots,w_t\}$ bases de U, V y W respectivamente. Entonces la matriz asociada a la composición $T\circ S$ es el producto de las matrices asociadas. Es decir*

$${}_C\left(\left(T\circ S\right)\right)_A={}_C\left(\left(T\right)\right)_B\,{}_B\left(\left(S\right)\right)_A.$$

Demostración. Sea ${}_C\left(\left(T\right)\right)_B=\left(a_{i\,j}\right)$, ${}_B\left(\left(S\right)\right)_A=\left(b_{j\,k}\right)$ y ${}_C\left(\left(T\right)\right)_B\,{}_B\left(\left(S\right)\right)_A=\left(c_{i\,j}\right)$ con $1\leqslant i\leqslant t,\ \ 1\leqslant j\leqslant n,\ \ 1\leqslant k\leqslant s.$

Por definición de producto de matrices $c_{i\,k}=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{i\,j}b_{j\,k}$.

Calculemos ${}_C\left(\left(T\circ S\right)\right)_A$. Sea $u_k\in A$.

$$\left(T\circ S\right)\,\left(u_k\right)=T\left(S\left(u_k\right)\right)=T\left(\sum_{j=1}^{n}b_{j\,k}v_j\right)=$$

$$\sum_{j=1}^{n}b_{j\,k}T\left(v_j\right)=\sum_{j=1}^{n}b_{j\,k}\sum_{i=1}^{t}a_{i\,j}w_i=\sum_{i=1}^{t}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{i\,j}b_{j\,k}\right)w_i=\sum_{i=1}^{t}c_{i\,k}w_i.$$

Resulta, por definición de matriz asociada ${}_C\left(\left(T\circ S\right)\right)_A=\left(c_{i\,j}\right)$. □

OBSERVACIÓN 7.24. Sea $T\ :\ V\to W$ un isomorfismo, B y B’ bases de V y W respectivamente, y sea $T^{-1}\ :\ W\to V$ la inversa de T.

Como $T\circ T^{-1}\ =\ id_W$

$$\Rightarrow\quad {}_{B'}\left(\left(T\right)\right)_B\cdot{}_B\left(\left(T^{-1}\right)\right)_{B'}\ =\ B'\left(\left(id_W\right)\right)_{B'}\ =I$$

$$\text{y de } T^{-1}\circ T\ =\ id_V$$

$$\Rightarrow\quad {}_B\left(\left(T^{-1}\right)\right)_{B'}\cdot{}_{B'}\left(\left(T\right)\right)_B\ =\ {}_B\left(\left(id_V\right)\right)_B\ =I$$

y por lo tanto la matriz asociada a la transformación inversa es la inversa de la matriz asociada a la transformación. Es decir si $_{B'}\left((T)\right)_B = A \Rightarrow {}_B\left(\left(T^{-1}\right)\right)_{B'} = A^{-1}$

PROPOSICIÓN 7.25. *Sean dos transformaciones lineales de espacios vectoriales sobre un cuerpo K, $T : V \to W$ y $S : V \to W$ y α un escalar de K. Sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ base de V y $E = \{w_1, \ldots, w_m\}$ base de W. Entonces:*

$$_E\left((T + S)\right)_B = {}_E\left((T)\right)_B + {}_E\left((S)\right)_B, \quad {}_E\left((\lambda T)\right)_B = \lambda\, {}_E\left((T)\right)_B,$$

Demostración. Sean $A = (a_{ij}) = {}_E\left((T)\right)_B \quad B = (b_{ij}) = {}_E\left((S)\right)_B$. Entonces: $T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad S(v_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i$. De donde $(T + S)(v_j) = T(v_j) + S(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i + \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} (a_{ij} + b_{ij}) w_i \Rightarrow {}_E\left((T + S)\right)_B = (a_{ij} + b_{ij}) = A + B$. Además $(\lambda T)\, v_j = \lambda T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = \sum_{i=1}^{m} \lambda a_{ij} w_i \Rightarrow {}_E\left((\lambda T)\right)_B = (\lambda a_{ij}) = \lambda A$. □

OBSERVACIÓN 7.26. Demostración de la propiedad asociativa del producto de matrices usando transformaciones lineales.
Se trata de ver que si A, B, C son matrices, entonces:

$$(AB)\, C = A\, (BC)$$

si las dimensiones relativas de las matrices hacen que la expresión tenga sentido.

Ya vimos (observación 7.22) que fijando bases hay una correspondencia biunívoca entre matrices y transformaciones lineales, por lo tanto, el producto anterior se puede interpretar como un producto (o composición) de transformaciones lineales.

Consideremos los espacios vectoriales K^m, K^n, K^p, K^r y sus respectivas bases E_m, E_n, E_p E_r. Sean $T : K^n \to K^m$ tal que $_{E_m}\left((T)\right)_{E_n} =$

$A_{m\times n}$, $S: K^p \to K^n$ tal que ${}_{E_n}((S))_{E_p} = B_{n\times p}$ y $L: K^r \to K^p$ tal que ${}_{E_p}((L))_{E_r} = C_{p\times r}$.

Luego, en virtud de que la composición de funciones es asociativa tenemos que:

$$(A\,.\,B)\,.\,C = [((T))\,.\,((S))]\,.\,((L)) = ((T\circ S))\,.\,((L)) =$$

$$= (((T\circ S)\;L)) = ((T\circ(S\circ L))) =$$

$$= ((T))\,.\,((S\,L)) = ((T))\,[((S))\,.\,((L))] = A.\,(B.C)$$

(Hemos omitido para simplificar la notación, las bases en cuestión.)

TEOREMA 7.27. *Sean V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bases ordenadas de V y W respectivamente; y $T: V \to W$ una transformación lineal. Entonces se cumple que ${}_B((T))_A\ coord_A(v) = coord_B(T(v))$*

DEMOSTRACIÓN. Usaremos las siguientes notaciones

$${}_B((T))_A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ y } coord_A(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ siendo}$$

$${}_B((T))_A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\},$$

por definición de matriz asociada

$$\text{(I)} \quad \begin{array}{l} T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots. + a_{m1}w_m \\ T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots. + a_{m2}w_m \\ \vdots \\ T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots. + a_{mn}w_m \end{array}$$

y siendo $coord_A(v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ tenemos que $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \ldots + x_n v_n$. Luego aplicando T y usando la linealidad

$$\text{(II) } T(v) = x_1\ T(v_1) + x_2\ T(v_2) + \ldots + x_n\ T(v_n)$$

Sustituimos (I) en (II) obteniendo

$$\begin{aligned} &T(v) = \\ &x_1(a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \ldots + a_{m1}w_m) + x_2(a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \ldots + a_{m2}w_m) \\ &\qquad + \ldots + x_n(a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \ldots + a_{mn}w_m) = \\ &= (x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots + x_na_{1n})\,w_1 + (x_1a_{21} + x_2a_{22} + \ldots + x_na_{2n})\,w_2 \\ &\qquad + \ldots + (x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \ldots + x_na_{mn})\,w_m. \end{aligned}$$

$$\text{Luego } coord_B(T(v)) = \begin{pmatrix} x_1a_{11} + x_2a_{12} + \ldots. + x_na_{1n} \\ x_1a_{21} + x_2a_{22} + \ldots. + x_na_{2n} \\ \vdots \\ x_1a_{m1} + x_2a_{m2} + \ldots. + x_na_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = {}_B((T))_A\ coord_A(v)$$

□

EJEMPLO 7.18. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que ${}_B((T))_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ siendo $A = B = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$. Hallar $T(2,0,-1)$.

Como $(2,0,-1) = 2(1,0,0) + (-1)(1,1,0) + 1(1,1,1)$

resulta que $coord_A\,(2,0,-1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Luego de acuerdo al Teorema 7.27 se cumple que

$$coord_B\,(T\,((2,0,-1))) = _B\,((T))_A \quad coord_A\,(2,0,-1) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Así $T\,(2,0,-1) = 3\,(1,0,0) + 4\,(1,1,0) + (-3)\,(1,1,1) = (4,1,-3)$

7.7. Núcleo e imagen de una matriz.

Dada una matriz $A \in M_{nxm}\,(K)$, definimos la transformación $T_A : K^m \to K^n$ tal que

$$T_A\,(x_1,\ldots,x_m) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \qquad \forall\,(x_1,\ldots,x_m) \in K^m$$

PROPOSICIÓN 7.28. *(a) T_A es lineal*

(b) Si E_m y E_n son las bases canónicas de K^m y K^n respectivamente entonces ${}_{E_n}\,((T_A))_{E_m} = A$

DEMOSTRACIÓN. (Ejercicio). □

DEFINICIÓN 7.8. Sea $A \in M_{nxm}\,(K)$. Definimos el **núcleo de la matriz** A como el núcleo de la transformación lineal T_A.

$$N\,(A) \overset{def}{=} N\,(T_A) = \left\{x \in \mathbb{R}^m : T_A\ \ (x) = \vec{0}\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^m : A\ x = \vec{0}\right\}$$

En otras palabras el $N\,(A)$ son las soluciones del sistema de ecuaciones homogéneo $A\ x = \vec{0}$.

DEFINICIÓN 7.9. Sea $A \in M_{nxm}(K)$. Definimos la **imagen de la matriz** A como la imagen de la transformación lineal T_A.

$$Im\,(A) \overset{def}{=} Im\,(T_A) = \{y \in \mathbb{R}^n : \text{ existe } x \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } T_A\ (x) = y\} =$$
$$\{y \in \mathbb{R}^n : \text{ existe } x \in \mathbb{R}^m \text{ tal que } A\,x = y\}$$

En otras palabras la $Im\,(A)$ son los "términos independientes" $y \in \mathbb{R}^n$ para los cuales el sistema $A\,x = y$ es compatible.

OBSERVACIÓN 7.29. Resulta obvio de las definiciones 7.2. y 7.3. que $N\,(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^m$ y $Im\,(A)$ es un subespacio de $\mathbb{R}^n$ (por serlo $N\,(T_A)$ e $Im\,(T_A)$)

PROPOSICIÓN 7.30. *Las columnas de A generan a la $Im\,(A)$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $T_A : K^m \to K^n$ tal que $T_A\,(x_1, \ldots, x_m) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$.

Si $\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$. Entonces de acuerdo a la proposición 7.10(i) $\{T_A\,(e_1)\,, T_A\,(e_2)\,, \ldots, T_A\,(e_m)\}$ es un generador de la $Im\,(T_A) = Im\,(A)$. Pero $T_A\,(e_i) = A \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = A^{(i)}$ (i-ésima columna de A) Así las columnas de A $\left\{A^{(1)}, \ldots, A^{(m)}\right\}$ constituyen un generador de la $Im\,(A)$. $\square$

COROLARIO 7.31. *El rango de una matriz A es la dimensión de su imagen, es decir $r\,(A) = dim\,(Im\,(A))$.*

EJEMPLO 7.19. Hallemos bases del núcleo y de la imagen de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Sea $(x, y, z) \in N(A)$. Entonces

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 01 & \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = z \\ z \text{ cualquiera} \end{cases}$$

Luego los vectores del núcleo de A son de la forma $(-z, z, z) = z(-1, 1, 1)$. Así $\{(-1, 1, 1)\}$ es base del $N(A)$ (¿por qué?)

Por otro lado de acuerdo a la Proposición 7.30 resulta que $\{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (1, 1, -2)\}$ genera a la $Im(A)$. Como $(1, 1, -2) = (1, 2, -1) - (0, 1, 1)$, el generador es L.D. y lo reducimos hallando $\{(1, 2, -1), (0, 1, 1)\}$ que es un generador L.I. –y por tanto una base– de $Im(A)$ (verifique).

EJEMPLO 7.20. Hallar una base del núcleo y una base de la imagen de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}. \text{ Sea } (x, y, z, t) \in N(T). \text{ Entonces}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + z + t = 0 \\ y + z - 2t = 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rl} x = & -2z + t \\ y = & -z + 2t \\ z = & \text{cualquiera} \\ t = & \text{cualquiera} \end{array} \right.$$

Así los vectores del núcleo de A son de la forma

$$(-2z + t, -z + 2t, z, t) = z\,(-2, 1, 0, 1) + t\,(1, 2, 0, 1)$$

Luego $\{(-2, 1, 0, 1), (1, 2, 0, 1)\}$ es un generador L.I. del $N(A)$ (verifique) y por lo tanto es base.

Por la proposición 7.30 $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1), (1, 2, 3), (1, -1, -3)\}$ es un generador de la $Im(A)$ que claramente es L.D.

Observando que $(1, 2, 3) = 2\,(1, 1, 1) + (-1, 0, 1)$

$$(1, -1, -3) = -1\,(1, 1, 1) + (-2)\,(-1, 0, 1)$$

reducimos el generador anterior hasta obtener $\{(1, 1, 1), (-1, 0, 1)\}$ que es un generador L.I. de la $Im(A)$ y por lo tanto es base.

7.8. Relación entre núcleo e imagen de una transformación lineal y de una matriz.

PROPOSICIÓN 7.32. *Sean V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V, $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ una base de W, $T : V \to W$ lineal. Entonces:*

1) Si $v \in N(T) \Rightarrow coord_A(v) \in N\left({}_B((T))_A\right)$
2) Si $x \in N\left({}_B((T))_A\right) \Rightarrow coord_A^{-1}(x) \in N(T)$

Demostración. 1) Si $v \in N(T)$ entonces $T(v) = \vec{0}$. Luego como $T(v)$ y $\vec{0}$ coinciden sus coordenadas en la base B también: $coord_B(T(v)) = coord_B\left(\vec{0}\right)$. Siendo $coord_B : W \to \mathbb{R}^m$ una transformación lineal se cumple: $coord_B\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$. Así $coord_B(T(v)) = \vec{0}$. Pero, por el Teorema 7.27: $coord_B(T(v)) = {}_B((T))_A\, coord_A(v)$

Así ${}_B((T))_A\, coord_A(v) = \vec{0}$ esto es $coord_A(v) \in N\left({}_B((T))_A\right)$

2) Si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in N\left({}_B((T))_A\right) \Rightarrow {}_B((T))_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0}$. Entonces, teniendo en cuenta que las columnas de la matriz asociada son las coordenadas de los transformados de la base del dominio se tiene que

$$\left([coord_B(T(v_1))] \ldots [coord_B(T(v_1))]\right) . \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow coord_B(T(v_1)).x_1 + \ldots + coord_B(T(v_n)).x_n = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\overset{(\text{por ser } coord_B \text{ lineal})}{\Rightarrow} \quad coord_B(x_1 T(v_1) + \ldots\ldots + x_n T(v_n)) = \vec{0}$$

$$\overset{(\text{por ser } coord_B \text{ inyectiva})}{\Rightarrow} \quad x_1 T(v_1) + \ldots\ldots + x_n T(v_n) = \vec{0}$$

$$\overset{(\text{linealidad de } T)}{\Rightarrow} \quad T(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = o_V$$

$$\Rightarrow \underbrace{x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n}_{coord_A^{-1}(x)} \in N(T).$$

□

OBSERVACIÓN 7.33. Con las notaciones de la proposición anterior recordemos que $coord_A : V \to \mathbb{R}^n$ es un isomorfismo entre V y $\mathbb{R}^n$.

Pero la proposición anterior nos asegura que todo vector del $N(T)$, al aplicarle la transformación lineal $coord_A$ se obtiene un vector del $N\left({}_B((T))_A\right)$ y recíprocamente todo vector del $N\left({}_B((T))_A\right)$ al aplicarle la transformación lineal inversa $coord_A^{-1}(x)$ se obtiene un vector del $N(T)$.

Luego $coord_A$ es un isomorfismo entre el $N(T)$ y $N\left({}_B((T))_A\right)$. Esto nos permite enunciar la siguiente

PROPOSICIÓN 7.34. *Sean V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V, $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ una base de W, $T : V \to W$ lineal. Entonces:*

1) $N(T)$ y $N\left({}_B((T))_A\right)$ son isomorfos

2) $dim(N(T)) = n - rango({}_B((T))_A)$.

3) Si $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ es base del $N(T) \Rightarrow$ $\{coord_A(e_1), coord_A(e_2), \ldots, coord_A(e_k)\}$ es base del $N\left({}_B((T))_A\right)$

4) Si $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ es base del $N\left({}_B((T))_A\right) \Rightarrow$ $\left\{coord_A^{-1}(x_1), coord_A^{-1}(x_2), \ldots, coord_A^{-1}(x_k)\right\}$ es base del $N(T)$.

Demostración. (Ejercicio) Sugerencias:

1) Vimos en la observación anterior que $coord_A$ es un isomorfismo entre $N(T)$ y $N\left({}_B((T))_A\right)$.

2) Basta recordar que dos espacios isomorfos tienen la misma dimensión y que si M es una matriz, $dim(Im(M)) = rango(M)$.

3) Los isomorfismos "llevan bases en bases".

4) La inversa de un isomorfismo es un isomorfismo. $\square$

Recomendamos prestar particular atención a los ejemplos que siguen.

EJEMPLO 7.21. Se considera una transformación lineal $T : M_{2x2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3$ tal que ${}_B((T))_A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ siendo

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{y } B = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}.$$

Queremos hallar una base del núcleo de T. Primero calculamos una base del núcleo de la matriz ${}_B((T))_A$. Sea $(x,y,z,t) \in N({}_B((T))_A)$. Entonces

$${}_B((T))_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ y + z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2z - 2t \\ y = -z - t \end{cases}$$

Así los vectores del núcleo de la matriz ${}_B((T))_A$ son de la forma

$$(-2z - 2t, z + t, z, t) = z(-2,1,1,0) + t(-2,1,0,1)$$

Entonces $\{(-2,1,1,0), (-2,1,0,1)\}$ es una base del $N({}_B((T))_A)$.

Luego, de acuerdo con la Proposición 7.34

$$\left\{ coord_A^{-1}(-2,1,1,0), coord_A^{-1}(-2,1,0,1) \right\} =$$

$$= \left\{ -2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. -2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base del núcleo de T.

EJEMPLO 7.22. Se considera una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que ${}_B((T))_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ siendo $A = B = \{(1,0), (1,1)\}$. Queremos hallar una base del núcleo de T.

Primero calculemos una base del núcleo de la matriz ${}_B((T))_A$:

$$(x, y) \in N\left({}_B((T))_A\right) \Leftrightarrow {}_B((T))_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \; x + 2y = 0 \;\; \Leftrightarrow x = -2y$$

Así los vectores del núcleo de la matriz ${}_B((T))_A$ son de la forma: $(-2y, y) = y(-2, 1)$. Entonces $\{(-2, 1)\}$ es una base de $N\left({}_B((T))_A\right)$. Luego, de acuerdo a la Proposición 7.34, $\left\{coord_A^{-1}(-2, 1)\right\} = \{-2(1,0) + 1(1,1)\} = \{(-1, 1)\}$ es una base del $N(T)$.

EJEMPLO 7.23. Se considera una transformación lineal $T : P_2 \to \mathbb{R}^3$ tal que ${}_B((T))_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ siendo $A = \{p_0, p_1, p_2\}$ con $p_i : p_i(t) = t^i \;\; (i = 0, 1, 2)$ y $B = \{(2, 0, -1), (0, 1, 4), (0, 0, 3)\}$.

Queremos hallar una base del núcleo de T.

Primero calculamos una base del núcleo de la matriz ${}_B((T))_A$

$$(x,y,z) \in N\left({}_B((T))_A\right) \Leftrightarrow {}_B((T))_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3z \\ y = -z \end{cases}$$

Así los vectores del núcleo de ${}_B((T))_A$ son de la forma:
$(3z, -z, z) = z(3, -1, 1)$. Entonces $\{(3,-1,1)\}$ es una base del $N\left({}_B((T))_A\right)$.
Luego, de acuerdo a la proposición 7.34, una base del núcleo de $N(T)$ es

$$\left\{coord_A^{-1}(3,-1,1)\right\} = \{3p_0 + (-1)p_1 + 1p_2\} = \{3p_0 - p_1 + p_2\}.$$

PROPOSICIÓN 7.35. *Sean V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V. $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ una base de W, $T : V \to W$ lineal. Entonces*

1) Si $w \in Im(T) \Rightarrow coord_B(w) \in Im\left({}_B((T))_A\right)$

2) Si $y \in Im\left({}_B((T))_A\right) \Rightarrow coord_B^{-1}(y) \in Im(T)$

Demostración. 1) Si $w \in Im(T) \Rightarrow$ existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$- Luego $coord_B(T(v)) = coord_B(w)$. Pero por el Teorema 7.27 $coord_B(T(v)) = {}_B((T))_A\ coord_A(v)$. Así $coord_B(w) = {}_B((T))_A\ coord_A(v)$

Hemos probado que existe $coord_A(v) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$${}_B((T))_A\ coord_A(v) = coord_B(w)$$

$$\Rightarrow coord_B(w) \in Im\left({}_B((T))_A\right)$$

2) Si $y = (y_1, \ldots, y_m) \in Im\left({}_B\left((T)\right)_A\right) \Rightarrow$ existe $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que ${}_B\left((T)\right)_A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x_1 coord_B\left(T\left(v_1\right)\right) + \ldots + x_n coord_B\left(T\left(v_n\right)\right) = y$$

$$\Rightarrow coord_B\left(x_1 T\left(v_1\right) + \ldots + x_n T\left(v_n\right)\right) = y$$

$$x_1 T\left(v_1\right) + \ldots + x_n T\left(v_n\right) = coord_B^{-1}\left(y\right) \Rightarrow$$

$$T(\underbrace{x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n}_{= v_0}) = coord_B^{-1}\left(y\right).$$

Así existe $v_0 \in V$ tal que $T\left(v_0\right) = coord_B^{-1}\left(y\right) \Rightarrow coord_B^{-1}\left(y\right) \in Im\left(T\right)$. $\square$

OBSERVACIÓN 7.36. Al igual que la observación 7.33 concluimos que $coord_B$ <u>es un isomorfismo entre</u> $Im\left(T\right)$ <u>y</u> $Im\left({}_B\left((T)\right)_A\right)$.

PROPOSICIÓN 7.37. *Sean V, W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base de V, $B = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ una base de W, $T : V \to W$ lineal. Entonces:*

1) $Im\left(T\right)$ e $Im\left({}_B\left((T)\right)_A\right)$ son isomorfos.

2) $dim\left(Im\left(T\right)\right) = rango\left(A\right)$

3) Si $\{h_1, \ldots, h_k\}$ es una base de la $Im\left(T\right) \Rightarrow$ $\{coord_B\left(h_1\right), coord_B\left(h_2\right), \ldots\ldots, coord_B\left(h_k\right)\}$ es base de la $Im\left({}_B\left((T)\right)_A\right)$

4) si $\{y_1, \ldots, y_k\}$ es una base de la $Im\left({}_B\left((T)\right)_A\right)$ entonces $\left\{coord_B^{-1}\left(y_1\right), coord_B^{-1}\left(y_2\right), \ldots, coord_B^{-1}\left(y_k\right)\right\}$ es base de la $Im\left(T\right)$.

Demostración. (Ejercicio). $\square$

EJEMPLO 7.24. Consideremos la transformación lineal del ejemplo 7.21 Hallemos una base de la $Im\,(T)$.

Primero hallemos una base de la imagen de la matriz $_B\left((T)\right)_A$.

Sabemos de la proposición 7.30 que las columnas de $_B\left((T)\right)_A$:

$$\{(1,1,1)\,,(-1,0,1)\,,(1,2,3)\,,(1,-1,-3)\}$$

son un generador de la $Im\left(_B\left((T)\right)_A\right)$. Claramente es L.D. Reducimos dicho generador hasta obtener el generador L.I.: $\{(1,1,1)\,,(-1,0,1)\}$. Así $\{(1,1,1)\,,(-1,0,1)\}$ es una base de la $Im\left(_B\left((T)\right)_A\right)$.

Luego de acuerdo a la proposición 7.37

$$\left\{coord_B^{-1}\,(1,1,1)\,,coord_B^{-1}\,(-1,0,1)\right\}=$$

$$=\{1\,(1,1,1)+1\,(0,1,1)+1\,(0,0,1)\quad,\quad -1\,(1,1,1)+0\,(0,1,1)+1\,(0,0,1)\}$$

$=\{(1,2,3)\,,(-1,-1,0)\}$ es base de la $Im\,(T)$.

EJEMPLO 7.25. Consideremos la transformación lineal del ejemplo 7.22

Hallemos una base de la $Im\,(T)$. Primero hallemos una base de la imagen de la matriz $_B\left((T)\right)_A$. Por la proposición 7.30 las columnas de $_B\left((T)\right)_A$, $\{(1,2)\,,(2,4)\}$ son un generador de la $Im\left(_B\left((T)\right)_A\right)$. Claramente es L.D. Lo reducimos y hallamos $\{(1,2)\}$ base de la $Im\left(_B\left((T)\right)_A\right)$. Luego por la proposición 7.37 $\left\{coord_B^{-1}\,(1,2)\right\}=\{1\,(1,0)+2\,(1,1)\}=\{(3,2)\}$ es una base de la $Im\,(T)$.

EJEMPLO 7.26. Consideremos la transformación lineal del ejemplo 7.23

Hallemos una base de la $Im\,(T)$. De acuerdo a la proposición 7.30 $\{(1,0,-1)\,,(2,1,1)\,,(-1,1,-2)\}$ es un generador de la $Im\left(_B\left((T)\right)_A\right)$.

Como es L.D., lo reducimos hasta obtener $\{(1,0,-1)\,,(2,1,1)\}$ que es una base de la $Im\left(_B\left((T)\right)_A\right)$. Luego por la proposición 7.37

$$\left\{coord_B^{-1}\,(1,0,-1)\;,\quad coord_B^{-1}\,(2,1,1,)\right\}=$$

$$\{1\,(2,0,-1)+1\,(0,1,4)+(-1)\,(0,0,3)\;,\;2\,(2,0,-1)+1\,(0,1,4)+1\,(0,0,3)\}$$

$\{(2,0,-4)\,,(5,1,5)\}$ es base de la $Im\,(T)$.

7.9. Cambio de base.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K. Supongamos que $dim\,(V) = n$. Consideremos una base A del espacio V. Hemos visto que todo vector $v \in V$, se puede representar por la n-úpla (vector columna) $coord_A\,(v) \in K^n$.

En esta sección responderemos la siguiente pregunta natural ¿cómo cambian nuestras representaciones si seleccionamos otras bases? Es decir si consideramos otra base A' del espacio V, ¿cómo se relaciona $coord_{A'}\,(v)$ con $coord_A\,(v)$?

Para responder estas preguntas necesitamos la siguiente

DEFINICIÓN 7.10. Sean $A = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $A' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_n\}$ bases del espacio V e $I : V \to V$ la transformación identidad (esto es $I\,(v) = v \ \ \forall v \in V$). Llamaremos matriz de cambio de la base ("vieja") A a la base ("nueva") A' a la matriz: $\,_{A'}\left((I)\right)_A$.

La relación entre las coordenadas está dada por la siguiente

PROPOSICIÓN 7.38. $coord_{A'}\,(v) =_{A'} \left((I)\right)_A \ \ coord_A\,(v)$

Demostración. Por Teorema 7.27

$$coord_{A'}\,(I\,(v)) =_{A'} \left((I)\right)_A \ \ coord_A\,(v)$$

Pero siendo $I\,(v) = v$, se obtiene la hipótesis. $\square$

PROPOSICIÓN 7.39. *Sea V un espacio vectorial sobre un cuerpo K. A y A' bases de V. $I : V \to V$ la transformación lineal identidad. Entonces:*

1) $\,_A\left((I)\right)_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ *(matriz identidad)*

2) $\,_{A'}\left((I)\right)_A$ *es invertible y* $\left[\,_{A'}\left((I)\right)_A\right]^{-1} =_A \left((I)\right)_{A'}$

Demostración. (Ejercicio). □

PROPOSICIÓN 7.40. *Sean V y W espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, A, A' bases de V, B, B' bases de W, $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces*

$$ {}_{B'}\left((T)\right)_{A'} = {}_{B'}\left((I_W)\right)_B \;\; {}_B\left((T)\right)_A \;\; {}_A\left((I_V)\right)_{A'} $$

donde $I_V : V \to V$ y $I_W : W \to W$ son las transformaciones lineales identidad en V y W respectivamente.

Demostración. Como $I_W \circ T \circ I_V \equiv T$ se tiene, aplicando la proposición 7.23 reiteradamente

$$ {}_{B'}\left((I_W \circ T \circ I_V)\right)_{A'} = {}_{B'}\left((T)\right)_{A'} \Rightarrow \;\; {}_{B'}\left((I_W)\right)_B \, {}_B\left((T \circ I_V)\right)_{A'} = {}_{B'}\left((T)\right)_{A'} $$

$$ \Rightarrow \; {}_{B'}\left((I_W)\right)_B \, {}_B\left((T)\right)_A \;\; {}_A\left((I_V)\right)_{A'} = {}_{B'}\left((T)\right)_{A'}. $$

□

7.10. Operadores y matrices semejantes.

Sea V un espacio vectorial de dimensión finita sobre un cuerpo K. Supondremos que $dim_K(V) = n$.

DEFINICIÓN 7.11. Llamaremos **operador en** V a toda transformación lineal $T : V \to V$.

DEFINICIÓN 7.12. Sean $A \; yB \in M_{nxn}(K)$. Diremos que A y B son semejantes cuando existe $P \in M_{n\times n}(K)$ invertible tal que $B = P^{-1}A\ P$.

EJEMPLO 7.27. La matriz $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ son semejantes, pues existe $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ cuya inversa es $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (verifique!).

PROPOSICIÓN 7.41. *Sean $A,\ B \in M_{nxn}(K)$. A y B son semejantes $\Leftrightarrow$ A y B son representaciones matriciales de un mismo operador T en V, para algún espacio vectorial V.*

Demostración. ($\Rightarrow$) Si consideramos la transformación lineal $T : K^n \to K^n$ tal que $T(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, entonces de acuerdo a la Proposición 7.28(b) tenemos $A =_E ((T))_E$ siendo $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ la base canónica de K^n.

Por otro lado, siendo A y B semejantes, existe $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ invertible tal que:

$$B = P^{-1}AP$$

Pero se cumple que: $P =_E ((I))_H$ donde $H = \{Pe_1, Pe_2, \ldots, Pe_n\}$ y por la Proposición 7.39

$$P^{-1} =_H ((I))_E$$

Así

$$B =_H ((I))_E\, {}_E((T))_E\, {}_E((I))_H$$

Pero por la Proposición 7.40

$${}_H((I))_E\, {}_E((T))_E\, {}_E((I))_H =_H ((T))_H$$

Por lo tanto

$$B =_H ((T))_H$$

($\Leftarrow$) Supongamos que $B =_H ((T))_H$, $A =_E ((T))_E$. Por la Proposición 7.40 sabemos que

$$_H((T))_H =_H ((I))_E \ \ _E((T))_E \ \ _E((I))_H$$

Sea $P =_E ((I))_H$, por la Proposición 7.39 tenemos que $P^{-1} =_H ((I))_E$. Hemos probado entonces que $B = P^{-1}A\ P$, es decir A y B son semejantes.

$\square$

PROPOSICIÓN 7.42. *Sean A y B matrices semejantes en $M_{n\times n}(K)$. Entonces*

$$\begin{array}{l} 1)\, rango\,(A) = rango\,(B) \\ 2)\, traza\,(A) = traza\,(B) \\ 3)\ det\,(A) = det\,(B) \end{array}$$

Demostración. 1) Por la proposición anterior, existe un operador lineal en V y bases A y B en dicho espacio tales que $A =_A ((T))_A\, y B =_B ((T))_B$.

Luego $rango\,(A) = rango\,(_A((T))_A) = dim\,(Im\,(T))$

$$rango\,(B) = rango\,(_B((T))_B) = dim\,(Im\,(T))$$

Así $rango\,(A) = rango\,(B)$

2) Existe $P \in M_{nxn}(\mathbb{R})$ invertible tal que $B = P^{-1}A\ P$. Luego

$$traza\,(B) = traza\left(P^{-1}A\ P\right) = traza\left(A\ P\ P^{-1}\right) = traza\,(A\ I) = traza\,(A)$$

(Recordar que $traza(MN)$=$traza(NM)$)

3)$det\,(B) = det\left(P^{-1}A\ P\right) = det\left(P^{-1}\right)\ det\,(A)\ det\,(P) =$
$= det\,(A)\ \ det\left(P^{-1}\right)\ \ det\,(P) = det\,(A)$

(Recordar que $det(MN)$=$det(M).det(N)$ y $det\left(M^{-1}\right) = (det\,(M))^{-1}$).

$\square$

OBSERVACIÓN 7.43. No vale el recíproco de la proposición anterior pues $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ cumplen

$$\begin{array}{l} rango\,(A) = rango\,(B) = 2 \\ traza\,(A) = traza\,(B) = 2 \\ det\,(A) = det\,(B) = 1 \end{array}$$

Sin embargo, no puede existir P invertible tal que $B = P^{-1}AP$ pues $B \neq A$.

7.11. El espacio vectorial $\mathcal{L}(V,W)$

Sean V, W espacios sobre un mismo cuerpo K. Notaremos $\mathcal{L}(V,W)$ al conjunto de todas las transformaciones lineales $T : V \to W$.

PROPOSICIÓN 7.44. *El conjunto $\mathcal{L}(V,W)$ con la suma de transformaciones lineales y el producto por un escalar por una transformación lineal definidas en la sección 2, forman un espacio vectorial.*

DEMOSTRACIÓN. (Ejercicio). □

PROPOSICIÓN 7.45. *Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo K. Supongamos que $dim\,(V) = n$ y $dim\,(W) = m$, entonces $\mathcal{L}(V,W)$ es isomorfo a $M_{mxn}(K)$.*

DEMOSTRACIÓN. Probaremos que existe una transformación lineal

$$F : \mathcal{L}(V,W) \to M_{mxn}(K)$$

biyectiva.

Definimos F de la siguiente manera: Fijemos A base de V y B base de W. Luego, a cada transformación $T \in \mathcal{L}(V,W)$ le asignamos por imagen mediante F a la matriz ${}_B((T))_A \in M_{mxn}(K)$, esto es $F(T) =_B ((T))_A$ Probemos que F es lineal. Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$ y λ, $\mu \in K$.

$$F(\lambda T_1 + \mu T_2) =_B ((\lambda T_1 + \mu T_2))_A = \lambda_B ((T_1))_A + \mu_B ((T_2))_A =$$
$$\lambda F(T_1) + \mu F(T_2).$$

Probemos que F es biyectiva.

1) F es inyectiva. Sean $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V,W)$ tales que $T_1 \neq T_2$. Debemos probar que $F(T_1) \neq F(T_2)$.

En efecto siendo A una base de V por la proposición 7.3 existe $v_i \in A$ tal que $T_1(v_i) \neq T_2(v_i)$, entonces $coord_B(T_1(v_i)) \neq coord_B(T_2(v_i))$. Pero de acuerdo a la definición de matriz asociada $coord_B(T_1(v_i))$ y $coord_B(T_2(v_i))$ son las i-ésimas columnas de las matrices ${}_B((T_1))_A$ y ${}_B((T_2))_A$ respectivamente.

Así ${}_B((T_1))_A \neq_B ((T_2))_A$; esto es $F(T_1) \neq F(T_2)$.

2) F es sobreyectiva. Dada $M \in M_{nxn}(\mathbb{R})$, debemos probar que existe $T \in \mathcal{L}(V,W)$ tal que $F(T) = M$.

Vimos en la observación 7.22 que dada una matriz $M \in M_{nxn}(K)$ existe una transformación lineal $T : V \to W$ tal que ${}_B((T))_A = M$, es decir que existe $T \in \mathcal{L}(V,W)$, $F(T) = M$. $\square$

COROLARIO 7.46. *Sean V, W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo K.*

Se cumple que $dim(\mathcal{L}(V,W)) = dim(V).dim(W)$.