Capítulo 5

# Transformaciones lineales y matrices

## 1. Matriz asociada a una transformación lineal

Supongamos que $V$ y $W$ son espacios vectoriales de dimensión finita y que $T : V \to W$ es una transformación lineal. Si fijamos bases en $V$ y en $W$, podemos identificar estos espacios con $\Bbbk^n$ y $\Bbbk^m$ respectivamente, donde $n = \dim(V)$ y $m = \dim(W)$. De esa forma, la transformación lineal $T$ se identifica con un elemento de $\operatorname{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk^m)$, que a su vez de acuerdo con los resultados del Capítulo 4, se identifica con una matriz de $n$ columnas y $m$ filas, o sea con un elemento de $\mathrm{M}_{m\times n}(\Bbbk)$.

A continuación describiremos explícitamente dicha matriz.

Supongamos que $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ y $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\} \subset W$ son bases de $V$ y $W$ respectivamente.

Sean $\mathbf{c}_{\mathcal{B}} : V \to \Bbbk^n$, $v_i \mapsto e_i$, y $\mathbf{c}_{\mathcal{C}} : W \to \Bbbk^m$, $w_i \mapsto e_i$, las identificaciones entre $V$ y $\Bbbk^n$ y $W$ y $\Bbbk^m$ respectivamente determinadas por las bases dadas — notar que a los efectos que siguen nos interesa escribir los elementos de $\Bbbk^n$ y $\Bbbk^m$ como columnas.

Definición 5.1. En la situación anterior definimos la matriz ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}} \in \mathrm{M}_{m\times n}$, llamada *matriz asociada* a la transformación lineal $T$ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, como

$$ {}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}} = \big[\mathrm{c}_{\mathcal{C}}(T(v_1)), \ldots, \mathrm{c}_{\mathcal{C}}(T(v_n))\big]. $$

Observación 5.2. (1) En términos más explícitos, si escribimos $T(v_i) = a_{1i}w_1 + \cdots + a_{mi}w_m$, $1 \le i \le n$, entonces la matriz ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$ se escribe como:

$$ {}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} $$

(2) Más formalmente, podemos decir que la matriz asociada ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$ es la única matriz que hace el diagrama de abajo conmutativo.

$$ \begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathcal{C}}"] \\ \Bbbk^n \arrow[r, "L_{{}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}}"'] & \Bbbk^m \end{tikzcd} \tag{5.1.1} $$

La transformación lineal $L_{{}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}}$ considerada arriba es un caso particular de la siguiente construcción, ya efectuada en el Capítulo 4. A una matriz $A \in \mathrm{M}_{m\times n}(\Bbbk)$ le asociamos una transformación lineal $L_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$ dada por la siguiente fórmula:

$$
\begin{aligned}
L_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \\
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\
&\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n
\end{aligned}
\tag{5.1.2}
$$

con $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \Bbbk^n$ y $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \Bbbk^m$.

Frecuentemente se abrevia

$$
L_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{5.1.3}
$$

y decimos que estamos multiplicando la matriz $A$ por el vector $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ese producto se puede pensar como un producto de matrices por vectores que da lugar a vectores, o sea matrices $A \in \mathrm{M}_{m\times n}$ se multiplican por elementos de $\Bbbk^n$ para producir elementos de $\Bbbk^m$. Este producto verifica las siguientes propiedades, que quedan como ejercicio (ver Ejercicio 1 ):

$$
\begin{aligned}
&A(av+w) = a(Av) + Aw\,,\ \text{es decir } L_A \text{ es una transformación lineal}\\
&(A+B)v = Av + Bv\\
&(aA)v = a(Av)\\
&\mathrm{Id}\, v = v\\
&0v = 0,
\end{aligned}
$$

donde $A \in \mathrm{M}_{m\times n}$, $v, w \in \Bbbk^n$, $a \in \Bbbk$.

Se calcula explícitamente mediante la fórmula (5.1.2), que es la dada por el producto de matrices, pensando el vector como una matriz columna de $n$ filas (ver Apéndice B ).

(3) Usando la notación anterior, la conmutatividad del diagrama (5.1.1) se puede escribir de la siguiente manera:

$$
\mathbf{c}_{\mathcal{C}}\big(T(v)\big) = {}_{\mathcal{C}}\,[T]_{\mathcal{B}}\,\mathbf{c}_{\mathcal{B}}(v).
$$

Observación 5.3. Notar que la matriz asociada a una transformación lineal depende del orden en que se toman los vectores de las respectivas bases. En definitiva, en este contexto las bases se deben pensar como listas o sea como conjuntos ordenados, y esta es la convención que usaremos en lo que sigue, sin mencionar explícitamente este hecho.

Ejemplo 5.4. Sea $T : \Bbbk_2[X] \to \Bbbk_1[X]$ definida como $T(p) = p'$ y consideremos las bases $\mathcal{B} = \{1, 1+X, 1+X+X^2\}$, $\mathcal{C} = \{1+X, 1-X\}$.

De las ecuaciones $T(1) = 0$, $T(1+X) = {}^1\!/\!_2(1+X) + {}^1\!/\!_2(1-X)$, $T(1+X+X^2) = {}^3\!/\!_2(1+X) - {}^1\!/\!_2(1-X)$, deducimos que la matriz asociada a $T$ en las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ tiene la siguiente forma

$$_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5.5. Sean $A \in \mathrm{M}_{m\times n}$ entonces si $\mathcal{B} \subset \Bbbk^n$ y $\mathcal{C} \subset \Bbbk^m$ son las bases canónicas de $\Bbbk^n$ y $\Bbbk^m$ respectivamente, entonces dada $L_A : \Bbbk^n \to \Bbbk^m$, tenemos que $_{\mathcal{C}}[L_A]_{\mathcal{B}} = A$.

## 2. Operaciones con transformaciones lineales y matrices asociadas

En esta sección completamos las propiedades básicas de la correspondencia entre transformaciones lineales y matrices mostrando que las operaciones entre unas y otras se corresponden.

Teorema 5.6. *Sean $V, W, U$ espacios vectoriales de dimensión, $n, m, l$ respectivamente y equipados con bases $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{C} \subset W$, $\mathcal{D} \subset U$, y sean $T, T' : V \to W$ y $S : W \to U$. Valen las siguientes fórmulas:*
*(1)* $_{\mathcal{C}}[T+T']_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}} + {}_{\mathcal{C}}[T']_{\mathcal{B}}$.
*(2)* $_{\mathcal{C}}[aT]_{\mathcal{B}} = a\,{}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$ *para todo* $a \in \Bbbk$.
*(3)* $_{\mathcal{D}}[ST]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{D}}[S]_{\mathcal{C}}\,{}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$.

Demostración. Probaremos solamente la tercera propiedad. Las otras se pueden verificar por el mismo método o directamente a partir de la definición de matriz asociada, ver Ejercicio 6.
(3) La conmutatividad de los diagramas de abajo caracterizan las matrices asociadas a $T$ y $S$ respectivamente.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathcal{C}}"] \\ \Bbbk^n \arrow[r, "L_{\mathcal{C}[T]_{\mathcal{B}}}"'] & \Bbbk^m \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "S"] \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathcal{C}}"'] & U \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathcal{D}}"] \\ \Bbbk^m \arrow[r, "L_{\mathcal{D}[T]_{\mathcal{C}}}"'] & \Bbbk^l \end{tikzcd}$$

Combinando ambos diagramas tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"'] \arrow[rr, bend left, "S\circ T"] \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[r, "S"'] \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathcal{C}}"'] & U \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathcal{D}}"] \\ \Bbbk^n \arrow[r, "L_{\mathcal{C}[T]_{\mathcal{B}}}"] \arrow[rr, bend right, "L_{\mathcal{D}[S]_{\mathcal{C}}} \circ L_{\mathcal{C}[T]_{\mathcal{B}}}"'] & \Bbbk^m \arrow[r, "L_{\mathcal{D}[T]_{\mathcal{C}}}"] & \Bbbk^l \end{tikzcd}$$

Luego el diagrama "exterior" también es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "S\circ T"] \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathcal{B}}"'] & U \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathcal{D}}"] \\ \Bbbk^n \arrow[r, "L_{\mathcal{D}[S]_{\mathcal{C}}} \circ L_{\mathcal{C}[T]_{\mathcal{B}}}"'] & \Bbbk^l \end{tikzcd}$$

Como $L_{\mathcal{D}[S]_{\mathcal{C}}} \circ L_{\mathcal{C}[T]_{\mathcal{B}}} = L_{\mathcal{D}[S]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}}$ deducimos que $L_{\mathcal{D}[ST]_{\mathcal{B}}} = L_{\mathcal{D}[S]_{\mathcal{C}\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}}$. Finalmente, como la transformación lineal $L : \mathrm{M}_{l\times m}(\Bbbk) \to \mathrm{Hom}_{\Bbbk}(\Bbbk^m, \Bbbk^l)$ es biyectiva, deducimos que ${}_{\mathcal{D}}[ST]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{D}}[S]_{\mathcal{C}}\,{}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$. □

Ejemplo 5.7. Se consideran en el espacio $\mathbb{R}^3$ la base canónica $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ y las transformaciones lineales $S$ y $T$ definidas de la siguiente forma: $S$ es la rotación con ángulo $\pi/2$ de eje $e_1$ y en la dirección anti-horaria para un observador orientado en la dirección de $e_1$ y $T$ es la rotación con ángulo $\pi/2$ de eje $e_3$ y en la dirección anti-horaria para un observador orientado en la dirección de $e_3$. Las matrices asociadas a $S$ y $T$ en la base $\mathcal{B}$, que denotamos con las letras $A$ y $B$ respectivamente, son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De lo anterior deducimos que la matriz asociada a $ST$ en la base $\mathcal{B}$ es

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Teorema 5.8. *Sean $V, W$ espacios vectoriales, con* $\dim V = n$, $\dim W = m$, *y* $\mathcal{B} \subset V$, $\mathcal{C} \subset W$, *bases. Entonces el mapa* $\varphi : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{M}_{m\times n}(\Bbbk)$, $\varphi(T) = {}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{C}}$, *es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

Demostración. El teorema 5.6 afirma en particular que $\varphi$ es una transformación lineal. Para probar la biyectividad de $\varphi$, recordemos que $\varphi(T)$ verifica el siguiente diagrama conmutativo (ver Observación 5.2 ):

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\mathbf{c}_{\mathcal{C}}"] \\ \Bbbk^n \arrow[r, "L_{\varphi(T)}"'] & \Bbbk^m \end{tikzcd}$$

La Observación B.7 nos dice que si $V = \Bbbk^n$ y $W = \Bbbk^m$, el mapa $\widetilde{\varphi}$ asociado a las bases canónicas es un isomorfismo. Luego alcanza con probar que el mapa $\psi : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{Hom}(\Bbbk^n, \Bbbk^m)$, $\psi(T) = L_{\varphi(T)}$ es biyectivo. En efecto, $\varphi = \mathrm{L} \circ \widetilde{\varphi}$. Para probar la afirmación restante, alcanza con observar que $\psi^{-1}(L_A) = \mathbf{c}_{\mathcal{C}} \circ T \circ \mathbf{c}_{\mathcal{B}}^{-1}$. □

## 3. Cambio de base

Hemos visto que la correspondencia — biyectiva — que a las transformaciones lineales les asocia matrices — fijadas bases en el dominio y en el codominio — es una herramienta de gran utilidad para trabajar con transformaciones lineales. En esta sección estudiaremos más a fondo esa correspondencia, describiendo la forma en que la matriz asociada cambia al cambiar las bases.

DEFINICIÓN 5.9. Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita $n$. Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de $V$ definimos la *matriz de cambio de base* de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ como ${}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}}$.

LEMA 5.10. *Las matrices de cambio de base verifican las siguientes propiedades.*
*(1)* ${}_{\mathcal{B}''}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'}\,{}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}} = {}_{\mathcal{B}''}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$.
*(2)* ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}} = \mathrm{Id}_n \in \mathrm{M}_n$.
*(3) La matriz de cambio de base* ${}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$ *es invertible y su inversa es* ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}'}$.

DEMOSTRACIÓN. (1) La demostración se deduce inmediatamente del Teorema 5.6, parte (3).
(2) La demostración se deduce inmediatamente de la definición de matriz asociada.
(3) Es inmediato aplicando las partes anteriores. □

Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales, sean $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset V$ bases de $V$ y $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset W$ bases de $W$. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, queremos relacionar las matrices ${}_{\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{B}'}$ y ${}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$.

TEOREMA 5.11. *Sean* $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset V$ *y* $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset W$ *bases respectivamente de dos espacios vectoriales de dimensión finita* $V$ *y* $W$*. Si* $T : V \to W$ *es una transformación lineal, entonces* ${}_{\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{B}'} = C\,{}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}\,D^{-1}$ *donde* $C$ *es la matriz de cambio de base en el espacio* $W$ *de la base* $\mathcal{C}$ *a la base* $\mathcal{C}'$ *y* $D$ *es la matriz de cambio de base en el espacio* $V$ *de la base* $\mathcal{B}$ *a la base* $\mathcal{B}'$*.*

DEMOSTRACIÓN. De la fórmula que nos da la matriz asociada a una composición de transformaciones lineales tenemos que ${}_{\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{B}'} = {}_{\mathcal{C}'}[\mathrm{Id}_W]_{\mathcal{C}}\,{}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}\,{}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}'}$. Como ${}_{\mathcal{B}}[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}'} = ({}_{\mathcal{B}'}[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}})^{-1}$, deducimos el teorema. □

El teorema anterior justifica la siguiente definición.

DEFINICIÓN 5.12. Sean $A, A' \in \mathrm{M}_{m\times n}(\Bbbk)$ dos matrices. Decimos que $A$ y $A'$ son *semejantes*, y denotamos esa relación como $A \sim A'$ si existen dos matrices invertibles, $C \in \mathrm{M}_m$ y $D \in \mathrm{M}_n$ tales que $A' = CAD^{-1}$.

OBSERVACIÓN 5.13. Queda como ejercicio para que el lector verifique que la relación $A' \sim A$ es una relación de equivalencia en el espacio vectorial $\mathrm{M}_{m\times n}(\Bbbk)$.

OBSERVACIÓN 5.14. Observar que el Teorema 5.11 se puede enunciar de la siguiente forma:

*Las matrices asociadas a una transformación lineal en diferentes bases son semejantes.*

Sabemos además que las matrices que realizan la semejanza son las matrices de cambio de base.

El Teorema 5.11 admite un recíproco. Si dos matrices son semejantes existe una transformación lineal y bases del dominio y codominio de modo que cada una de las matrices es la asociada a dicha transformación lineal en las bases dadas.

LEMA 5.15. *Sean* $A, A' \in \mathrm{M}_{m\times n}(\Bbbk)$ *dos matrices semejantes. Entonces existen espacios vectoriales* $V$ *y* $W$*, bases* $\mathcal{B}, \mathcal{B}' \subset V$ *y* $\mathcal{C}, \mathcal{C}' \subset W$ *y una transformación lineal* $T : V \to W$ *tal que* $A' = {}_{\mathcal{C}'}[T]_{\mathcal{B}'}$ *y* $A = {}_{\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B}}$.

DEMOSTRACIÓN. Sean $C \in \mathrm{M}_m(\Bbbk)$ y $D \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$ tales que $A' = CAD^{-1}$. Sea $V = \Bbbk^n$ y $W = \Bbbk^m$ y consideremos $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$ y $\mathcal{C} = \{f_1, \dots, f_m\}$, las bases canónicas de $V$ y $W$ respectivamente. Sean las bases $\mathcal{B}' = \{D^{-1}e_1, \dots, D^{-1}e_n\} \subset \Bbbk^n$ y $\mathcal{C}' = \{C^{-1}f_1, \dots, C^{-1}f_m\} \subset \Bbbk^m$. Ya probamos que $A = {}_{\mathcal{C}}[L_A]_{\mathcal{B}}$. Afirmamos que $C = {}_{\mathcal{C}'}[\mathrm{Id}_{\Bbbk^m}]_{\mathcal{C}}$ y $D = {}_{\mathcal{D}'}[\mathrm{Id}_{\Bbbk^m}]_{\mathcal{D}}$, por lo que aplicando el Teorema 5.11 se deduce que $A' = {}_{\mathcal{C}'}[L_A]_{\mathcal{B}'}$. Probaremos solamente la primera afirmación, ya que la otra se prueba de modo similar.

El Lema 5.10 (2) nos garantiza que alcanza con probar que $C^{-1} = {}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}_{\Bbbk^m}]_{\mathcal{C}'}$. De acuerdo con la definición de matriz asociada (ver Definición 5.1 ), si $C^{-1} = (a_{ij})$ tenemos que

$$
{}_{\mathcal{C}}[\mathrm{Id}_{\Bbbk^m}]_{\mathcal{C}'} = \left[\mathrm{c}_{\mathcal{C}}(C^{-1}f_1), \dots, \mathrm{c}_{\mathcal{C}}(C^{-1}f_m))\right] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix} = C^{-1}.
$$

□

OBSERVACIÓN 5.16. Consideremos el caso particular de transformaciones lineales de un espacio de dimensión finita en sí mismo, $T : V \to V$ y supongamos que tomamos siempre matrices asociadas con respecto a la misma base en el dominio y en el codominio.

(1) Si $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ son bases de $V$, entonces ${}_{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}'} = C\,{}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}\,C^{-1}$ donde $C$ es la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ en el espacio $V$. Diremos en este caso que las matrices son *conjugadas*; una relación como ésta es también de equivalencia.

(2) Recíprocamente, ya hemos probado que si $A, A' \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$ son dos matrices cuadradas conjugadas, con $A' = CAC^{-1}$, con $C \in \mathrm{M}_n(\Bbbk)$ una matriz invertible, entonces existe una transformación lineal $T$ de $\Bbbk^n$ y una base de $\Bbbk^n$ que llamamos $\mathcal{B}'$ tal que ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = A$ y ${}_{\mathcal{B}'}[T]_{\mathcal{B}'} = A'$.