Transformaciones lineales y bases

1. Generalidades y caracterizaciones de espacios vectoriales de dimensión finita

Ahora que tenemos la noción de base de un espacio vectorial y la idea de que conociendo una base del espacio lo conocemos todo, tiene sentido pensar que conociendo una transformación lineal en los elementos de una base del dominio, la conocemos completamente. Los siguientes dos resultados van en ese sentido.

Proposición 1.1. *Sean V, W $\mathbb{k}$-espacios vectoriales. Si T, S son transformaciones lineales y G es un generador de V, entonces*

$$T(v) = S(v) \quad \forall v \in V \text{ si y sólo si } T(g) = S(g) \quad \forall g \in G.$$

Demostración. El directo es inmediato.
Supongamos que $T(g) = S(g), \forall g \in G$ y consideremos un vector $v \in V$ cualquiera. Como G es generador, se tiene que existen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{k}$ y $g_1, g_2, \cdots, g_n \in B$ tales que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i$.
Usando la linealidad de T y de S, tenemos

$$T(v) = T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(g_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i S(g_i) = S(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i g_i) = S(v).$$

□

Teorema 1. *Sean V, W $\mathbb{k}$-espacios vectoriales y B una base de V. Dada una función $t : B \to W$, existe una única transformación lineal $T : V \to W$ tal que $T(b) = t(b), \forall b \in B$.*

Demostración. La unicidad sale de que B es un generador, usando la Proposición anterior.
Para la existencia, alcanza con definir, para cada $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$, con $0 \neq \alpha_i \in \mathbb{k}, b_i \in B, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$:

$$T(v) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t(b_i).$$

Observar primero que esta definición tiene sentido porque dado un $v \in V$, los α_i y los b_i son únicos, entonces la expresión de $T(v)$ no depende de una elección.
Falta probar que efectivamente T es lineal. Queda como ejercicio. □

Ejemplo 1.2.
1. *Hallar $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineal que verifique $T(1, 0) = (3, 1, -1)$ y $T(0, 1) = (0, 0, 2)$.*
   Por el teorema, como $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$, se tiene

   $$T(x, y) = xT(1, 0) + yT(0, 1) = x(3, 1, -1) + y(0, 0, 2) = (3x, x, -x + 2y).$$

2. *Hallar $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineal que verifique $T(1, 1) = (3, 1)$ y $T(0, 1) = (-1, 2)$. Por el teorema, como $(x, y) = x(1, 1) + (y - x)(0, 1)$, se tiene*

   $$T(x, y) = xT(1, 1)+(y-x)T(0, 1) = x(3, 1)+(y-x)(-1, 2) = (3x-y+x, x+2y-2x) = (4x-y, -x+2y).$$

3.

En lo que sigue vemos cómo se comportan las transformaciones lineales en cuanto a preservación de propiedades de independencia lineal y de generación.

Proposición 1.3. *Sean V, W $\Bbbk$-espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Si G es un generador de V, entonces $T(G)$ es un generador de $Im(T)$.*

Demostración. Ejercicio $\square$

Teorema 2. *Sean V, W $\Bbbk$-espacios vectoriales y $T : V \to W$ una transformación lineal. Entonces:*

1. *T es sobreyectiva si y sólo si lleva generadores de V en generadores de W,*
2. *T es inyectiva si y sólo si lleva conjuntos li de V en conjuntos li de W,*
3. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
   - *(i) T es isomorfismo,*
   - *(ii) T lleva toda base de V en una base de W,*
   - *(iii) T lleva alguna base de V en una base de W.*

Demostración.

1. Supongamos que T es sobreyectiva y que G es un generador de V. Como $Im(T) = W$, usando la Proposición anterior, se tiene que $T(G)$ es un generador de W.
   Recíprocamente, si T lleva generadores en generadores, consideremos un generador G de V. Como $T(G)$ genera W, se tiene $W = \langle T(G) \rangle = Im(T)$.

2. Supongamos que T es inyectiva y que L es un conjunto linealmente independiente en V. Si $x_1, x_2, \cdots x_n$ son elementos distintos 2 a 2 de L, vamos a probar que $\{T(x_1), T(x_2), \cdots, T(x_n)\}$ es linealmente independiente. Supongamos que
$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(x_i) = 0.$$
   Entonces $T(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i) = 0$. Como T es inyectiva $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i = 0$ y como L es li, se deduce $\alpha_i = 0, \forall i$.
   Recíprocamente, supongamos T lleva conjuntos li en conjuntos li. Veamos que $N(T) = \{0\}$. Si tomamos un vector v no nulo, entonces $\{v\}$ es li y por lo tanto $\{T(v)\}$ es li, de lo que deducimos $T(v) \neq 0$.

3. Combinando las partes anteriores, se deduce (i) implica (ii). Además (ii) implica (iii) es claro.
   Vamos a probar que (iii) implica (i). Sea B base de V tal que $T(B)$ es base de W. Se tiene que $Im(T) = \langle T(B) \rangle = W$, por lo que T es sobreyectiva. Para probar la inyectividad, supongamos que $T(v) = 0$ para $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i b_i$, con $\alpha_i \in \Bbbk, b_i \in B, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}$. Se tiene entonces
$$\sum \alpha_i T(b_i) = 0,$$
   y por lo tanto $\alpha_i = 0, \forall i$, de donde $v = 0$.

$\square$

El siguiente resultado es uno de los más importantes de la teoría, porque enuncia en algún sentido que los únicos $\Bbbk$- espacios vectoriales de dimensión finita son los $\Bbbk^n$.

Corolario 1.4. *1. Sean V, W $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces:*

$$V \cong W \text{ si y sólo si } dimV = dimW.$$

2. Todo espacio vectorial de dimensón n es isomorfo a $\Bbbk^n$.

Demostración. 1. Para el directo, considerar $T : V \to W$ isomorfismo y $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ base de V. Como $\{T(b_1), T(b_2), \cdots, T(b_i)\}$ es base de W se tiene que $dimV = n = dimW$.
Recíprocamente, si V y W tienen la misma dimensión y tomo B_V y B_W bases respectivas, existe una biyección $t : B_V \to B_W$. Queda como ejercicio probar que la (única) extensión lineal $T : V \to W$ de t es un isomorfismo.

2. Es inmediato usando el recíproco de la parte anterior, para $W = \Bbbk^n$ y V un espacio cualquiera de dimensión n.

□

Para entender mejor este último resultado de la sección, sugerimos que piensen en un resultado análogo en el marco de la teoría de conjuntos.

Corolario 1.5. *Sean V, W $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita tales que $dimV = dimW$ y $T : V \to W$ una transformación lineal. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) T es isomorfismo,

(ii) T es inyectiva,

(iii) T es sobreyectiva.

Demostración. Es claro que (i) implica (ii) y (iii).
Supongamos que T es inyectiva. Tomemos B base de V. Como T es inyectiva, se tiene que $T(B)$ es un conjunto li en W con $dimV$ elementos. Como $dimV = dimW$ se tiene que $T(B)$ es base de W. Por la parte 3 del Teorema, se deduce que T es un isomorfismo.
Queda como ejercicio probar de manera análoga que (iii) implica (i). □

2. Caracterización de las transf. lineales entre e.v. de dimensión finita

En un ejercicio del práctico (actividad 7 ej. 4) vimos que para V y W $\Bbbk$-espacios vectoriales, el espacio de las tranformaciones lineales de V a W, notado $Hom(V, W)$ es un subespacio del espacio de las funciones de V en W.

En esta sección vamos a intentar describir sus elementos en el caso particular en que $V = \Bbbk^n$ y $W = \Bbbk^m$ (por el Corolario 1.5, parte 2, sabemos que este caso es bastante general). En otras palabras, intentaremos describir cómo son todas las transformaciones lineales de $\Bbbk^n$ en $\Bbbk^m$.

Para conocer mejor $Hom(V, W)$, calculemos su dimensión en el caso en que V y W tienen dimensión finita.

Teorema 3. *Sean V, W $\Bbbk$-espacios vectoriales de dimensión finita. Entonces*

$$dimHom(V, W) = dimV dimW.$$

Demostración. Sean $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ y $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$ bases respectivas de V y W. Recordemos que para definir un elemento de $Hom(V, W)$ alcanza con dar los transformados de cada b_i.
Consideremos, para cada $i \leq n, j \leq m$, la tranformación lineal T_{ij} definida por

$$T_{ij}(b_k) = \begin{cases} c_j, & \text{si } k = i \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Vamos a probar que $H = \{T_{ij} \mid i \leq n, j \leq m\}$ es una base de $Hom(V, W)$. Una vez probado esto, se deduce

$$dimHom(V, W) = nm = dimV dimW.$$

Veamos que H es li.
Sean $\alpha_{ij} \in \mathbb{k}$ tales que $\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} T_{ij} = 0$. Evaluando en cada b_k, se tiene que

$$(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} T_{ij})(b_k) = 0_W, \forall k \leq n.$$

Pero $(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} T_{ij})(b_k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \alpha_{ij} T_{ij}(b_k) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj} c_j, \forall k \leq n$. Deducimos $\sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj} c_j = 0, \forall k \leq n$ y como C es li resulta $\alpha_{kj} = 0, \forall k \leq n, \forall j \leq m$.

Veamos ahora que H es generador de $Hom(V, W)$. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal cualquiera. Evaluando en cada b_k y usando que C es base, se tiene $T(b_k) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} c_j$, para ciertos $\alpha_{kj} \in \mathbb{k}, k \leq n, j \leq m$.
Consideremos por otra parte la tranformación lineal

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} T_{ij}.$$

Vamos a probar que $T = S$ y por lo tanto T es combinación lineal de elementos de H. Para ver que $T = S$ alcanza con probar que coinciden en cada $b_k, k \leq n$.
Ahora bien $S(b_k) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij} T_{ij}(b_k) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{kj} c_j = T(b_k)$, como queríamos demostrar. $\square$

Recordamos que las transformaciones lineales de $\mathbb{k}$ en $\mathbb{k}$ son exactamente las funciones L_a definidas por $L_a(x) = ax, \forall x \in \mathbb{k}$, para cierto $a \in \mathbb{k}$ (actividad 7 ej. 2). En efecto, es claro que las L_a son lineales, y para ver que no hay otras, tomamos una tranformación lineal $T : \mathbb{k} \to \mathbb{k}$ cualquiera, notamos que $T(x) = T(x.1) = xT(1)$, por lo que considerando $a = T(1)$ deducimos que $T(x) = ax, \forall x \in \mathbb{k}$.

Si miramos lo anterior con cuidado, lo que estamos usando es que definir la tranformación en una base (en ese caso la base es $\{1\}$), implica tenerla definida en todo $\mathbb{k}$.

La misma idea puede trasladarse a transformaciones lineales $T : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^m$ y la siguiente Proposición va en esa dirección.

Proposición 2.1. 1. *Sea $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{k})$. La función*

$$L_A : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^m \text{ definida por } L_A(v) = Av$$

es una tranformación lineal.

2. *La función*

$$L : \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{k}) \to Hom(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^m)$$

que lleva la matriz A en la transformación lineal L_A es una transformación lineal.

3. L es inyectiva.

Demostración. 1. Para probar la linealidad de L_A hay que volver a la definición del producto de matrices y observar que

$$A(v+w) = Av + Aw, \quad A(\lambda v) = \lambda(Av)$$

la primera igualdad es que L_A preserva la suma, la segunda que L_A preserva el producto por un escalar.

2. Veamos ahora que L es lineal. Esto se expresa en dos propiedades:

$$L(A+B) = L(A) + L(B), \quad L(\lambda A) = \lambda L(A),$$

que son igualdades de trasformaciones lineales. Debemos probar entonces

$$L(A+B)(v) = L(A)(v) + L(B)(v), \quad L(\lambda A)(v) = \lambda L(A)(v), \forall v \in \mathbb{k}^n.$$

Por definición $L(A) = L_A$. Las igualdades a probar entonces, son:

$$(A+B)v = Av + Bv, \quad (\lambda A)v = \lambda(Av).$$

Se trata también de propiedades conocidas del producto de matrices.

3. Para ver que la transformación lineal L es inyectiva, alcanza con ver que su núcleo es $\{0\}$. Consideremos entonces una matriz A tal que $L_A = 0$. En particular, si $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ es la base canónica de $\mathbb{k}^n$, se tiene

$$L_A(e_i) = 0, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}, \text{ i.e. } Ae_i = 0, \forall i \in \{1, 2, \cdots, n\}.$$

La igualdad $Ae_i = 0$ implica que la i-ésima columna de A tiene todas sus entradas nulas. Como se cumple para todo i, se deduce que A es nula.

□

Ahora bien, por el Teorema 3, los espacios dominio y codominio de L tienen la misma dimensión se deduce lo siguiente.

Corolario 2.2.

$$L : \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{k}) \to Hom(\mathbb{k}^n, \mathbb{k}^m)$$

es un isomorfismo.

Corolario 2.3. *Toda transformación lineal $T : \mathbb{k}^n \to \mathbb{k}^m$ es de la forma $T(v) = Av$ para cierta matriz A.*

Definición 2.4. *La matriz A del Corolario anterior es única y se llama* **matriz asociada a la transformación lineal T.**

Hay otras nociones más generales de **matriz asociada** (en bases cualesquiera y para transformaciones entre espacios vectoriales cualesquiera) que también definien isomorfismos, que trataremos en lo que sigue.