Universidad de la República
Facultad de Ciencias
Centro de Matemática

Grupos y Teoría de Galois
Primer Semestre 2020

Ejercicio 11 - Práctico 7

Sea G un grupo de orden 60 simple

1. Hallar n_3 y n_5. Calcular la cantidad de elementos de orden 3 y orden 5.

   $|G| = 60 = 2^2 \times 3 \times 5$

   Por lo tanto $n_3|20$ y $n_3 equiv 1(3)$. Esto implica que $n_3 = 1, 4, 10$. Como G simple, y un 3-subgrupo de Sylow tiene 3 elementos, $n_3 \neq 1$, de lo contrario tendríamos un subgrupo normal propio.

   Para determinar cuál de las opciones (4 ó 10) corresponde al valor de n_3, usemos el siguiente resultado general: si $H < G$, consideremos la acción por izquierda sobre el conjunto de las coclases G/H. Entonces, la acción induce un morfismo $\phi : G \to Sym(G/H)$. Luego, $\ker \phi \triangleleft G$ e $Im\phi < Sym(G/H)$

   En nuestro caso particular, tomemos P un 3-subgrupo de Sylow, y $H = N_G(P)$. Sabemos que $[G : H] = n_3$. Como G/H tiene n_3 elementos, $Sym(G/H)$ corresponde a S_{n_3}, así que el morfismo anterior implica la existencia de un morfismo $\phi : G \to S_{n_3}$. Como $\ker \phi \triangleleft G$ y G simple, el núcleo es 0, y por lo tanto $|Im(\phi)| = 60||S_{n_3}| = n_3!$. Esto implica, en particular, que $5|n_3!$, así que $n_3 \geq 5$. Por tanto $n_3 \neq 4$, y resulta $n_3 = 10$.

   Una vez obtenida la cantidad de 3-Sylows, calcular la cantidad de elementos de orden 3 es inmediato: cada 3-Sylow es isomorfo a $\mathbb{Z}_3$, así que tendrán intersección trivial. Por tanto, habrá 20 elementos de orden 3.

   Para n_5, tenemos que $n_5 \equiv 1(5)$ y $n_5|12$, así que $n_5 = 1, 6$. Como G simple, la única opción es $n_5 = 6$.

   La cantidad de elementos de orden 5 es por lo tanto 24.

2. $n_2|15$ y es impar, así que $n_2 = 1, 3, 5, 15$. Como G simple y aplicando el resultado anterior sobre el morfismo $\phi : G \to S_{n_2}$, obtenemos que $n_2 \geq 5$.

3. Si $n_2 = 5$, tenemos que $5 = n_2 = [G : N_G(S)]$, así que $|N_G(S)| = 12$.

4. Asumamos que $n_2 = 15$.

   (a) Si los 2-Sylow tienen intersección trivial dos a dos, entonces tendremos $15 \times 3 = 45$ elementos de orden 2 ó 4, eso entra en contradicción con el hecho que tenemos 44 elementos de orden 3 o 5 y que $|G| = 60$. por tanto se cumple la tesis.

   (b) $H, K < H \vee K$ son dos 2-Sylows de $H \vee K$. Además, $[K : H \cap K] = [H : H \cap K] = 2$, así que $H \cap K$ es normal en H y K. Luego, $H \cap K$ es normal en $H \vee K$.

   (c) $|H \vee K||60$, y $|H \vee K| \geq 6$. Por tanto tenemos $|H \vee K| = 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60$. Como G simple, y $|H|||H \vee K|$, reducimos la lista a $12, 20, 60$. Finalmente, usamos el resultado sobre el morfismo ϕ de la parte a), y resulta que $[G : H \vee K] \geq 5$. Luego, $|H \vee K| = 12$.

5. Inmediato a partir de lo discutido antes: para el morfismo $\phi : G \to S_5$, inyectivo, tenemos que $\phi(G) < S_5$, subgrupo normal. Considerar el morfismo $\sigma : S_5 \to -1, 1$, de forma que $A_5 = \ker \sigma$ (i.e., la función signo de la permutación). Entonces, $\ker(\sigma \circ \phi) \triangleleft G$ debe ser trivial. Por tanto, $\sigma(\phi(G)) = 1$, y entonces $G = A_5$ (pues tienen mismos órdenes)