Experimento 2

Descarga de silos:
Ley de Beverloo

Geofísica de medios granulares

Caudal másico, diámetro efectivo y flujo granular en silos

OBJETIVO

Estudiar experimentalmente el caudal másico de descarga de un silo cilíndrico en función del diámetro del orificio de salida. Se busca verificar la **Ley de Beverloo**, que predice una dependencia del caudal con la potencia 5/2 del diámetro efectivo del orificio. El experimento permite discutir por qué el flujo granular no se comporta como un líquido, el rol del tamaño de las partículas, y las implicancias para el diseño de silos y estructuras de almacenamiento de materiales granulares.

CONTEXTO FÍSICO

Flujo granular vs. flujo de líquidos

A diferencia de los líquidos, donde el caudal de descarga depende de la altura de la columna (ley de Torricelli), en los medios granulares el caudal de descarga de un silo es prácticamente independiente de la altura del material, siempre que esta supere unas pocas veces el diámetro del orificio. Esto se debe al **efecto Janssen**: la fricción entre los granos y las paredes del silo redistribuye parte del peso hacia las paredes, de modo que la presión en la base satura a un valor máximo independiente de la altura. Como consecuencia, el factor determinante del caudal no es la altura de la columna, sino la geometría del orificio de salida.

Antecedentes

Previo al trabajo de Beverloo et al. (1961), varios autores estudiaron el flujo granular a través de orificios: Franklin y Johanson (1955) mostraron que el flujo se reduce cuando el orificio es comparable al tamaño de las partículas, por efectos de bloqueo; Richards (1970) confirmó que el caudal es proporcional a $D^{5/2}$; y Fowler y Glastonbury (1959) introdujeron una dependencia explícita del tamaño de las partículas. En síntesis, ya se sabía que el flujo granular no se comporta como un líquido, que el diámetro del orificio es el factor más determinante del caudal, y que hay efectos no despreciables cuando el tamaño del orificio es comparable al de las partículas.

La Ley de Beverloo

Beverloo et al. (1961) sintetizaron estas observaciones en una expresión semi-empírica que introduce un **diámetro efectivo** del orificio:

$$W = C\, \rho_b \sqrt{g}\, (D - k\, d)^{5/2}$$

donde W es el caudal másico (kg/s), ρ_b la densidad aparente del medio granular, g la aceleración de la gravedad, D el diámetro del orificio, d el diámetro medio de las partículas, y C y k son constantes empíricas.

La constante C toma valores entre 0,58 y 0,64 para partículas esféricas de vidrio pulidas, y no depende de la fricción entre las partículas. El parámetro k es independiente del tamaño de la partícula, con valores típicos $1 < k < 3$ para partículas facetadas, dependiendo de su forma (Nedderman y Laohakul, 1980). El término kd se asocia a efectos de borde: las partículas cercanas al perímetro del orificio no participan plenamente del flujo, generando un «anillo vacío» que reduce el diámetro efectivo.

El exponente 5/2

El exponente 5/2 puede entenderse con un argumento dimensional. Si se modela la descarga como un flujo libre a través de un orificio circular, la velocidad de los granos cerca del orificio escala como $\sqrt{(gD)}$ (caída libre sobre una distancia del orden del diámetro). El área del orificio escala como D^2. Por lo tanto, el caudal volumétrico escala como $D^2 \times \sqrt{(gD)} = \sqrt{g}\, D^{5/2}$, lo que da la dependencia observada.

Conexión con la geofísica

La ley de Beverloo tiene relevancia directa en geofísica y geotecnia. Los flujos granulares gravitacionales aparecen en avalanchas de roca, lahares volcánicos, y flujos piroclásticos. En todos estos casos, la relación entre la geometría de la apertura (garganta del canal, ancho de la brecha) y el caudal del material granular es análoga a la descrita por Beverloo. Además, el almacenamiento y descarga de materiales en silos es un problema clásico de ingeniería donde la física granular tiene consecuencias prácticas directas: fallas estructurales, atascos y flujo irregular pueden resultar de un diseño inadecuado.

DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

El experimento consiste en medir el caudal másico de descarga de un silo cilíndrico para distintos diámetros de orificio. Se utiliza un recipiente cilíndrico vertical de acrílico transparente (diámetro interno ≈ 5,5 cm) con una placa intercambiable en la base que permite variar el diámetro del orificio circular de salida (entre 5 mm y 25 mm). Se pueden emplear distintos materiales granulares (microesferas de vidrio, arena, arroz, lentejas, etc.) para explorar el efecto del tamaño y la forma de las partículas sobre el caudal. Es necesario caracterizar previamente el material utilizado: medir el diámetro medio de las partículas d y la densidad aparente ρ_b.

La descarga se produce únicamente por gravedad, sin presión externa. Una celda de carga controlada por Arduino, colocada debajo del orificio de salida, registra la masa descargada en tiempo real (tiempo de muestreo ≈ 500 ms). Para cada diámetro de orificio, se llena el silo con la misma cantidad de material y se deja descargar completamente. Se repite cada medición al menos tres veces para estimar la reproducibilidad.

Es importante verificar que la celda de carga esté correctamente calibrada (tara y factor de escala) antes de comenzar. Asimismo, conviene que el orificio esté inicialmente tapado y se destape de forma rápida para obtener un inicio limpio del flujo.

ANÁLISIS DE DATOS

El objetivo del análisis es obtener el caudal másico para cada diámetro de orificio y verificar la Ley de Beverloo. Se recomienda usar MATLAB u Octave.

Paso 1: Lectura de datos y visualización

Leer los archivos de datos (tiempo, masa) para cada diámetro de orificio. Graficar la masa acumulada como función del tiempo para cada ensayo. Verificar que se observa una etapa de crecimiento lineal (flujo constante) precedida y seguida de transitorios.

> **Pista:** `readtable` o `load` para leer los datos. Graficar con `plot(t, m)` para cada ensayo.

Paso 2: Identificación del régimen de flujo constante

Determinar el intervalo de tiempo en el que el flujo es constante. Para ello, calcular la derivada temporal de la masa (diferencias finitas) y definir un umbral que permita detectar automáticamente el inicio y fin del régimen estacionario, descartando las fases transitorias.

> **Pista:** Usar `diff(m)./diff(t)` para la derivada numérica. Definir un umbral sobre esta derivada para detectar los instantes de inicio y fin del flujo estable. ¿Cómo elegir el umbral de manera objetiva?

Paso 3: Estimación del caudal másico

Dentro del intervalo de flujo constante, realizar un ajuste lineal de la masa en función del tiempo. La pendiente del ajuste es el caudal másico Q. La incertidumbre del caudal se estima a partir de la matriz de covarianza del ajuste lineal.

> **Pista:** `[p, S] = polyfit(t, m, 1)` da la pendiente y la estructura de estadísticas. Usar `polyval` con S para obtener intervalos de confianza. Repetir para cada diámetro y cada repetición.

Paso 4: Caudal vs. diámetro del orificio

Graficar el caudal medio (promediando las repeticiones) en función del diámetro del orificio, con barras de error. Verificar visualmente que la relación no es lineal.

> **Pista:** Usar `errorbar(D, Q_mean, Q_err)` para graficar con barras de error.

Paso 5: Ajuste a la Ley de Beverloo

Ajustar los datos de caudal vs. diámetro a la ecuación de Beverloo $W = C\,\rho_b \sqrt{g}\,(D - kd)^{5/2}$, con C y k como parámetros libres (ρ_b, g y d son conocidos). Usar un método de mínimos cuadrados no lineales. Comparar los valores obtenidos de C y k con los rangos esperados ($0{,}58 < C < 0{,}64$; $1 < k < 3$).

> **Pista:** Definir la función modelo como una función anónima: `f = @(p,D) p(1)*rho*sqrt(g)*(D - p(2)*d).^(5/2)`. Usar `lsqcurvefit` o `fit` con límites inferiores y superiores para restringir los parámetros a rangos físicamente razonables. ¿Qué pasa si no se imponen límites?

Paso 6: Verificación de la ley de potencia

Para verificar el exponente 5/2, graficar W vs. $(D - kd)$ en escala log-log (usando el valor de k del ajuste). Si la ley de Beverloo es correcta, los puntos deben alinearse sobre una recta de pendiente 5/2. Ajustar una recta en escala log-log y verificar la pendiente.

> **Pista:** `loglog(D_eff, Q, 'o')` para graficar en escala log-log. `polyfit(log(D_eff), log(Q), 1)` da la pendiente y la ordenada. ¿El exponente obtenido es compatible con 5/2?

PREGUNTAS PARA LA DISCUSIÓN

1. Graficar la masa acumulada en función del tiempo para al menos tres diámetros de orificio distintos. ¿Se observa un régimen de flujo constante en todos los casos? ¿Cuánto dura la fase transitoria?

2. ¿El caudal depende de la altura de la columna de material? Justificar la respuesta en términos del efecto Janssen. ¿Cómo podría verificarse esto experimentalmente?

3. ¿Cuáles son los valores obtenidos de C y k? ¿Son compatibles con los reportados en la literatura? Discutir posibles causas de discrepancia.

4. ¿Qué sucede cuando el diámetro del orificio es solo unas pocas veces mayor que el diámetro de las partículas? ¿Se observan atascos (jamming)? ¿A partir de qué relación D/d el flujo se vuelve intermitente?

5. Verificar el exponente 5/2 con un gráfico log-log. ¿El exponente obtenido es significativamente distinto de 5/2? ¿Qué implicaría un exponente diferente?

6. ¿Cómo cambiarían los resultados si se usaran partículas de diferente tamaño o forma (arena, arroz, lentejas)? ¿Qué parámetro de la ley de Beverloo se vería más afectado?

7. Discutir la analogía entre la descarga de un silo y los flujos granulares gravitacionales en geofísica (avalanchas de roca, lahares). ¿En qué sentido el silo es un modelo simplificado de estos fenómenos? ¿Cuáles son las limitaciones de esta analogía?

RESULTADOS ESPERADOS

A modo de guía, los resultados típicos son:

- El caudal crece de forma no lineal con el diámetro del orificio, siguiendo aproximadamente una ley de potencia con exponente 5/2.
- La masa acumulada en función del tiempo muestra un régimen lineal (flujo constante) bien definido para orificios grandes, y fases transitorias más largas para orificios pequeños.
- Los parámetros ajustados son típicamente $C \approx 0{,}58$–$0{,}64$ y $k \approx 1$–3, dependiendo de la forma y rugosidad de las partículas.
- Para orificios con $D/d < 5$–6, pueden observarse atascos intermitentes que dificultan la medición del caudal estacionario.
- El caudal es esencialmente independiente de la altura del material en el silo, siempre que esta supere unas 2–3 veces el diámetro del orificio.

REFERENCIAS

[1] W. A. Beverloo, H. A. Leniger, J. Van de Velde, *The flow of granular solids through orifices*, Chem. Eng. Sci. **15**, 260–269 (1961).

[2] F. Franklin, L. Johanson, *Flow of granular material through a circular orifice*, Chem. Eng. Sci. **4**, 119–129 (1955).

[3] J. C. Richards, *Principles of Powder Mechanics: Essays on the Packing and Flow of Powders and Bulk Solids*, Pergamon (1970).

[4] R. Fowler, J. R. Glastonbury, *The flow of granular solids through orifices*, Chem. Eng. Sci. **10**, 150–156 (1959).

[5] R. Nedderman, C. Laohakul, *The thickness of the shear zone of flowing granular materials*, Powder Technol. **25**, 91–100 (1980).

[6] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, R. P. Behringer, *Granular solids, liquids, and gases*, Rev. Mod. Phys. **68**, 1259 (1996).