

Efecto Janssen: presión en silos granulares

Geofísica de medios granulares
Saturación de presión, cadenas de fuerza y fricción con paredes

OBJETIVO

Estudiar experimentalmente cómo varía el peso registrado en la base de un silo cilíndrico en función de la altura de la columna de material granular. Se busca verificar el **efecto Janssen**: la presión en la base no crece linealmente con la altura (como en un líquido) sino que satura a un valor máximo, debido a la fricción entre los granos y las paredes del recipiente y a la redirección de esfuerzos. A partir del ajuste exponencial se estimarán el coeficiente de redirección de esfuerzos k y el coeficiente de fricción estático μ_s entre el material granular y la pared del silo.

CONTEXTO FÍSICO

Presión en líquidos vs. medios granulares

En los líquidos, la presión en el fondo de una columna crece linealmente con la altura: $P = \rho g z$. En los medios granulares, esto no ocurre. Los granos forman **cadenas de fuerza** (arcos de contacto) que redistribuyen parte del peso hacia las paredes del recipiente mediante fricción. Como resultado, la presión en la base crece inicialmente de forma lineal (cuando la columna es corta), pero luego satura a un valor máximo independiente de la altura.

El modelo de Janssen

Janssen (1895) modeló este fenómeno considerando el equilibrio de fuerzas sobre un volumen diferencial de altura dz en un cilindro de radio R . El peso del material granular en esa rodaja es $\rho g A dz$ (con $A = \pi R^2$). Parte de ese peso se transmite hacia abajo (esfuerzo vertical σ_z) y parte se redirige lateralmente hacia las paredes (esfuerzo horizontal $\sigma_h = k \sigma_z$, donde k es el coeficiente de redirección). La fricción estática con las paredes sostiene una fuerza $\mu_s \sigma_h$ por unidad de área. El equilibrio de fuerzas conduce a la ecuación diferencial:

$$\partial \sigma_z / \partial z - \rho g + (2\mu_s k / R) \sigma_z = 0$$

Solución: saturación exponencial

Esta ecuación diferencial lineal de primer orden tiene la solución:

$$\sigma_z(z) = (\rho g R) / (2\mu_s k) \times (1 - e^{-2\mu_s k z / R})$$

Para alturas pequeñas ($z \ll R / (2\mu_s k)$), la presión crece linealmente como $\rho g z$, igual que un líquido. Para alturas grandes ($z \gg R / (2\mu_s k)$), la presión satura al valor máximo $\sigma_z(\infty) = \rho g R / (2\mu_s k)$. La escala de transición es la longitud de Janssen: $\lambda = R / (2\mu_s k)$, que típicamente es del orden del diámetro del silo.

Coefficiente de redirección k

El parámetro $k = \sigma_h / \sigma_z$ relaciona los esfuerzos horizontal y vertical. Para arenas no consolidadas, se relaciona con el módulo de Poisson ν mediante $k = \nu / (1 + \nu)$. Valores típicos de ν entre 0,1 y 0,3 dan un rango $0,11 < k < 0,43$. Este coeficiente no es una propiedad intrínseca del material: depende del estado de preparación de la muestra (compactación, historia de carga, humedad).

Efecto de las vibraciones

Cuando un silo es sometido a vibraciones, los granos se reconfiguran y alteran la red de contactos, lo que modifica la distribución interna de tensiones. Esta reorganización puede reducir temporalmente el efecto

Janssen, ya que disminuye la fricción efectiva con las paredes y permite una mayor transmisión vertical del peso. Este fenómeno se aprovecha para facilitar el vaciado de silos y para estudiar procesos de relajación de tensión y envejecimiento (*aging*) en medios granulares.

Conexión con la geofísica y la ingeniería

El efecto Janssen es fundamental en el diseño de silos y estructuras de almacenamiento: subestimar las presiones laterales puede llevar a fallas estructurales graves. En geofísica, el mismo fenómeno aparece en suelos no cohesivos (playas, dunas, rellenos granulares), donde la presión a profundidad no sigue la ley hidrostática. La comprensión de cómo se distribuyen las tensiones internas en medios granulares confinados es esencial para problemas de mecánica de suelos y estabilidad de taludes.

DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

El experimento consiste en medir el peso que registra una balanza colocada en la base de un silo cilíndrico, para distintas alturas de columna granular. Se utiliza un recipiente cilíndrico vertical de acrílico transparente (diámetro interno $\approx 5,5$ cm). Se pueden emplear distintos materiales granulares (grava, arena, microesferas de vidrio, arroz, etc.) para explorar cómo el tipo de material afecta la saturación de presión. Es necesario caracterizar previamente el material: medir la densidad aparente ρ_b y la fracción de empaquetamiento.

Una celda de carga controlada por Arduino, colocada debajo del orificio de salida del silo, registra el peso en tiempo real (tiempo de muestreo ≈ 500 ms). Es importante que la altura del soporte se ajuste de modo que la balanza registre únicamente el peso de la columna de material granular, no el del cilindro de acrílico.

Se procede de la siguiente manera: llenar el silo con una cantidad conocida de material, medir la altura de la columna y registrar el peso estabilizado en la balanza. Repetir para distintas alturas (agregando material o vaciando parcialmente). Es recomendable realizar al menos tres repeticiones para cada altura, perturbando ligeramente los granos entre mediciones (moviendo el soporte) para obtener una configuración nueva de contactos. Registrar la masa como función del tiempo para cada perturbación y tomar el valor promedio una vez que se estabiliza.

ANÁLISIS DE DATOS

El objetivo del análisis es verificar la saturación exponencial predicha por el modelo de Janssen y estimar los parámetros físicos del sistema. Se recomienda usar MATLAB u Octave.

Paso 1: Lectura de datos y estabilización

Para cada altura de columna, leer la serie temporal de masa registrada por la celda de carga. Graficar la masa como función del tiempo. Identificar el momento en que la medida se estabiliza tras la perturbación y tomar el valor promedio del plateau como la masa en la base para esa altura.

Pista: Graficar `plot(t, m)` para cada altura. Para determinar el plateau, se puede promediar los últimos N puntos una vez que la señal se estabiliza visualmente, o usar `mean(m(end-N:end))`.

Paso 2: Estimación de incertidumbres

Calcular la incertidumbre total en la masa como la combinación en cuadratura de la incertidumbre nominal del instrumento (resolución de la celda de carga) y la desviación estándar de las repeticiones: $\Delta m = \sqrt{(\sigma_{\text{nom}}^2 + \sigma_{\text{rep}}^2)}$. Proceder de la misma forma para la incertidumbre en la altura.

Pista: Para la celda de carga HX711 con resolución de 24 bits, $\sigma_{\text{nom}} = 20/2^{24}$ kg. Para la altura, $\sigma_{\text{nom}} = 0,1$ cm (apreciación de la cinta métrica). Usar `std` para calcular la desviación estándar de las repeticiones.

Paso 3: Gráfico masa vs. altura

Graficar la masa promedio en la base en función de la altura promedio de la columna granular, con barras de error en ambos ejes. ¿Se observa la saturación predicha por Janssen? ¿Dónde ocurre la transición del régimen lineal al saturado?

Pista: Usar `errorbar(z, m, dm, dm, dz, dz)` para barras de error en ambos ejes. Agregar una línea vertical en $z = D_{\text{cilindro}}$ para marcar la escala del diámetro.

Paso 4: Ajuste exponencial (modelo de Janssen)

Ajustar los datos a la función $m(z) = a(1 - e^{-bz})$, donde a es la masa máxima (asintótica) en la base y b controla la rapidez de saturación. Usar un método de mínimos cuadrados no lineales.

Pista: Definir el modelo: `f = @(p,z) p(1)*(1 - exp(-p(2)*z))`. Usar `lsqcurvefit` o `fit`. Reportar el coeficiente de determinación R^2 . ¿El ajuste es sensible a los valores iniciales? ¿Qué pasa si se usan distintos puntos de partida?

Paso 5: Estimación de k y μ_s

A partir del parámetro b del ajuste y la relación teórica $b = 2\mu_s k/R$, estimar el producto $\mu_s k$. Si se conoce o se estima uno de los dos (por ejemplo, usando $k = v/(1 + v)$ con v típico para arenas), obtener el otro. Comparar con valores de referencia.

Pista: Con $R = 2,75$ cm y el valor de b ajustado, $\mu_s k = bR/2$. Para arenas no consolidadas, $0,11 < k < 0,43$. El coeficiente de fricción material-acrílico es típicamente del orden de 0,3–0,6. ¿Los valores obtenidos son consistentes?

Paso 6: Comparación con el comportamiento hidrostático

Superponer en el gráfico de masa vs. altura la recta que corresponde al comportamiento hidrostático (sin fricción con paredes), es decir, $m = \rho_b A z$. ¿A partir de qué altura se desvían significativamente los datos de la predicción hidrostática? Comparar con la longitud de Janssen $\lambda = R/(2\mu_s k)$.

Pista: Graficar la recta hidrostática con `plot(z, rho_b*A*z, '--')`. La desviación comienza a ser apreciable cuando $z \approx \lambda$.

PREGUNTAS PARA LA DISCUSIÓN

1. Graficar $m(z)$ con barras de error. ¿Se observa claramente la saturación? ¿A partir de qué altura la masa en la base deja de crecer?
2. ¿Cuál es el valor asintótico a de la masa en la base? ¿Qué fracción del peso total de la columna se transmite a la base cuando la columna es alta?
3. ¿El comportamiento es lineal para alturas menores que el diámetro del silo, como predice el modelo? Verificar graficando la zona de alturas bajas.
4. ¿Cuáles son los valores obtenidos de k y μ_s ? ¿Son compatibles con los valores de referencia para arenas no consolidadas ($0,11 < k < 0,43$) y para fricción material-acrílico ($\mu_s \approx 0,3-0,6$)?
5. ¿Qué sucede con la masa registrada cuando se perturba la columna (por ejemplo, golpeando suavemente el silo)? ¿La masa en la base aumenta o disminuye temporalmente? Relacionar con la reconfiguración de cadenas de fuerza.
6. ¿Cómo cambiarían los resultados si se usara un silo de mayor diámetro? ¿Y si se usara un material con menor fricción con las paredes (por ejemplo, esferas de vidrio lisas)?
7. Discutir la relevancia del efecto Janssen en el diseño de silos industriales. ¿Por qué subestimar las presiones laterales puede provocar fallas estructurales?
8. Comparar el efecto Janssen con la distribución de presión en suelos naturales. ¿En qué situaciones geofísicas se espera que la presión no siga la ley hidrostática?

RESULTADOS ESPERADOS

A modo de guía, los resultados típicos en un silo de diámetro $\approx 5,5$ cm son:

- La masa en la base crece inicialmente de forma lineal con la altura, y luego satura a un valor máximo que depende del material y del diámetro del silo.
- La transición del régimen lineal al saturado ocurre para alturas del orden del diámetro del silo ($\approx 5-6$ cm).
- El ajuste exponencial $m(z) = a(1 - e^{-bz})$ reproduce bien los datos, con $R^2 \approx 0,95$ o superior.
- El parámetro $b \approx 10-15 \text{ m}^{-1}$, lo que da un producto $\mu_s k \approx 0,14-0,21$.
- El coeficiente de redirección $k \approx 0,1-0,4$, y el coeficiente de fricción $\mu_s \approx 0,3-0,6$ (depende del par material-pared), aunque con incertidumbre considerable dado que el ajuste solo determina el producto $\mu_s k$.
- Al perturbar la columna, se observa un descenso transitorio de la masa en la base seguido de una estabilización, reflejando la reconfiguración de las cadenas de fuerza.

REFERENCIAS

- [1] H. A. Janssen, *Versuche über Getreidedruck in Silozellen*, Z. Ver. Deut. Ing. **39**, 1045 (1895).
- [2] M. Sperl, *Experiments on corn pressure in silo cells — translation and comment of Janssen's paper from 1895*, Granular Matter **8**, 59–65 (2006).
- [3] P. Avseth, R. Bachrac, *Seismic properties of unconsolidated sands: tangential stiffness, V_p/V_s ratios and diagenesis*, SEG International Exposition and Annual Meeting (2005).
- [4] H. M. Jaeger, S. R. Nagel, R. P. Behringer, *Granular solids, liquids, and gases*, Rev. Mod. Phys. **68**, 1259 (1996).
- [5] J. Duran, *Sands, Powders, and Grains: An Introduction to the Physics of Granular Materials*, Springer (2000). Cap. 3.
- [6] P. G. de Gennes, *Granular matter: a tentative view*, Rev. Mod. Phys. **71**, S374 (1999).