

Práctico 1: Funciones

Ejercicio 1 Consideremos la ecuación de los gases ideales $PV = nRT$ (ver ejercicio 4 del Práctico 0). Supongamos que tenemos 1 mol de gas sometido a una temperatura que mantenemos constante en 273 K. El volumen lo medimos en litros y la presión en atmósferas.

1. Explicar por qué el volumen V del gas varía en función de la presión P .
2. Bosquejar el gráfico de dicha función $V(P)$ (la constante R fue calculada en el práctico 0).

Ejercicio 2 Vamos a suponer que tenemos un dispositivo que registra la temperatura en cada instante de tiempo. Colocamos el dispositivo a la intemperie, en un lugar fijo, y comenzamos a registrar la temperatura en un instante inicial $t_0 = 0$ horas (medianoche) en punto, manteniendo el dispositivo en funcionamiento hasta las 24 horas (o sea, las 0 horas del día siguiente). Suponemos que la temperatura en el instante t_0 es $17^\circ C$.

1. Probar que el registro de las temperaturas define una función $T(t)$ de la temperatura en función del tiempo, y determinar su dominio.
2. ¿La función $T(t)$ es inyectiva? (justificar la respuesta)
3. Se sabe que la temperatura mínima fue de 16 grados y se registró a las 7 y media, y que la máxima fue de 27 grados y se registró a las 13 horas y 15 minutos. Hallar el recorrido (o conjunto imagen) de $T(t)$.
4. Si el dispositivo permaneció desconectado entre las 19:30 y las 19:45, ¿cuál es el dominio de la función $T(t)$?

Ejercicio 3 Designemos D al conjunto formado por los departamentos de Cerro Largo, Tacuarembó y Rivera, y C al conjunto formado por las ciudades de Melo, Paso de los Toros, Río Branco, Rivera, Tacuarembó y Tranqueras.

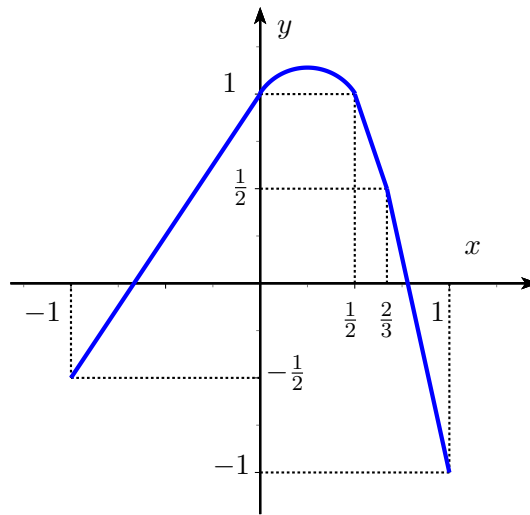
Se definen las siguientes funciones:

$f : D \rightarrow C$ tal que $f(d) =$ capital de d .

$g : C \rightarrow D$ tal que $g(c) =$ departamento en el que se encuentra c .

1. ¿Es f inyectiva? ¿Es f sobreyectiva? ¿Es f biyectiva?
2. ¿Es g inyectiva? ¿Es g sobreyectiva? ¿Es g biyectiva?
3. Explique qué función se obtiene haciendo $h(d) = g(f(d))$, $d \in D$.
4. Explique qué función se obtiene haciendo $j(c) = f(g(c))$, $c \in C$.

Ejercicio 4 Sea f la función de la figura, cuyo dominio es $[-1, 1]$.



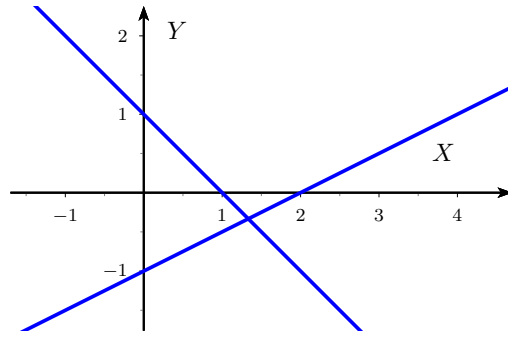
1. (a) ¿El punto $(1, -1)$ pertenece al gráfico de f ? ¿El punto $(-1, 1)$ pertenece al gráfico de f ?
- (b) Hallar $f(-1)$ y $f(1/2)$
- (c) Completar las siguientes afirmaciones:
 - i. $f(x) = 1$ en $x = \dots$
 - ii. $f(x) = 0$ en $x = \dots$, $f(x) < 0$ si x pertenece a \dots , $f(x) > 0$ si x pertenece a \dots
 - iii. f es creciente en el intervalo \dots , f es decreciente en el intervalo \dots
 - iv. El máximo de f es aproximadamente \dots y se da en $x = \dots$
 - v. El mínimo de f es \dots y se da en $x = \dots$
2. (a) Dibujar el gráfico de $f(x) + 2$, $f(x) - 2$.
- (b) Dibujar el gráfico de $-f(x)$, $3f(x)$, $-3f(x)$.
- (c) Dibujar el gráfico de $|f(x)|$.

Ejercicio 5 En este ejercicio consideraremos la función lineal $f(x) = ax + b$ tal que los dos puntos $(4, 7)$ y $(-1, 1)$ pertenecen a su gráfico.

1. Dibujar en el plano el gráfico de f .
2. Hallar a y b .
3. Hallar el valor de la función en 0 y comprobar que el punto correspondiente efectivamente pertenece a la recta que une $(4, 7)$ con $(-1, 1)$.
4. Hallar la raíz de f .

Ejercicio 6 Identificar a qué funciones lineales corresponden los dos gráficos de la figura.

Hallar las coordenadas del punto de corte de los dos gráficos.



Ejercicio 7 Bosquejar el gráfico de cada una de las siguientes funciones:

- | | |
|---|---|
| a) $f(x) = x - 1$ | b) $f(x) = x^2$ |
| c) $f(x) = x^2 + 4$ | d) $f(x) = (x + 4)^2$ |
| e) $f(x) = x $ | f) $f(x) = 3x + 1 $ |
| g) $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & x < 4, \\ -x - 5, & x \geq 4, \end{cases}$ | h) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 1, \\ x^3, & x \leq 1. \end{cases}$ |

Ejercicio 8 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + 1$. Hallar

- a) $f \circ f$ b) $f \circ f \circ f$ c) $f \circ \overbrace{\dots \circ}^n f$ (n veces).

Ejercicio 9 Sean $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = kx$ y $g(x) = x^2 + x + 1$.

- Hallar $f \circ g$ y $g \circ f$.
- Para qué valores de $k \in \mathbb{R}$ se tiene $f \circ g = g \circ f$?

Ejercicio 10 Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, la función $f(x) = x^2$

- ¿Es cierto que f es invertible?
- Establecer el dominio y codominio más grandes de la función $f(x)$ para que sí sea invertible. Determinar su función inversa y el correspondiente gráfico.
- ¿Es cierto que $\sqrt{a^2} = a$ para todo $a \in \mathbb{R}$? (referencia: Ejercicio 2, parte 4, del práctico 0).

Ejercicio 11 Ciertas células epiteliales demoran (aproximadamente) 24 horas para duplicarse.

- Supongamos que en tiempo “inicial” $t_0 = 0$ fijamos la atención en una célula determinada de dicho tipo, que llamaremos la célula C . Toda célula que provenga de las subsecuentes divisiones a partir de C diremos que es “generada por C ”.
 - ¿Cuántas células habrá generado C en 10 días?
 - ¿Cuántas células habrá generado C en t días?
 - Explicar la siguiente afirmación: El número de células generadas por C , digamos N_C , es función del tiempo t , o sea, $N_C = N_C(t)$.
 - Bosquejar el gráfico de $N_C(t)$, indicando su dominio y recorrido.
 - Calcular el tiempo que se necesita para que hayan 100.000 células generadas por C .

2. Supongamos ahora que en tiempo inicial hay 512 células.

- (a) Expresar en una fórmula el número de células en función del tiempo t .
- (b) ¿Cuántas células había 3 días antes del tiempo 0?

Ejercicio 12 Dado un número real x , se llama *parte entera* de x al mayor número entero que no supera x , y que denotaremos $E(x)$.

- 1. Explicar por qué $E(x)$ define una función (E es función de x).
- 2. Hallar $E(0)$, $E(1.2)$, $E(\sqrt{2})$, $E(-1)$, $E(-0.9)$.
- 3. Graficar $E(x)$ en el intervalo $-2,5 < x < 2,5$.

Ejercicio 13 Recordar que $\log a = b$ si y solo si $a = e^b$, donde \log es el *logaritmo neperiano*. Calcular, en función de los valores de $\log 2$ y $\log 3$, los siguientes valores:

- (i) a) $\log 9$ b) $\log 6$ c) $\log(\sqrt{3})$ d) $\log(1/2)$.
- (ii) ¿Se puede afirmar que $\log(5) = \log(3)\log(2)$?
- (iii) ¿Tiene sentido definir $\log(-1)$?

Ejercicio 14 Consideramos $\text{sen} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$, $\text{cos} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ y $\text{tan} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) Graficar y explicar por qué son funciones biyectivas.
- (ii) Sean Arcsen , Arcos y Arctan las funciones inversas de sen , cos y tan respectivamente. Graficar dichas funciones inversas.

Ejercicio 15 Se considera la ecuación

$$\cos(3x) = 1$$

- (i) Dar todas las soluciones.
- (ii) Dar las soluciones que pertenecen al intervalo $[-4, 4]$.
- (iii) ¿Qué solución da la calculadora? ¿Con qué lo relacionás?

Ejercicio 16

Mismo ejercicio que el anterior, cambiando cos por tan .