Curso Física 1 para Bio-Geociencias (FI252) 2025

Primer evaluación corta: en este teórico la haremos el jueves 10 sobre el final de la clase.

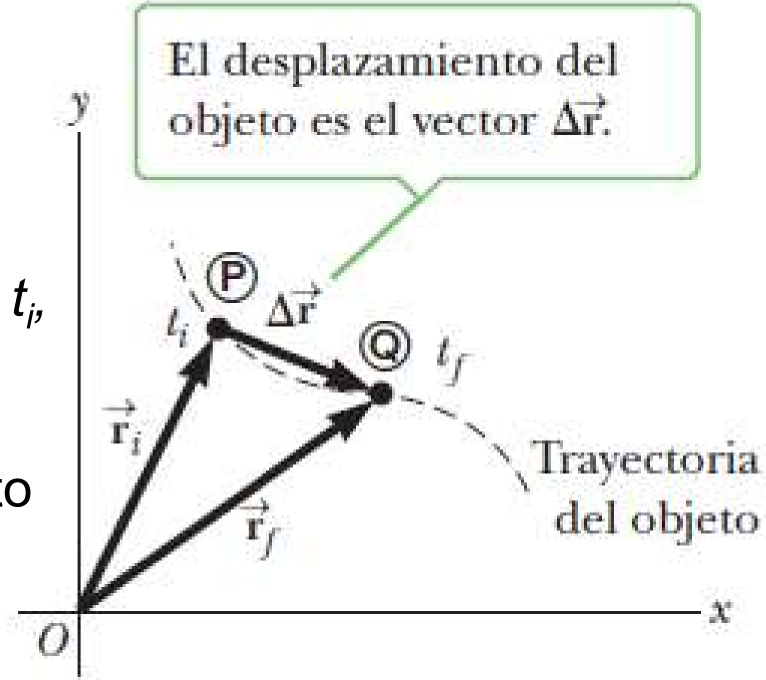
Clase de consultas generales en forma virtual: jueves de 20:15 a 21:30
por Zoom (enlace del teórico virtual)

ATENCIÓN: Se recuerda que en el Salón de Actos no se pueden ingerir alimentos ni beber bebidas o tomar mate….

Desplazamiento, velocidad y aceleración en dos dimensiones

En el movimiento rectilíneo, la dirección y el sentido de un vector (velocidad o aceleración) se tiene en cuenta al especificar el signo: positivo o negativo.
Por ejemplo, la velocidad de un cohete es positiva si éste va hacia arriba y negativa si va hacia abajo., mientras que g es negativo porque va hacia abajo.

En dos o tres dimensiones se debe hacer uso **completo del concepto vectorial**.
Un objeto se mueve a través del espacio como se muestra en la figura.
Cuando el objeto está en algún punto P en el tiempo t_i, *su posición se describe mediante* el **vector de posición r**$_i$, *dibujado desde el origen hasta P.*
Cuando el objeto se ha movido hacia algún otro punto en el tiempo t_f, *su vector de posición es* $\boldsymbol{r}_f$.



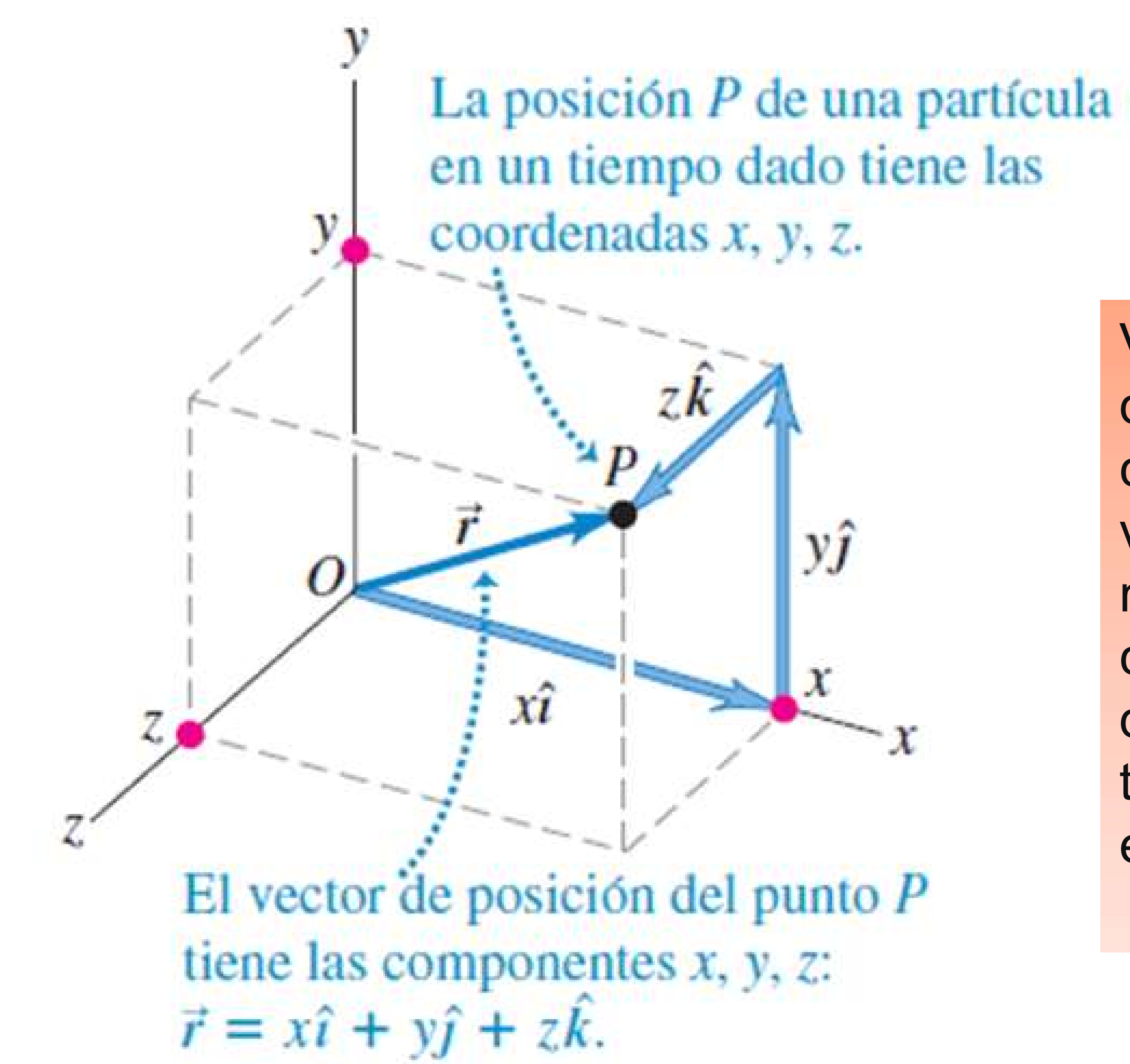
Del diagrama vectorial de la figura, el vector de posición final es la suma del vector de posición inicial y el desplazamiento Δ**r:**

$$\bar{r}_f = \bar{r}_i + \Delta\bar{r}$$

A partir de esta correspondencia, podemos redefinir las magnitudes físicas que vimos para el movimiento en una dimensión, en magnitudes vectoriales para movimiento en dos o tres dimensiones.

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

Vector posición $\bar{r}$ de una partícula en un instante dado es un vector que va del origen del sistema de coordenadas al punto *P*. Coordenadas *x*, *y* y *z* de *P* son las componentes *x*, *y* y *z* del vector.



$$\bar{r} = x\,\hat{\imath} + y\,\hat{\jmath} + z\,\hat{k}$$

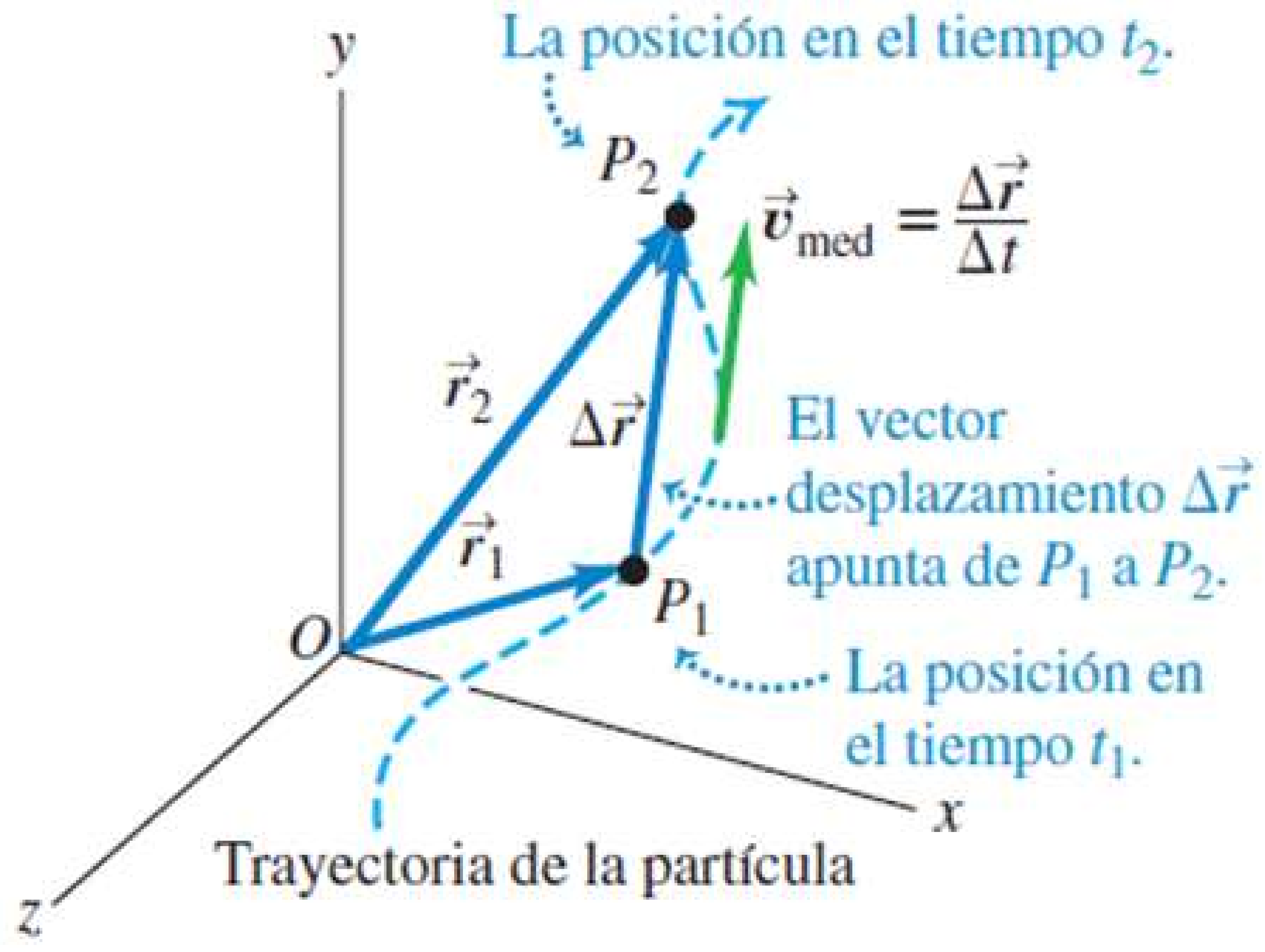
Vamos a extender las definiciones vistas en cinemática unidimensional de velocidades y aceleraciones medias e instantáneas al caso de dos y tres dimensiones. Pero ahora no trataremos a magnitudes escalares, sino vectoriales.

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

En un Δt la partícula se mueve de P_1 a P_2.

Desplazamiento: $\Delta\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$

$$\Delta\bar{r} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1)\,\hat{\imath} + (y_2 - y_1)\,\hat{\jmath} + (z_2 - z_1)\,\hat{k}$$



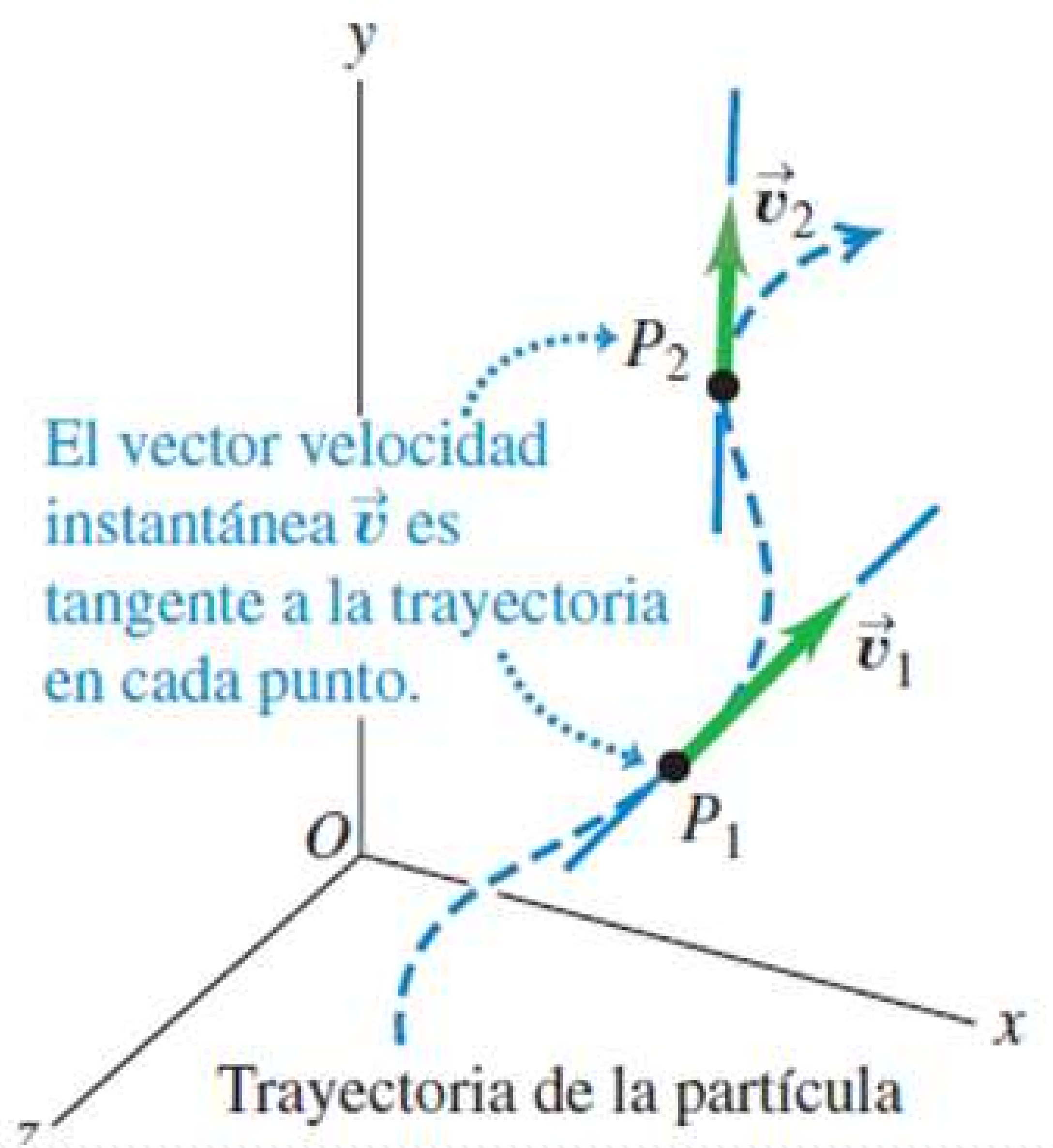
Velocidad media durante ese intervalo Δt:

$$\bar{v}_{med} = \frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t} = \frac{\bar{r}_2 - \bar{r}_1}{t_2 - t_1}$$

Rapidez media: es el cociente entre la distancia total recorrida y el tiempo insumido.
Es un escalar y no siempre coincide con el módulo de la velocidad media.

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD

Definimos la **velocidad instantánea**: $\overline{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \overline{r}}{\Delta t} = \frac{d\overline{r}}{dt}$



$$\overline{v} = \frac{dx}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\,\hat{k}$$

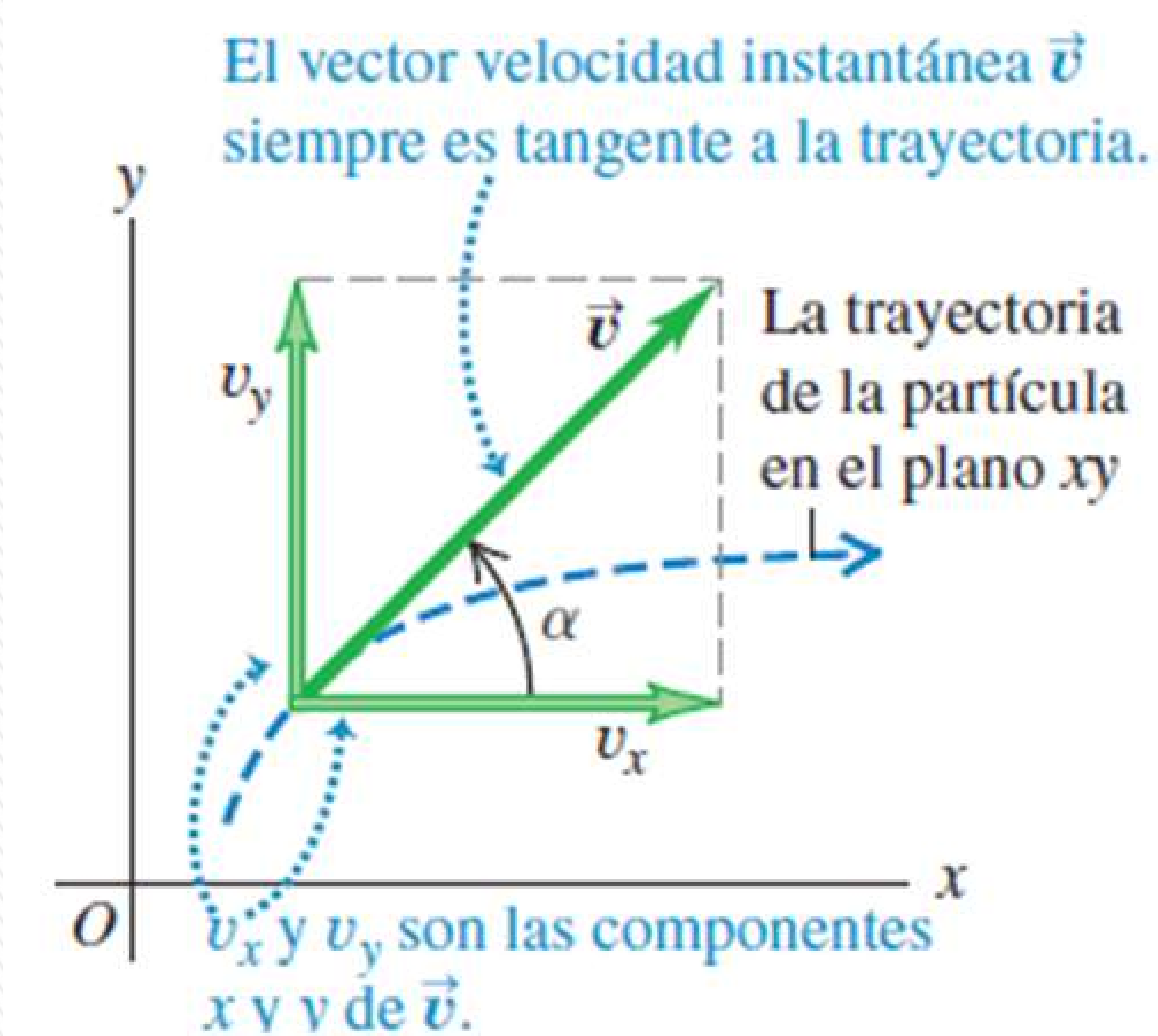
$$\overline{v} = v_x\,\hat{\imath} + v_y\,\hat{\jmath} + v_z\,\hat{k}$$

El cualquier punto de la trayectoria, el vector es tangente a la trayectoria en ese punto, y el sentido es el del movimiento.

El módulo de $\overline{v}$ es la **rapidez.**

$$|\overline{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

VECTORES DE POSICIÓN Y VELOCIDAD



En dos dimensiones:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

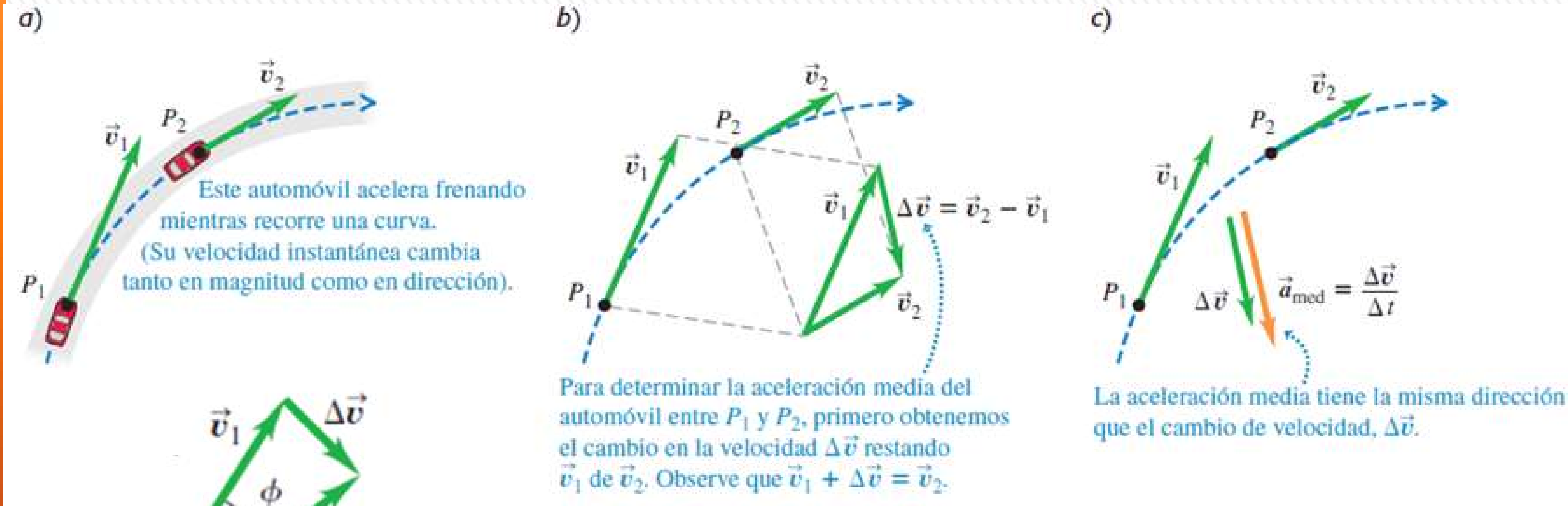
La dirección de la velocidad instantánea está dada por el ángulo α

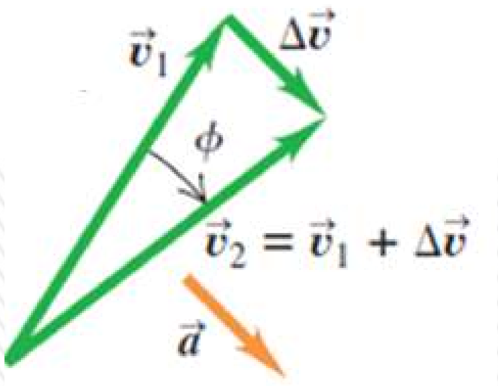
$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

VECTOR ACELERACIÓN

La aceleración describe cómo cambia la velocidad.

Velocidad como vector: aceleración describe cambios *tanto en la magnitud de la velocidad (es decir,* la rapidez) *como en la dirección de la velocidad (la dirección en que se mueve* la partícula).

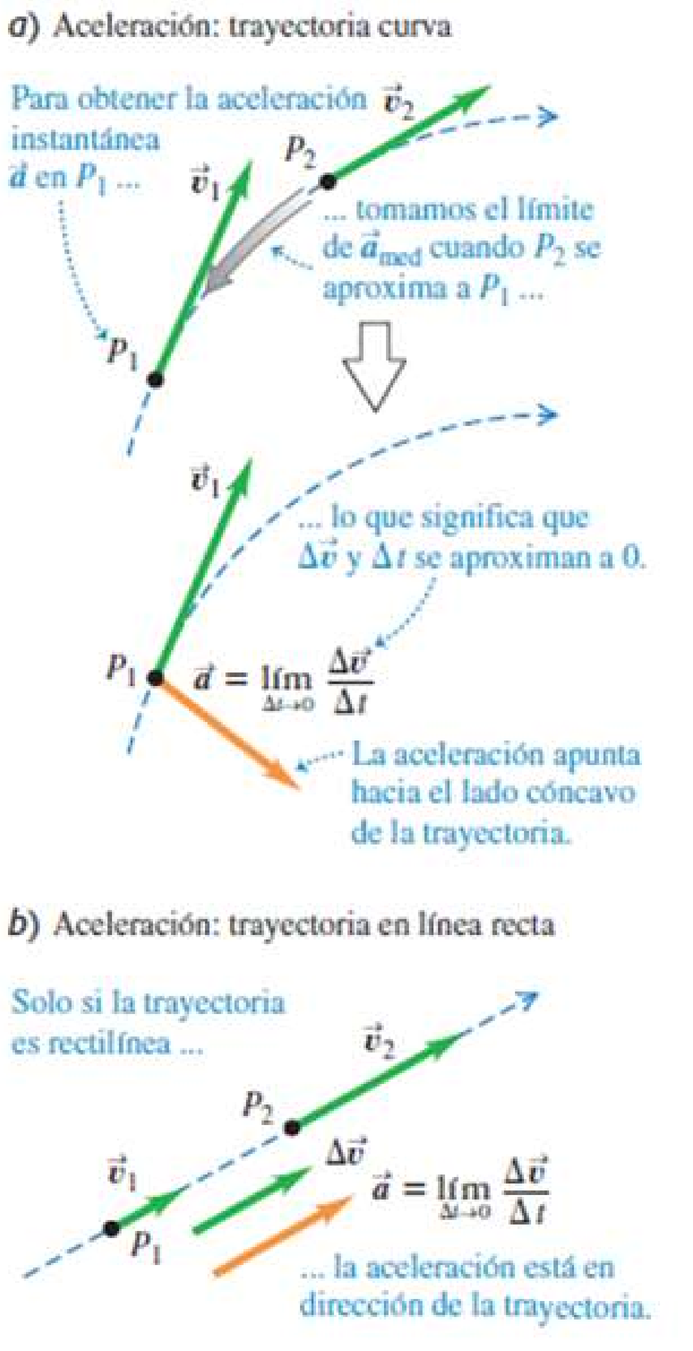




$$\bar{a}_{med} = \frac{\Delta\bar{v}}{\Delta t} = \frac{\bar{v}_2 - \bar{v}_1}{t_2 - t_1}$$

Definimos la **aceleración media**:

VECTOR ACELERACIÓN



Definimos **aceleración instantánea**:

$$\bar{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{v}}{\Delta t} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2}$$

$$\bar{a} = \frac{dv_x}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\,\hat{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\,\hat{k}$$

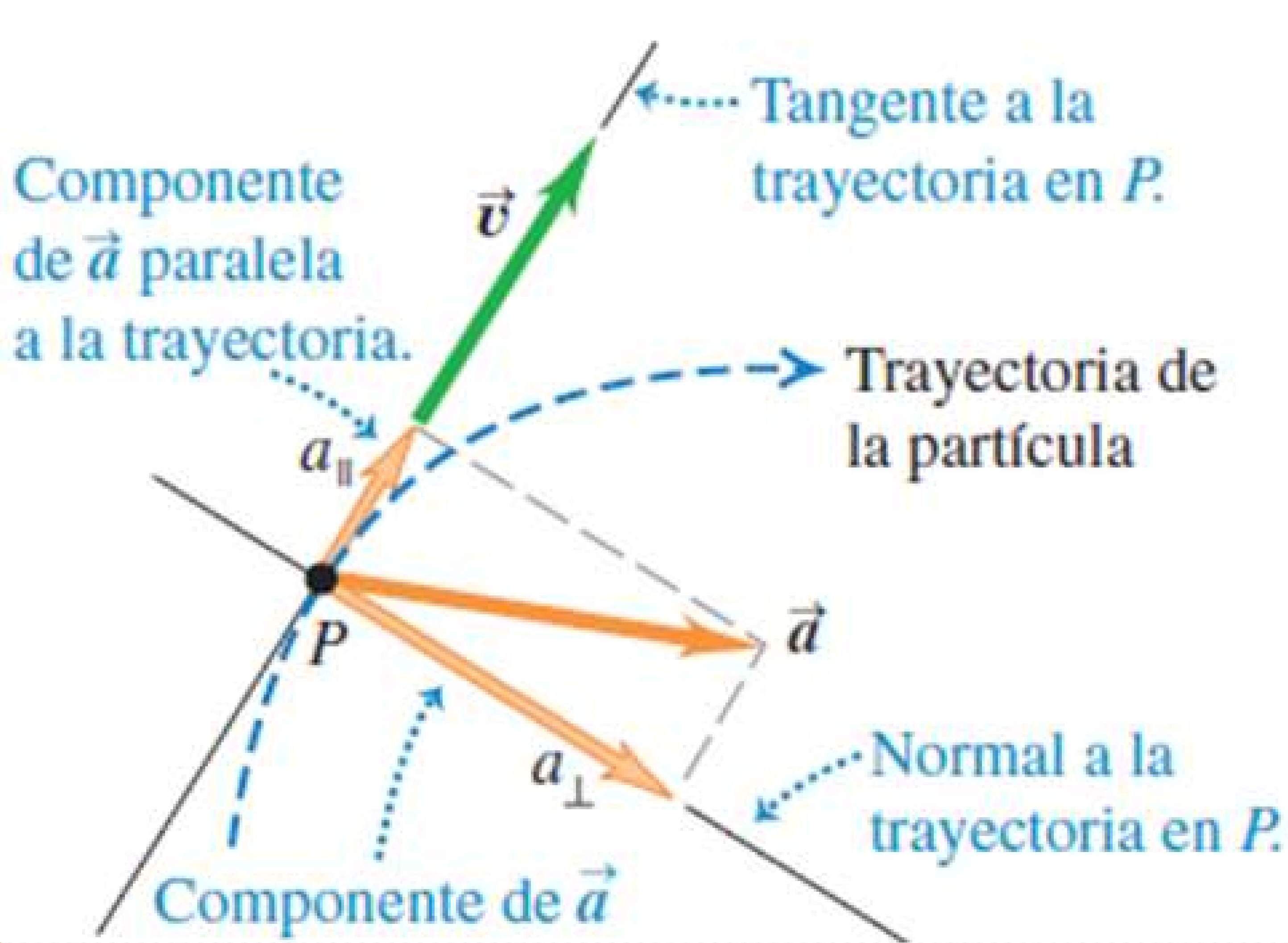
El vector **a** no *tiene que ser tangente a la trayectoria.*

Si la trayectoria es curva, apunta hacia el lado cóncavo de la trayectoria (interior de la curva descrita por la partícula).

La aceleración es tangente a la trayectoria solo si la partícula se mueve en línea recta.

Atención: Cualquier partícula que sigue una trayectoria curva está acelerando !!!

COMPONENTES PERPENDICULAR Y PARALELA DE LA ACELERACIÓN

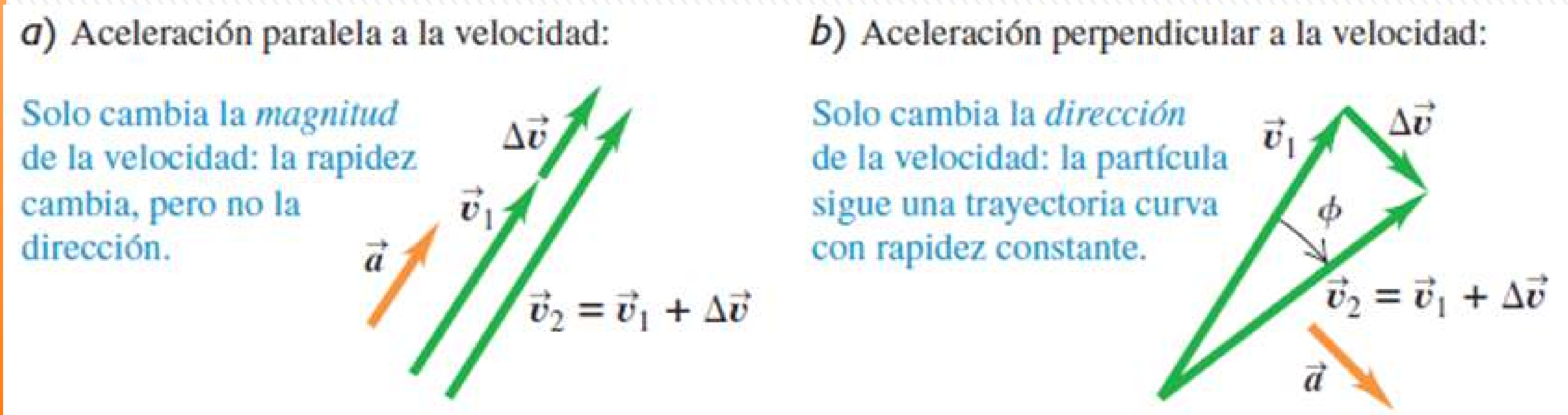


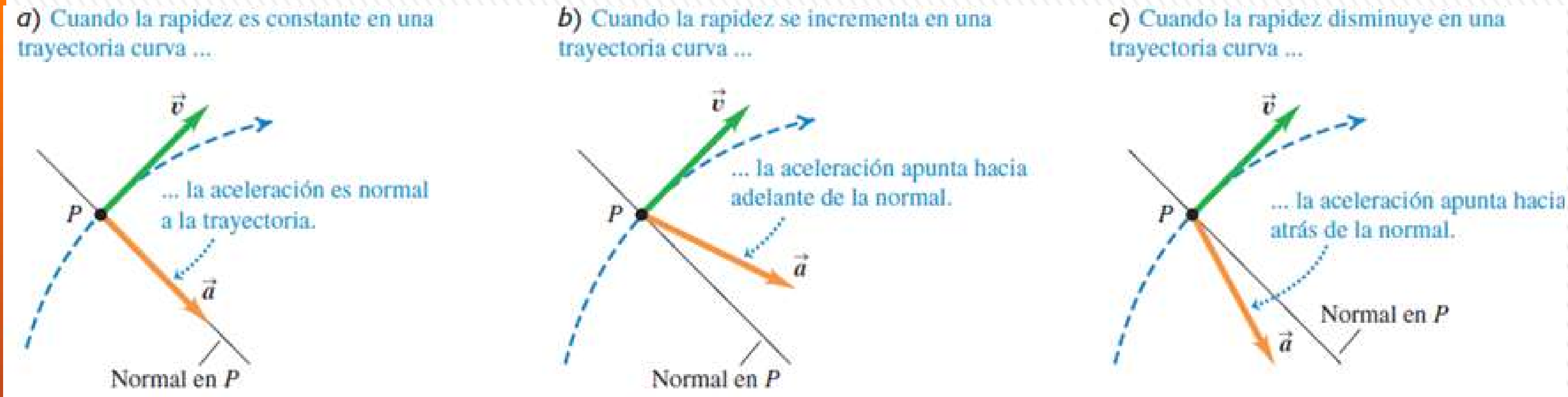
El vector $\overline{a}$ se puede visualizar en términos de una ***componente paralela a la trayectoria* de la *partícula* (paralela a la velocidad)**, y otra ***componente perpendicular a la trayectoria***, (perpendicular a la velocidad).

La **componente paralela** determina los **cambios en la *rapidez*** *de la partícula.*

La **componente perpendicular** indica los **cambios en la *dirección del movimiento*** de la partícula.

COMPONENTES PERPENDICULAR Y PARALELA DE LA ACELERACIÓN





ATENCIÓN:

Es importante reconocer que un objeto puede acelerar en diferentes formas:

1) La magnitud del vector velocidad (la rapidez) puede cambiar con el tiempo.

2) La dirección del vector velocidad puede cambiar con el tiempo, incluso si la rapidez es constante, como puede suceder a lo largo de una trayectoria curva.

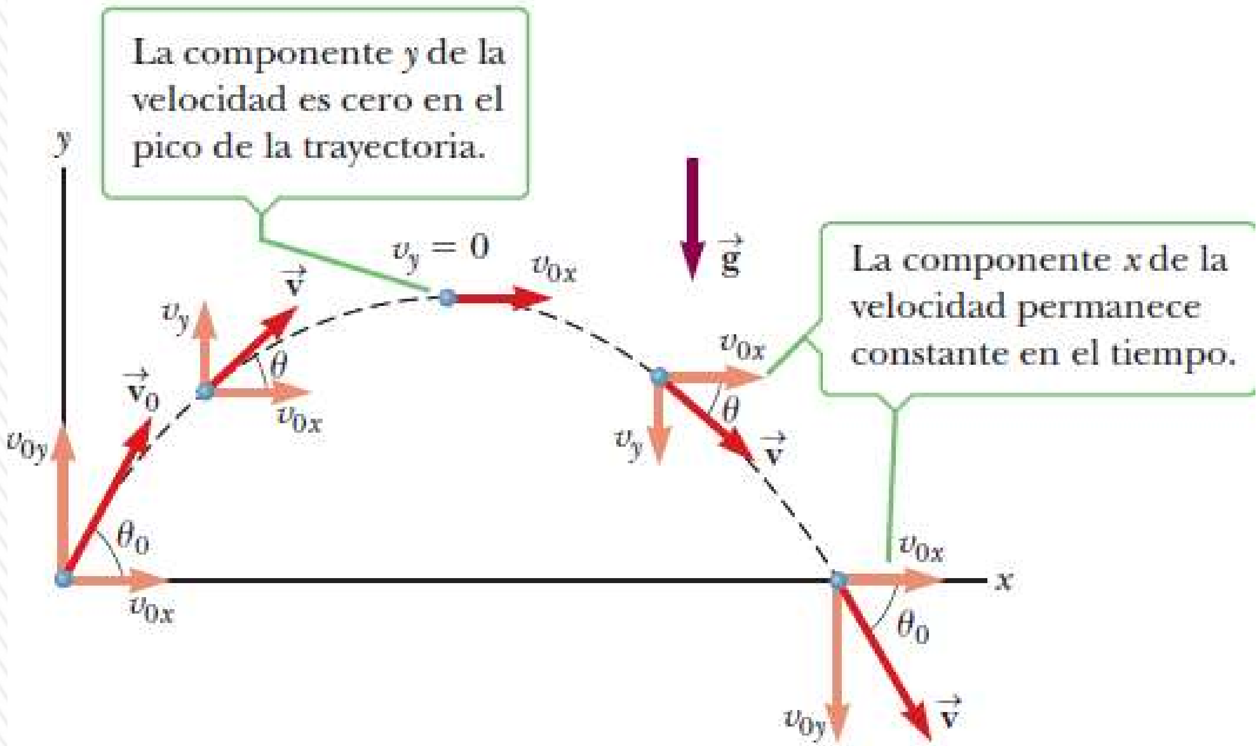
3) Tanto la magnitud y la dirección del vector velocidad pueden cambiar al mismo tiempo.

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

Veremos objetos que se mueven en las dos direcciones *x y y de manera simultánea bajo aceleración constante.*
Un caso especial importante de este movimiento en dos dimensiones se le conoce como **movimiento de un proyectil.**
Cualquiera que haya lanzado alguna clase de objeto en el aire ha observado un movimiento de un proyectil.

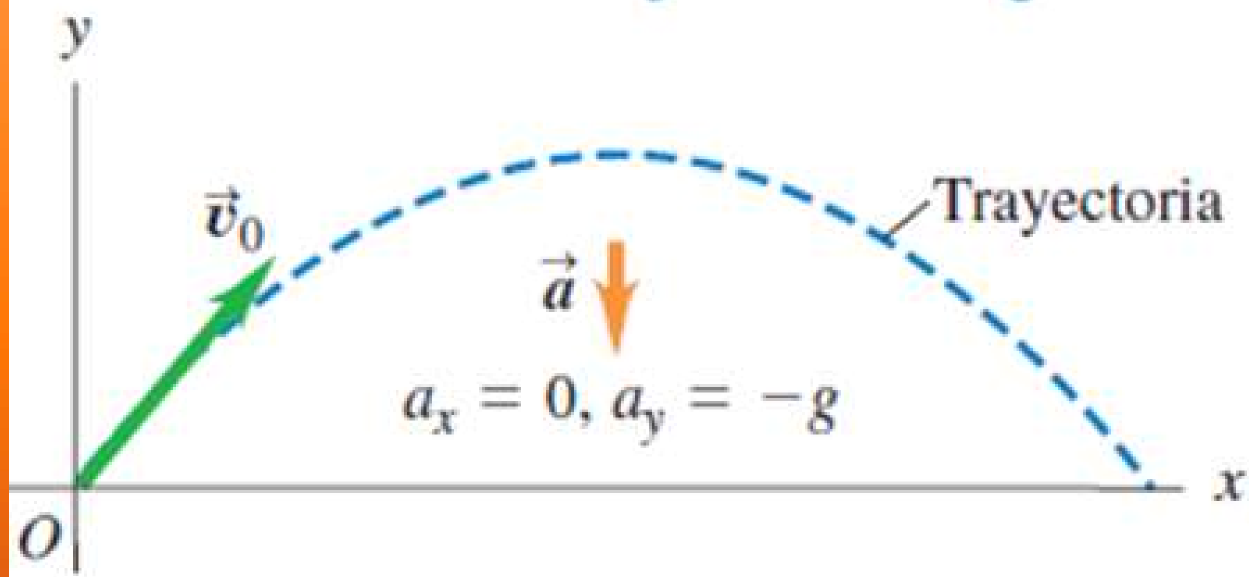
Si se omiten los efectos de la resistencia del aire, la variación de g con la altura y de su dirección y la rotación de la Tierra, la trayectoria del proyectil dentro del campo de gravedad de la Tierra es una curva en forma de **parábola**,

La figura muestra esta trayectoria. La dirección *x positiva es horizontal y hacia la derecha, y la dirección y es vertical* y positiva hacia arriba. El hecho experimental más importante acerca del movimiento de un proyectil en dos dimensiones es que **los movimientos horizontal y vertical son completamente independientes entre sí.**



MOVIMIENTO DE PROYECTILES

- Un proyectil se mueve en un plano vertical que tiene un vector velocidad inicial $\vec{v}_0$.
- Su trayectoria depende solo de $\vec{v}_0$ y de la aceleración hacia abajo debida a la gravedad.



Modelo:

•Proyectil como partícula.

•Aceleración gravedad constante tanto en magnitud como en dirección.

•Se ignoran efectos de la resistencia del aire, como curvatura y rotación de la Tierra.

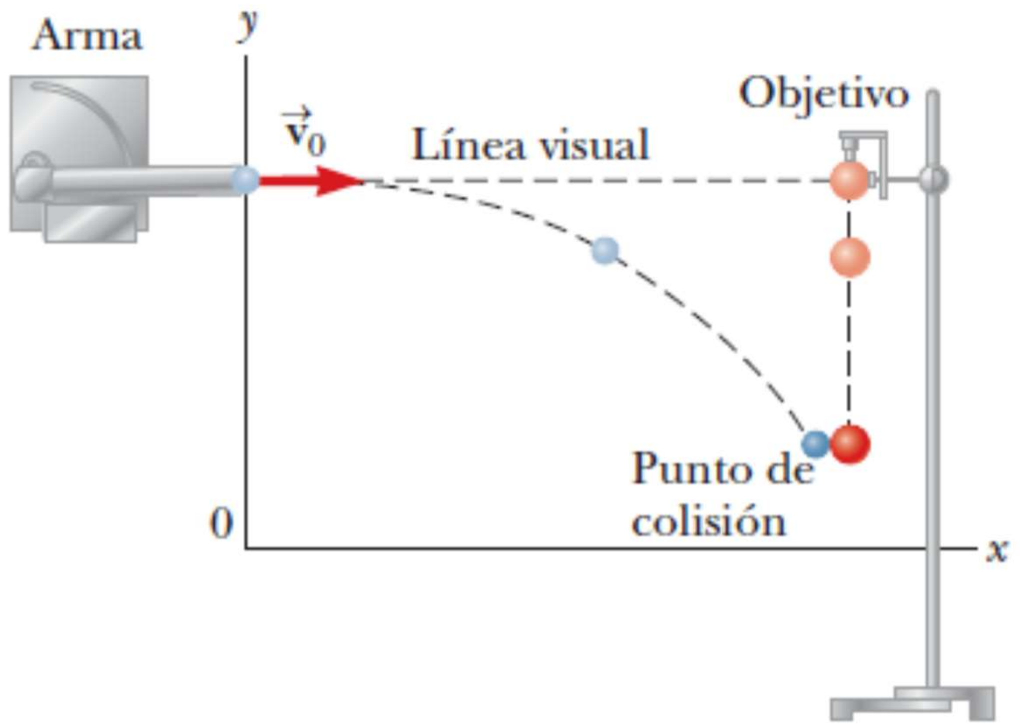
El movimiento del proyectil **siempre se limita a un plano vertical**, determinado por la dirección de la velocidad inicial.
La aceleración gravitatoria es exclusivamente vertical y no puede acelerar al proyectil de forma lateral.

Movimiento es *bidimensional*.

MOVIMIENTO DE UN PROYECTIL

El movimiento de un proyectil es la superposición de dos movimientos uno horizontal y otro vertical independientes entre sí, y el movimiento en una dirección no tiene efecto sobre el movimiento en la otra dirección.

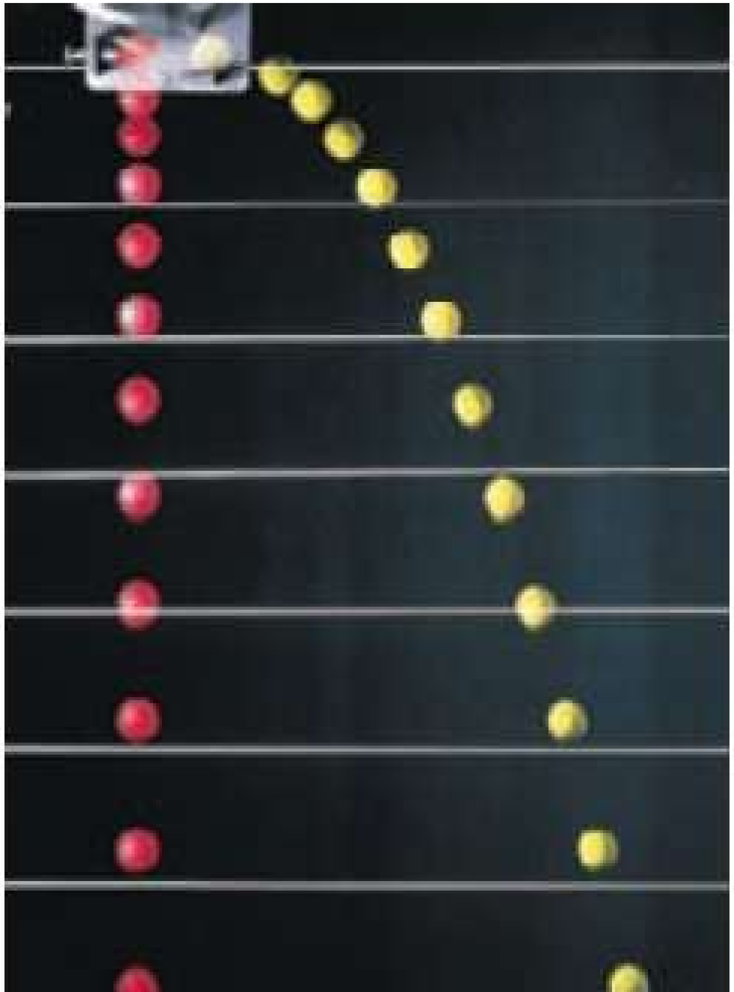
La figura muestra un experimento que ilustra la independencia del movimiento horizontal y vertical.
La pistola apunta directamente a la bola objetivo y es disparada en el instante en que ésta es liberada.
En ausencia de gravedad, el proyectil daría en el blanco porque el objetivo no se movería.
Sin embargo, el proyectil aún da en el blanco en presencia de la gravedad.



Eso significa que el proyectil está cayendo con el mismo desplazamiento vertical que el objetivo, a pesar de su movimiento horizontal.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

3.16 La pelota roja se deja caer desde el reposo y la amarilla se proyecta horizontalmente al mismo tiempo; las imágenes sucesivas en esta fotografía estroboscópica están separadas por intervalos de tiempo iguales. En un instante determinado, ambas pelotas tienen la misma posición *y*, velocidad *y* y aceleración *y*, a pesar de tener diferentes posición y velocidad en *x*.



Análisis del movimiento: trato por separado las coordenadas *x* y *y*.

Componente x de la aceleración es cero, y componente y es constante e igual a -g.

El movimiento de un proyectil es una combinación de:

- **movimiento horizontal con velocidad constante y,**
- **movimiento vertical con aceleración constante.**

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Ecuaciones de movimiento:

Como según x es un movimiento rectilíneo uniforme (a_x=0) y según y esun movimiento rectilíneo con aceleración constante (a_y= -g)

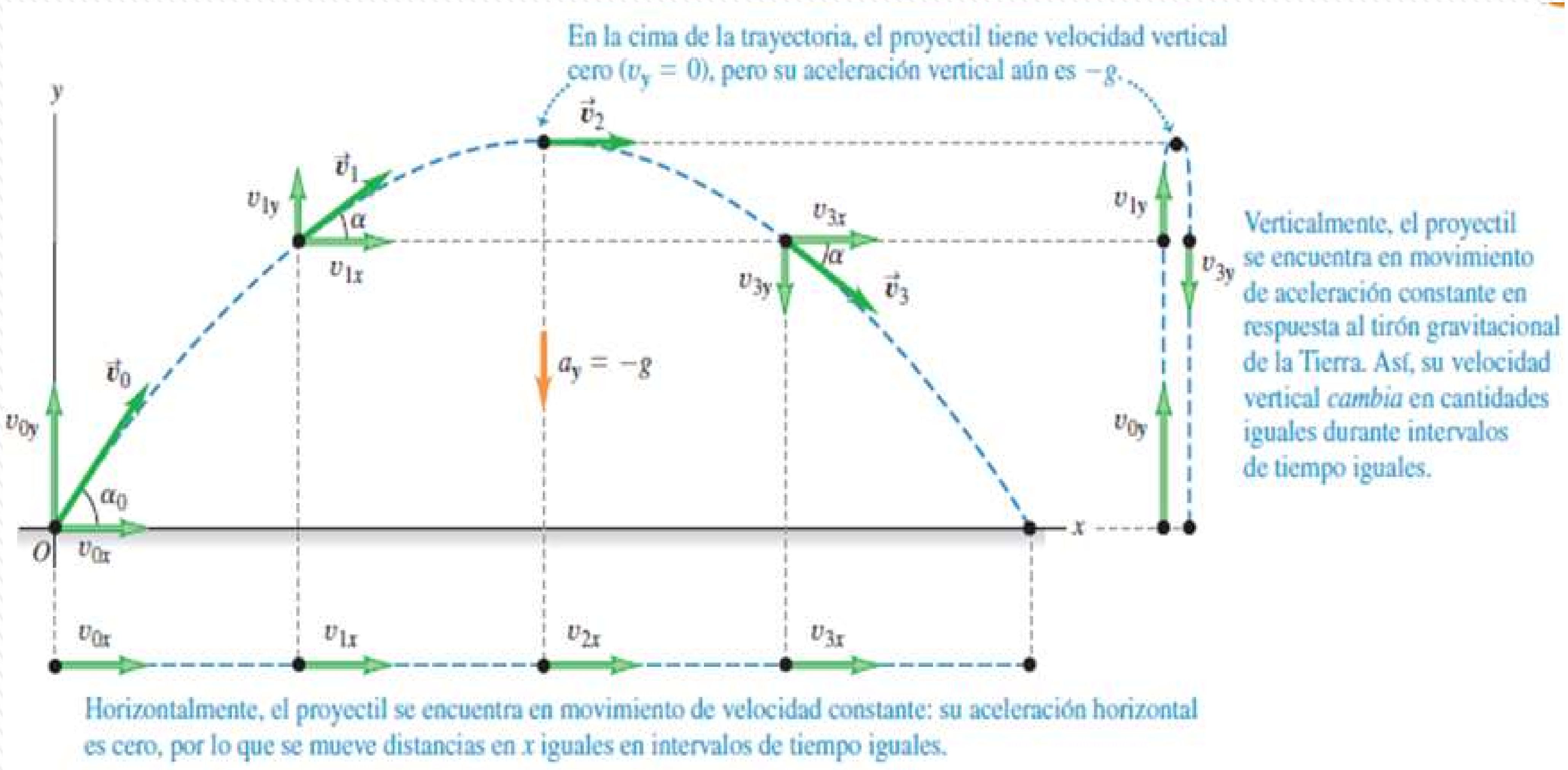
Aceleración: $a_x = 0$ $\qquad$ $a_y = -g$

Velocidad: $v_x = v_{0x}$ $\qquad$ $v_y = v_{0y} - gt$

Posición: $x = x_0 + v_{0x}\,t$ $\qquad$ $y = y_0 + v_{0y}\,t - \frac{1}{2}gt^2$

$v_{0x} = v_o \cos\alpha_0$ $\qquad$ $v_{0y} = v_o \sin\alpha_0$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES



Movimiento parabólico del modelo de proyectil

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Otras expresiones:

Módulo del vector posición: $r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$

Rapidez del proyectil (módulo de su velocidad): $v(t) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

Dirección de la velocidad, en términos del ángulo α que forma con el eje +x: $\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x}$

Ecuación de la trayectoria (parábola): $y(x) = (\tan\alpha_0)x - \frac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha_0} x^2$

Para lanzamiento con altura de lanzamiento igual al de llegada:

Tiempo en que se alcanza la altura máxima: $t^* = \frac{v_0 \sin\alpha_0}{g}$

Altura máxima alcanzada: $h_{max} = y(t^*) = \frac{v_0^2 sin^2\alpha_0}{2g}$

Alcance: $R = x(2t^*) = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g}$

Alcance máximo para $\alpha_0 = 45º$ $R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Deducción de ecuación de la trayectoria: $y(x) = (\tan\alpha_0)x - \dfrac{g}{2v_0^2 cos^2\alpha_0}x^2$

$$x = v_0 \cos\alpha_0\, t \qquad t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha_0}$$

$$y = v_0 \sin\alpha_0\, t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = v_0 \sin\alpha_0 \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha_0}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha_0}\right)^2$$

$$y = \left(\frac{v_0 \sin\alpha_0}{v_0 \cos\alpha_0}\right) x - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{(v_0 \cos\alpha_0)^2}$$

$$y = \tan\alpha_0\, x - \frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha_0} x^2$$

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

Los hechos importantes del movimiento de un proyectil se pueden resumir como sigue:

1. Siempre que se omita la resistencia del aire, la componente horizontal de la velocidad v_x permanece constante porque no existe componente horizontal de la aceleración.

2. La componente vertical de la aceleración es igual a la aceleración en caída libre -*g*.

3. La componente vertical de la velocidad v_y y el desplazamiento en la dirección *y* son idénticos a los de un cuerpo en caída libre.

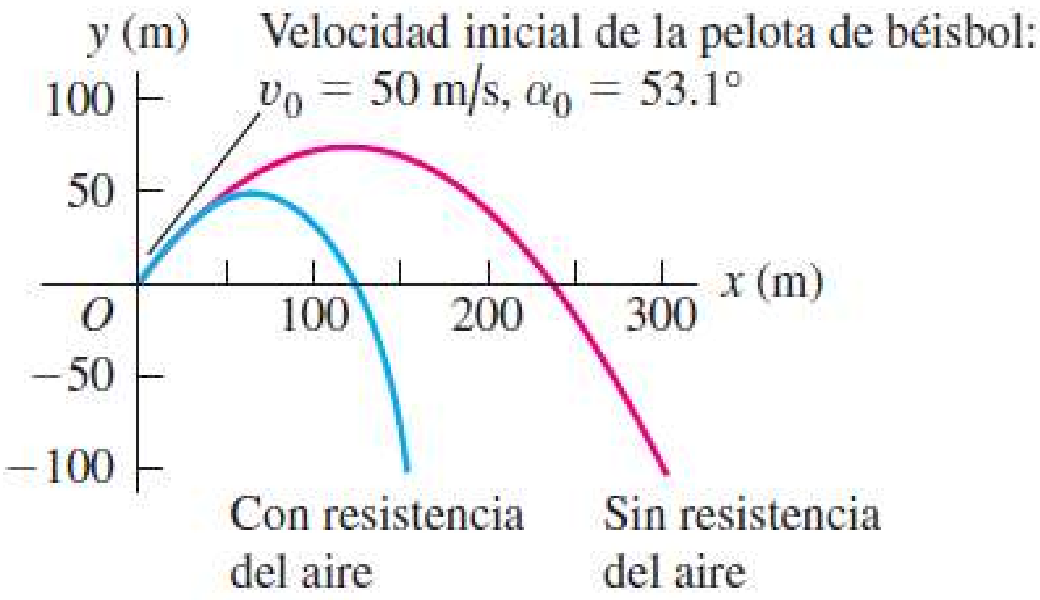
4. El movimiento de proyectil puede describirse como una superposición de dos movimientos independientes en las direcciones *x* y *y*.

ATENCIÓN: En la altura máxima que alcanza el proyectil sólo se anula la componente vertical de la velocidad, la componente horizontal permanece invariable.
La aceleración en la dirección *y* *tampoco* es cero en la parte superior de la trayectoria del proyectil. Sólo la componente *y* de la velocidad es cero.
Si la aceleración también fuera cero, ¡el proyectil jamás llegaría abajo!

BALÍSTICA CON RESISTENCIA DEL MUNDO REAL

Efecto de la resistencia del aire

3.20 La resistencia del aire tiene un efecto acumulativo considerable sobre el movimiento de una pelota de béisbol. En esta simulación, permitimos que la pelota caiga por debajo de la altura desde la cual se lanzó (por ejemplo, la pelota podría haberse lanzado desde un acantilado).



La fricción del aire tiene un efecto apreciable sobre los proyectiles, en especial los que son *ligeros y rápidos;* **la resistencia es proporcional al *cuadrado de la velocidad.***

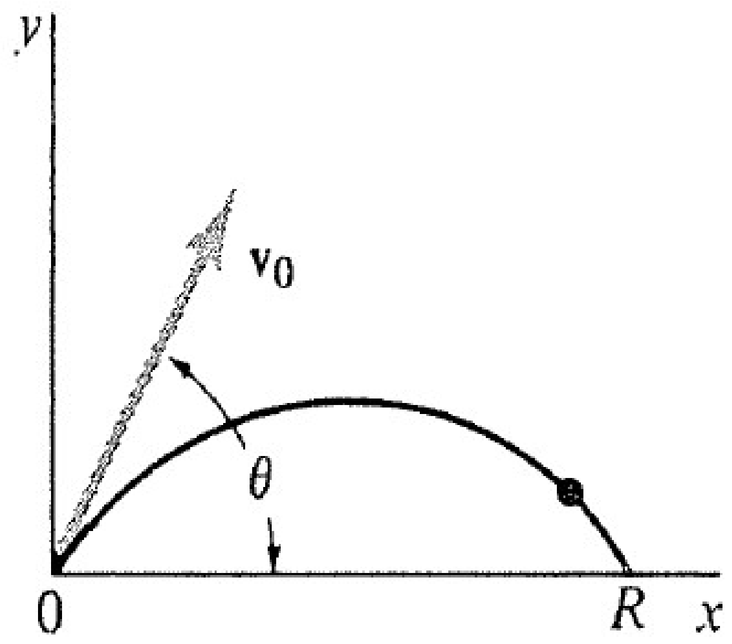
Una pelota de béisbol bien bateada, que dure mucho en el aire, puede perder hasta la mitad de su rapidez inicial, y llegar sólo un poco más allá de la mitad de lo que hubiera llegado sin fricción.

Una bala de rifle (sólo con unos 150 g de masa) disparada a 0,6 km/s, lo cual es bastante, sufrirá mucho la fricción. Si no hubiera resistencia, tendría un alcance máximo tremendo de unos 40km.

Debido a la resistencia del aire, no es probable que la bala llegue mucho más allá de 4 km.

ALCANCE DE UN PROYECTIL

Deduciremos las ecuaciones vinculadas a la altura máxima alcanzada y el alcance máximo cuando se dispara un proyectil, y la altura de disparo es la misma que la de llegada, como se muestra en la figura.



La altura máxima, se alcanza cuando la componente vertical de la altura se anula. Llamaremos t* al instante en que esto se produce.

$$v_y = v_o \sin\theta - g t^* = 0 \qquad t^* = \frac{v_o \sin\theta}{g}$$

La altura máxima se acanza para ese instante:

$$h_{máx} = y(t^*) = v_o \sin\theta\, t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} = v_o \sin\theta \left(\frac{v_o \sin\theta}{g}\right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o \sin\theta}{g}\right)^2 =$$

$$h_{máx} = \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

ALCANCE DE UN PROYECTIL

Como el tiempo de subida es el mismo que el de bajada, el alcance *R*= *x*(2*t**)

$$R = x(2t^*) = v_0 \cos\theta\,(2t^*) = v_0 \cos\theta\left(2\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)$$

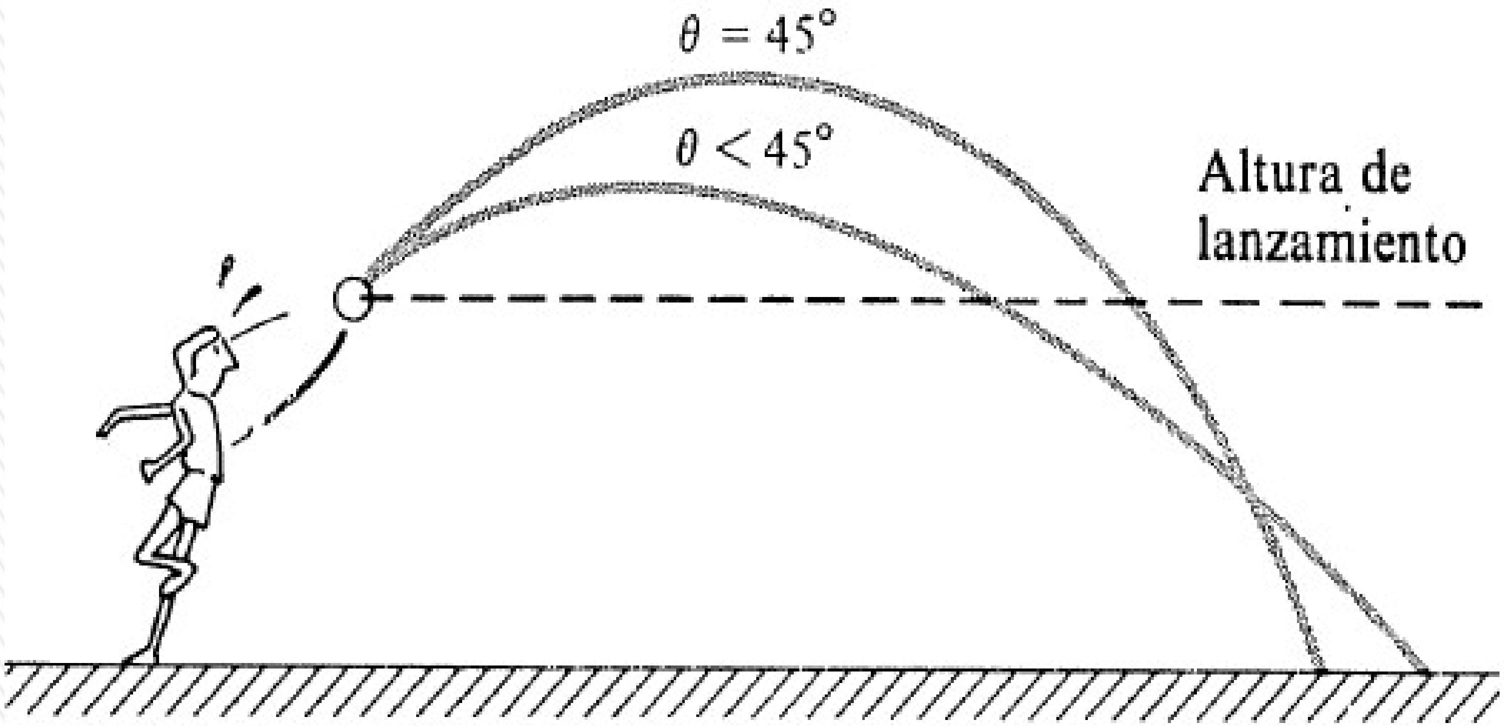
Teniendo en cuenta que: 2sinθ.cosθ= sin 2θ

$$R = 2\frac{v_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\theta$$

Puede verse que:
El alcance máximo es cuando θ =45° y vale: $R_{máx} = \dfrac{v_0^2}{g}$

Como el seno de un ángulo es igual al coseno del ángulo complementario, los proyectiles lanzados desde una superficie plana con un ángulo θ y con un ángulo 90- θ y con la misma rapidez tienen el mismo alcance, pero a mayor ángulo de tiro, mayor altura y mayor tiempo de vuelo.

MOVIMIENTO DE PROYECTILES

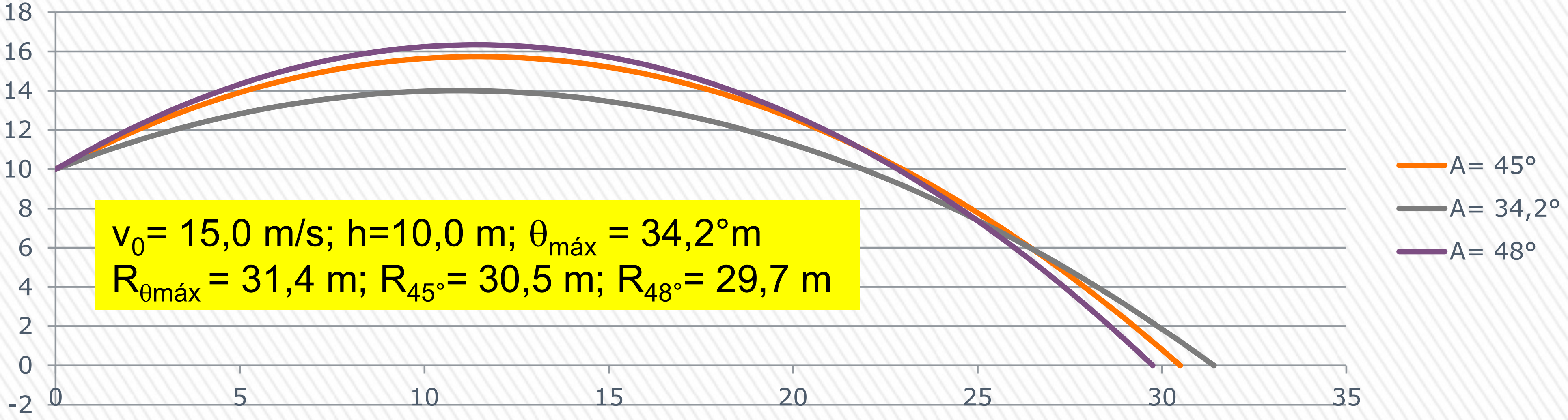


Lanzamiento efectuado por encima del nivel del suelo. La trayectoria para un ángulo de tiro de 45° y otro más pequeño se cortan por debajo de la altura de lanzamiento. La trayectoria más plana tiene un mayor alcance.
Si el punto de llegada está a mayor altura que el de lanzamiento, el alcance máximo se alcanza con un ángulo de lanzamiento mayor a 45°.

$$\theta_{máx} = atan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right) \qquad R_{máx} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

h > o si el lanzamiento es a mayor altura que la de llegada.
h < o si el lanzamiento es a menor altura que la de llegada.

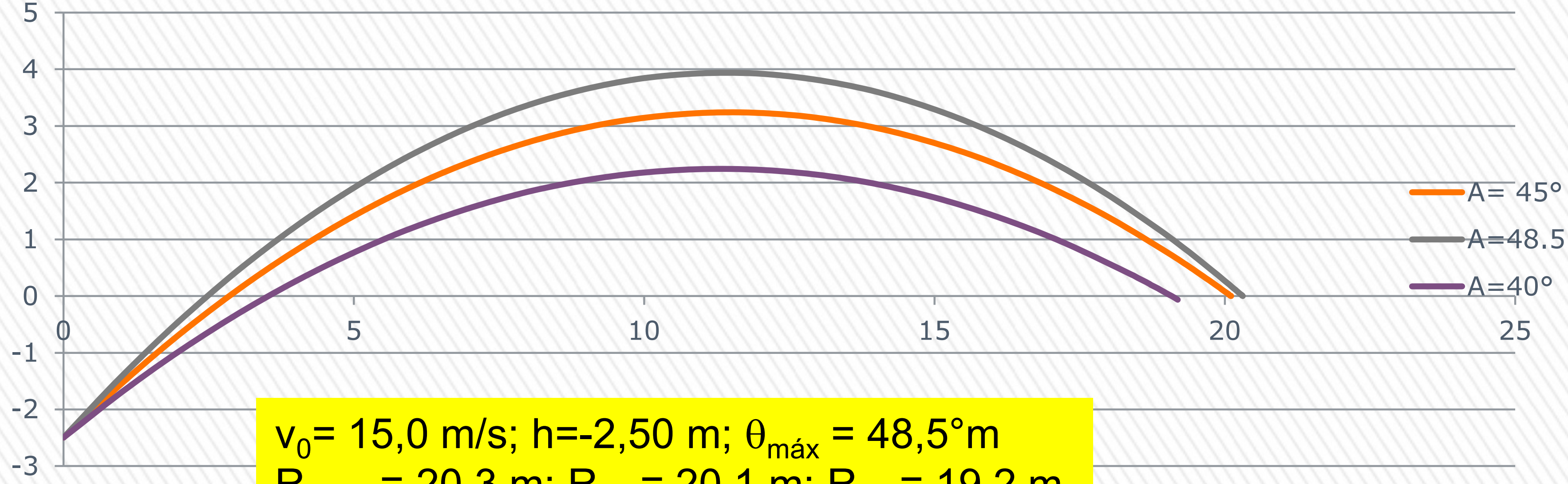
MOVIMIENTO DE PROYECTILES



v_0= 15,0 m/s; h=10,0 m; $\theta_{máx}$ = 34,2°m
$R_{\theta máx}$ = 31,4 m; $R_{45°}$= 30,5 m; $R_{48°}$= 29,7 m

Alcance máximo para lanzamiento h ≠ 0

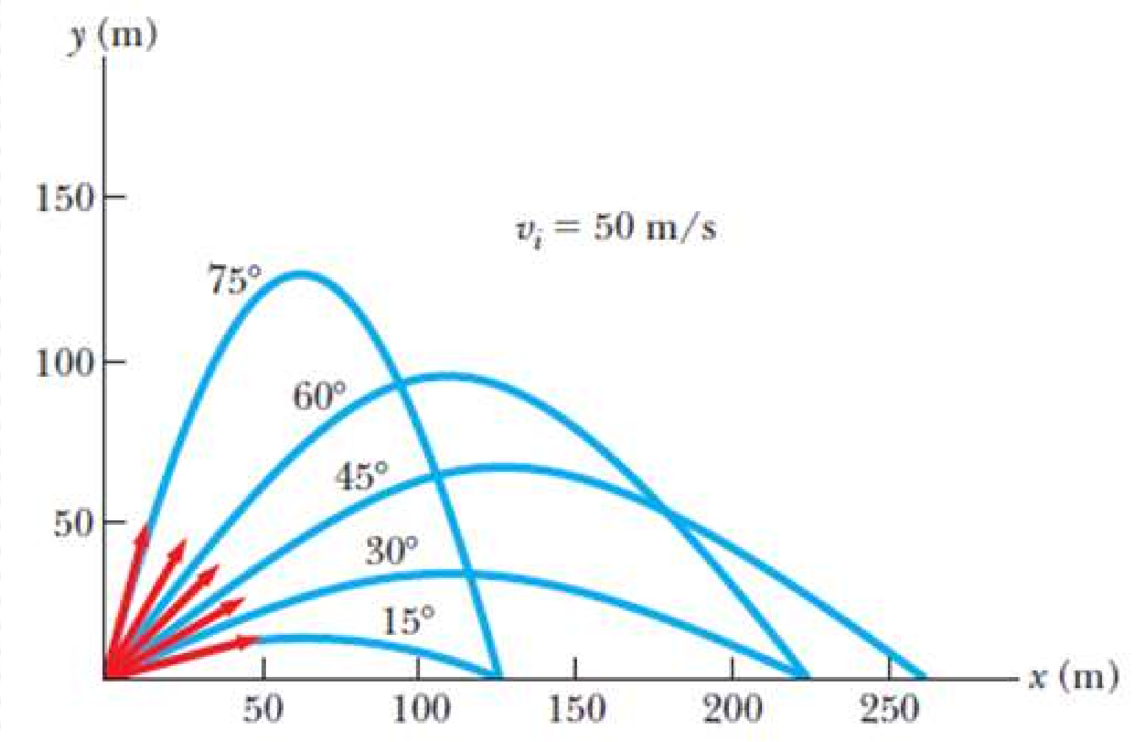
$$\theta_{máx} = atan\left(\frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gh}}\right) \qquad R_{máx} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh}$$



v_0= 15,0 m/s; h=-2,50 m; $\theta_{máx}$ = 48,5°m
$R_{\theta máx}$ = 20,3 m; $R_{45°}$= 20,1 m; $R_{40°}$= 19,2 m

PREGUNTA RÁPIDA

Ordene los ángulos de lanzamiento para las cinco trayectorias de la figura respecto al tiempo de vuelo, desde el tiempo de vuelo más corto al más largo.



Respuesta: El tiempo de vuelo estará dado por la componente vertical de la velocidad inicial, cuanto mayor sea, mayor será el tiempo de vuelo. Por tanto a mayor ángulo, mayor tiempo de vuelo.

Cuestionarios rápidos:

1) Un proyectil se mueve en una trayectoria parabólica sin resistencia del aire.

¿Hay un punto donde $\overline{a}$ sea paralela a $\overline{v}$? **NO.**

¿Y perpendicular a $\overline{v}$? **SI, en el punto donde alcanza la altura máxima ($v_y = 0$)**

2) En el instante en que usted dispara una bala horizontalmente con un rifle, deja caer otra bala desde la altura del cañón. Si no hay resistencia del aire, ¿qué bala llegará primero al suelo?

Las dos al mismo tiempo!!!

3) Se dispara un proyectil hacia arriba con un ángulo θ por encima de la horizontal con una rapidez inicial v_0. *Al llegar a su máxima altura,* ¿cuáles son su vector velocidad, su rapidez y su vector aceleración?

$\overline{v} = v_0 \cos\theta \ \hat{\imath}$ $v = v_0 \cos\theta$ $\overline{a} = -g \ \hat{\jmath}$