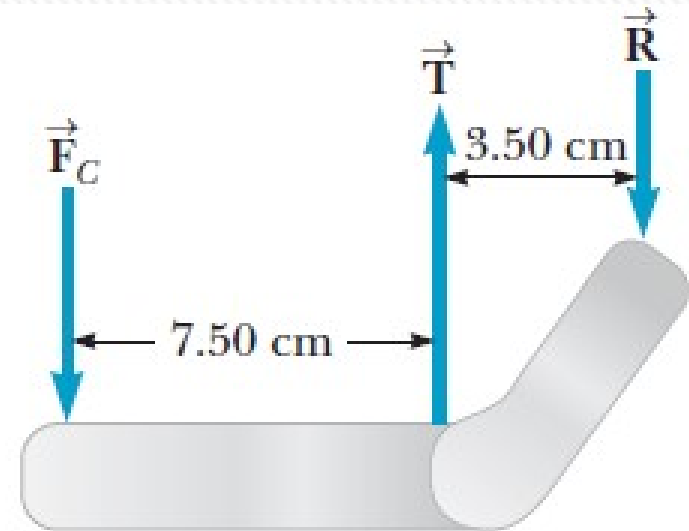
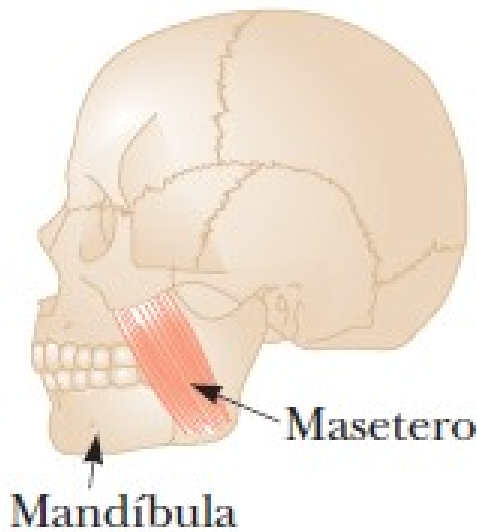
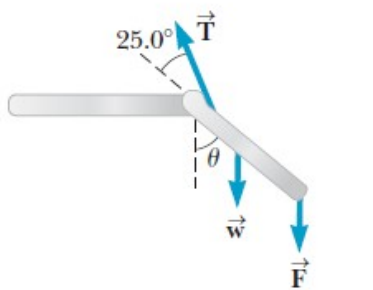
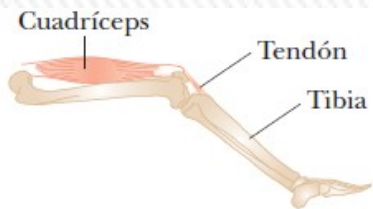
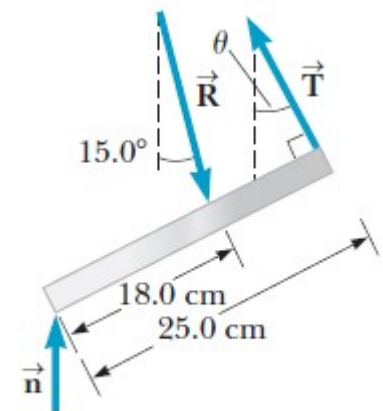
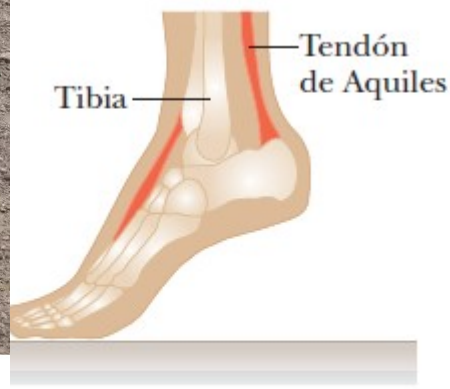
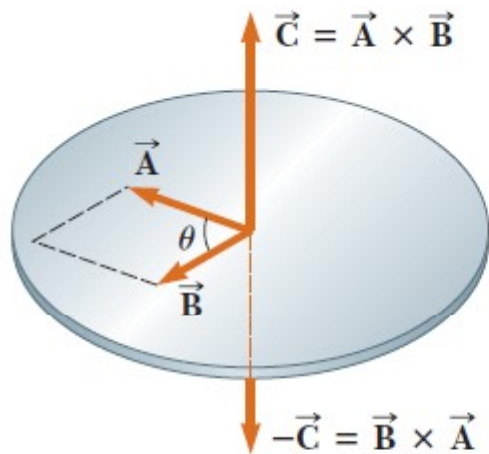


11- EQUILIBRIO ESTÁTICO



Repaso clase pasada: producto vectorial

Es otro vector **C** cuyo módulo vale $C = AB \sin\theta$, es perpendicular al plano determinados por los vectores **A** y **B**, y sentido dado por la regla de la mano derecha.



Regla de la mano derecha



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$$C = AB \sin \theta$$

Producto vectorial entre versores

$$\hat{i} \times \hat{j} = -\hat{j} \times \hat{i} = \hat{k}$$

$$\hat{j} \times \hat{k} = -\hat{k} \times \hat{j} = \hat{i}$$

$$\hat{k} \times \hat{i} = -\hat{i} \times \hat{k} = \hat{j}$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = \mathbf{0}$$

Es anticonmutativo: $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$

El producto vectorial de dos vectores paralelos ($\theta = 0$ ó 180°) es nulo.

El módulo del producto vectorial de dos vectores perpendiculares es igual al producto de los módulos. $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$.

El producto vectorial cumple con la propiedad distributiva respecto a la

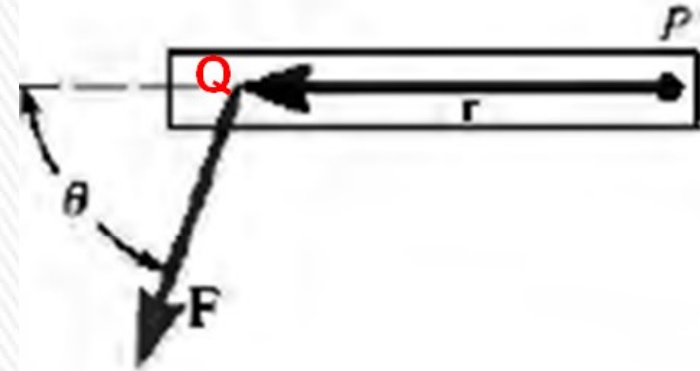
suma: $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$

Repaso: definiciones

Estática: estudio de las fuerzas que actúan sobre un objeto que está en equilibrio y en reposo.

Sólido rígido: modelo de objeto ideal que ocupa un lugar en el espacio y que no cambia su forma ni su tamaño al ser sometido a diferentes esfuerzos.

Torque: medida cuantitativa de la tendencia de una fuerza para provocar o modificar el movimiento de rotación de un cuerpo. Es una magnitud vectorial.

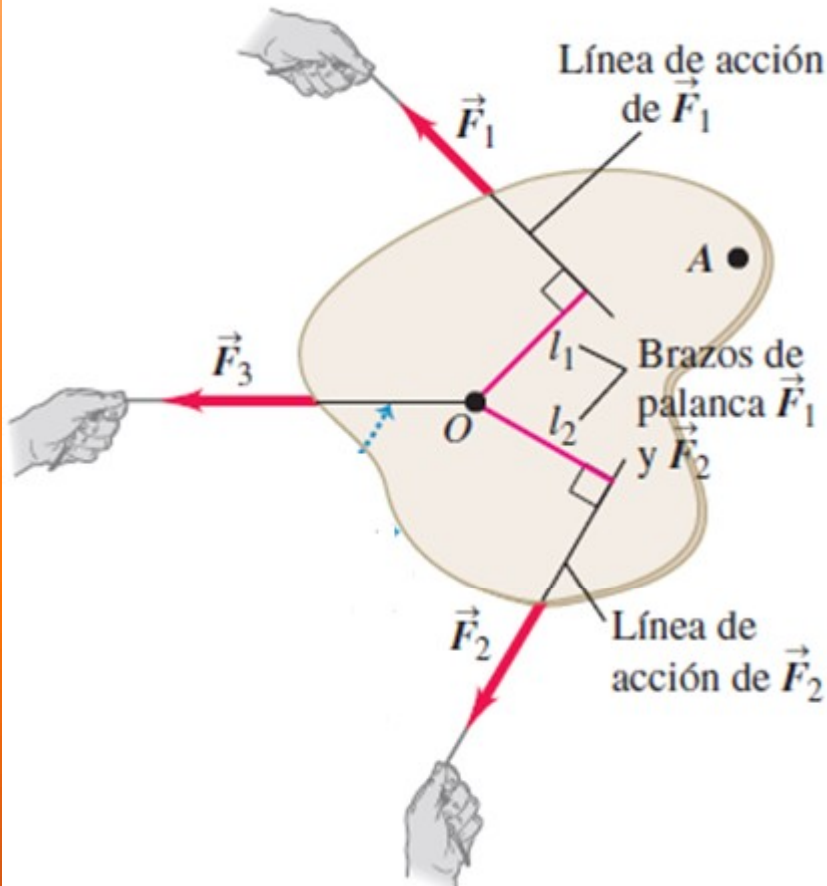


El **momento** o **torque** τ depende de la **fuerza** F , de la **distancia** r desde un punto del eje de rotación hasta el punto en que actúa la fuerza y del **ángulo** θ entre r y F . Su módulo vale:

$$\tau = r.F \text{sen } \theta$$

El módulo del momento o torque alrededor del punto P vale: $\tau = r.F \text{sen } \theta$
Y veremos que corresponde al módulo de un **producto vectorial**.

Repaso clase pasada: torque



La tendencia de F_1 de provocar una rotación alrededor de O depende: del módulo de F_1 , y de la distancia perpendicular l_1 (entre punto O y la línea de acción de la fuerza): que es el **brazo de palanca o brazo de momento**.

Se usa la letra griega τ (tau) para el torque, y su módulo vale:

Se define el torque de la fuerza \mathbf{F} , que se aplica en el punto P , respecto al punto O como el producto vectorial del vector \mathbf{r} (que va desde O a P) por la fuerza \mathbf{F} .

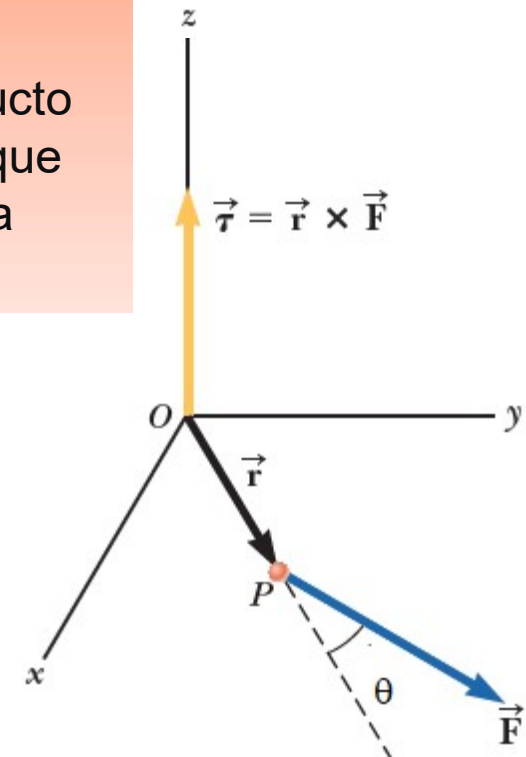
$$\tau = F l$$

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\tau = r F \sin \theta$$

¡ CUIDADO ! El torque siempre se mide con respecto a un punto.

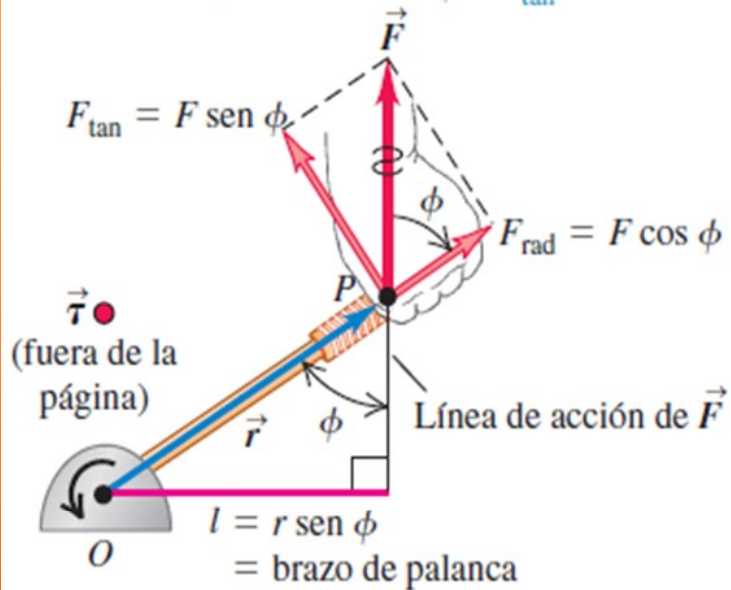
Si modificamos la posición de este punto, el torque de cada fuerza también cambia.



Repaso clase pasada: torque

Tres maneras de calcular la torca:

$$\tau = Fl = rF \sin \phi = F_{\tan} r$$



3 formas para calcular el torque:

- 1) Encontrar el brazo de palanca l y utilizar: $\tau = Fl$.
- 2) Determinar el ángulo Φ entre los vectores \mathbf{r} y \mathbf{F} ; el brazo de palanca es $r \sin \Phi$, por lo que: $\tau = rF \sin \Phi$.
- 3) Descomponer \mathbf{F} en F_{\tan} y F_{rad} con respecto a la dirección de \mathbf{r} . $\tau = r(F \sin \Phi) = r \cdot F_{\tan}$.

$$\tau = Fl = rF \sin \phi = F_{\tan} r$$

Los torques pueden provocar rotación en cualquier *sentido* (*antihorario u horario*). Se debe **elegir un sentido de giro positivo**.

Habitualmente se elige que los **torques en sentido antihorario son positivos**.

La **unidad del SI del torque es el newton-metro**.

Como el torque *no es trabajo ni energía* se expresa en newton-metros, *no en joules*.

Vectores perpendiculares al plano

(x) entrante al plano

(•) saliente al plano



Repaso clase pasada: equilibrio

Dos condiciones de equilibrio: Condiciones necesarias y suficientes.

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{\tau} = 0$$

Alrededor de cualquier punto

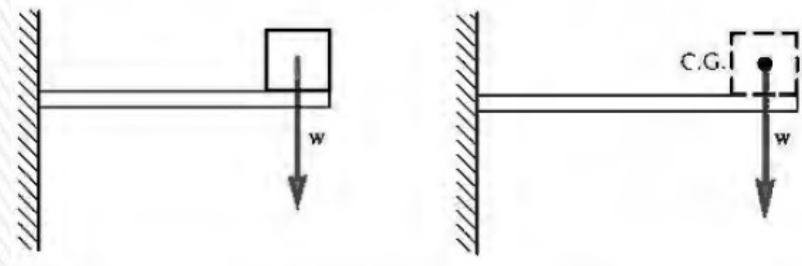
$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0$$

Situaciones en las que un cuerpo rígido está en reposo (sin traslación ni rotación): **equilibrio estático**.

Las mismas condiciones son válidas para un cuerpo rígido con movimiento de *traslación* uniforme (sin rotación).

- 1) La suma vectorial de todas las fuerzas que actúan sobre el rígido es cero.
- 2) la suma de los torques con respecto a cualquier punto debe ser cero.

Centro de gravedad (C.G.): Punto en el cual se puede considerar aplicado el peso w del cuerpo, de modo que el torque con respecto a cualquier punto producido por el peso así aplicado, es el mismo que el efecto que produce el peso distribuido en todo el cuerpo.



El C.G. representa el punto donde se puede considerar concentrado todo el peso. En los objetos simétricos y densidad uniforme coinciden con sus centros geométricos.

Un objeto suspendido siempre cuelga de manera que su C.G. se encuentra directamente por debajo del punto de suspensión, ya que en esta posición el torque que resulta del peso con respecto a ese punto es cero.

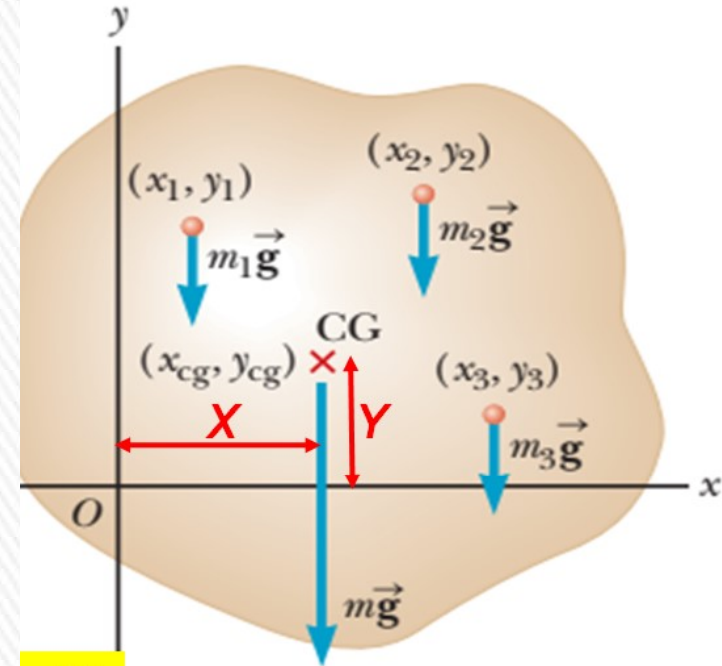
Repaso clase pasada: centro de gravedad

No hay diferencia entre el **centro de gravedad** y el **centro de masas** mientras el valor de **g** puede suponer como tenga la misma dirección y **módulo** para cada peso.

El procedimiento para hallar el centro de gravedad o centro de masas de un sistema de partículas plano es el siguiente.

Calculo todos los productos $x_i \cdot w_i$ (ó $x_i \cdot m_i$), donde x_i es la distancia de cada w_i (o m_i) al eje y , los sumo y los divido entre el peso (o masa) total. Con esto obtengo la coordenada X del C.G. (o del C.M.) al eje y .

Para determinar Y , la coordenada del C.G. (o del C.M.) al eje x , hago los productos $y_i \cdot w_i$ (ó $y_i \cdot m_i$) siendo y_i la distancia de cada w_i (o m_i) al eje x .

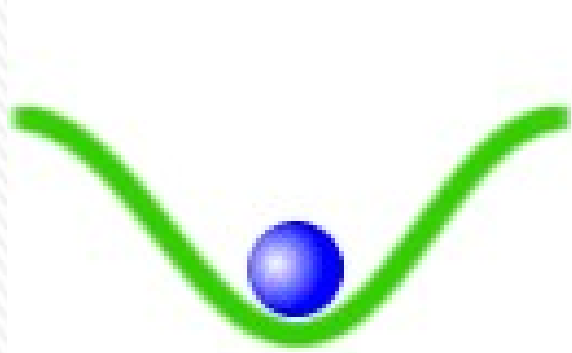


$$X = \frac{x_1 \cdot w_1 + x_2 \cdot w_2 + x_3 \cdot w_3 + \dots}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots} = \frac{\sum_i x_i \cdot w_i}{\sum_i w_i}$$

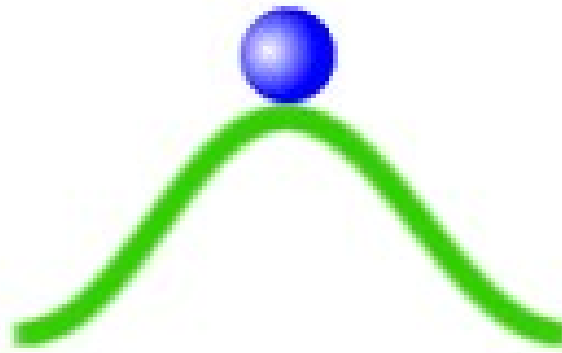
$$Y = \frac{y_1 \cdot w_1 + y_2 \cdot w_2 + y_3 \cdot w_3 + \dots}{w_1 + w_2 + w_3 + \dots} = \frac{\sum_i y_i \cdot w_i}{\sum_i w_i}$$



TIPOS DE EQUILIBRIO



Equilibrio Estable



Equilibrio Inestable



Equilibrio Indiferente

Un equilibrio se dice que es **estable** si, al perturbarlo, por sí mismo, vuelve al punto anterior de estabilidad. Un péndulo es un buen ejemplo. Aunque lo alteremos tantas veces como queramos, siempre retomará la posición inicial, la vertical.

Un equilibrio se dice que es **inestable** si, al perturbarlo, el objeto se aleja de su posición inicial. Ejemplo, una bolita sobre el polo de una esfera. Una vez apartada, no regresa, se aleja del punto de equilibrio.

Un equilibrio se dice que es **indiferente** si, al perturbarlo, no modifica su estado, es decir accede a un nuevo punto de equilibrio. Un libro caído en el suelo es un buen ejemplo. Es indiferente a lo que le hagamos.

ESTABILIDAD Y EQUILIBRIO

El número y posición de las patas de un animal quedan determinados parcialmente, según sus necesidades de estabilidad y de equilibrio. La idea básica se ilustra mediante el tablón de la figura.

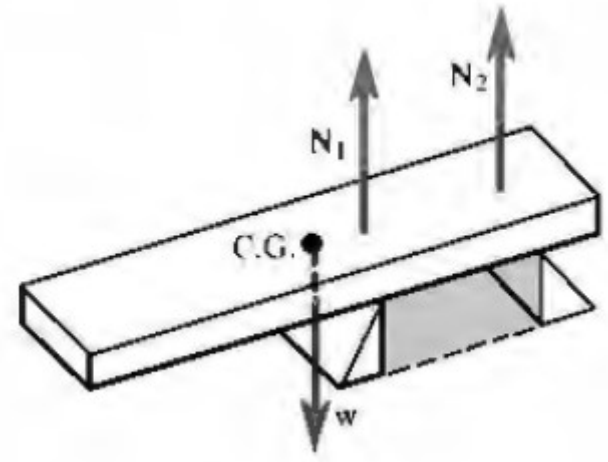
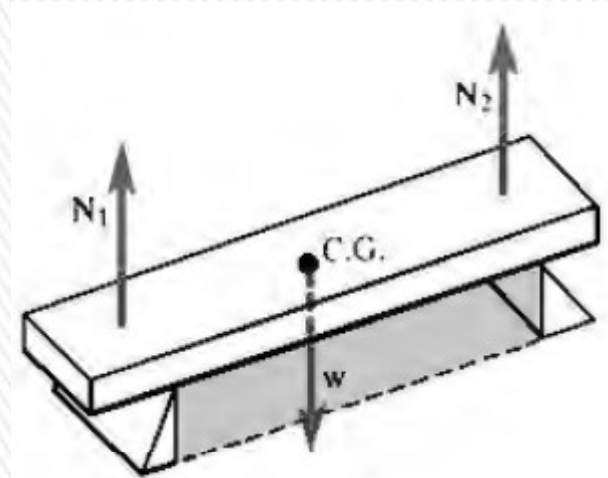
Si su C.G. se halla entre los soportes, los torques en torno al C.G. debidos a N_1 y a N_2 son opuestos y se anulan, y por lo tanto el tablón se halla en equilibrio.

Sin embargo, cuando el centro de gravedad se halla a la izquierda de ambos soportes, los torques de N_1 y N_2 con respecto al C.G. son ambos positivos. Como el torque neto no es nulo, el tablón se cae.

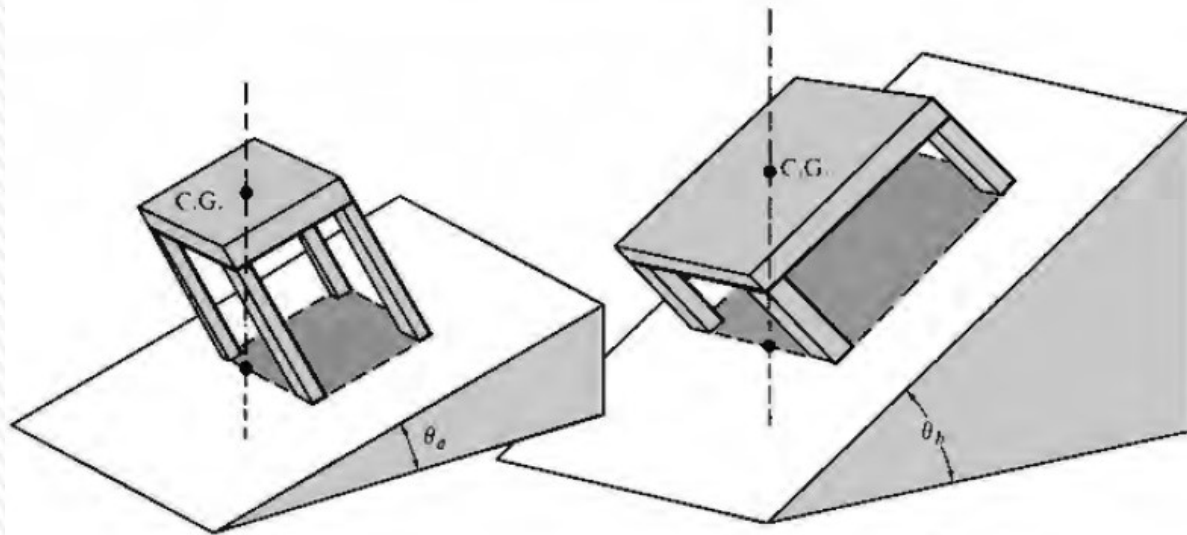
Así, **un objeto se halla en equilibrio sólo cuando su centro de gravedad se halla por encima del área de la base definida por sus soportes.**

Un animal que se sostiene sobre cuatro patas es análogo a una mesa.

Una mesa colocada sobre una superficie que se vaya inclinando gradualmente, acaba por caerse cuando su centro de gravedad ya no se halla sobre la superficie delimitada por los extremos de sus cuatro patas.



ESTABILIDAD Y EQUILIBRIO



Cuanto más cortas sean las patas para una mesa de forma determinada, mayor será el ángulo θ en que esto ocurra y mayor será su estabilidad; una mesa baja es más estable que una mesa alta.

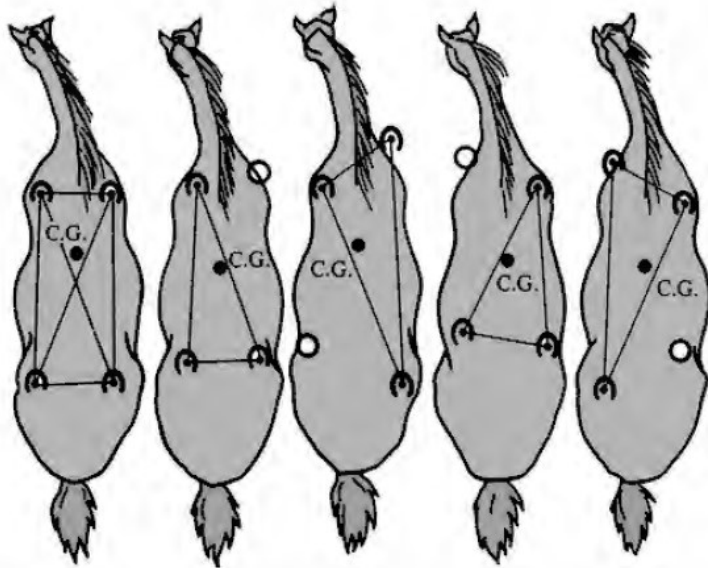
Análogamente, el C.G. de los automóviles, barcos y vasijas ha de mantenerse lo más bajo posible para asegurar la máxima estabilidad.

Se observa que las ratas y ardillas, cuyas piernas son relativamente cortas, están bien adaptadas para vivir en terrenos escarpados o en las ramas de los árboles. En cambio, el caballo y el antílope, cuyas patas son largas, se encuentran bien dispuestos para ser eficaces en la carrera sobre terrenos casi planos.

Si un cuadrúpedo levanta una pata, permanecerá en equilibrio si su C.G. se encuentra por encima del área triangular de la base delimitada por las tres patas restantes.

Moviendo las patas en el orden correcto, puede andar lentamente manteniendo siempre tres patas en contacto con el suelo, y con el C.M. por encima del triángulo definido por ellas.

ESTABILIDAD Y EQUILIBRIO



El orden es: delantera derecha, trasera izquierda, delantera izquierda, trasera derecha. Es el que siguen todos los animales cuadrúpedos y los niños cuando gatean. Los seres humanos, los pájaros y algunos animales pueden mantenerse en equilibrio sobre uno o dos pies, pero ello ocurre gracias a que sus pies son suficientemente anchos como para permitirse.

Cuando un cuadrúpedo corre rápidamente, puede ocurrir que sólo una o dos de sus patas estén en el suelo en el mismo instante. La tendencia a caerse hacia adelante o a balancearse hacia los lados se ve contrarrestada cuando las otras patas bajan al suelo.



Un velocista, en la salida e incluso durante la carrera, tiene su centro de masas muy por delante de sus pies, como se muestra en este dibujo. Esto significa que se encuentra en una posición muy inestable. Logra mantener el equilibrio llevando sus piernas hacia adelante justo a tiempo de evitar la caída. Esta posición extrema ayuda al atleta a ejercer ¹¹ sobre el suelo una fuerza mayor que aumenta su aceleración.

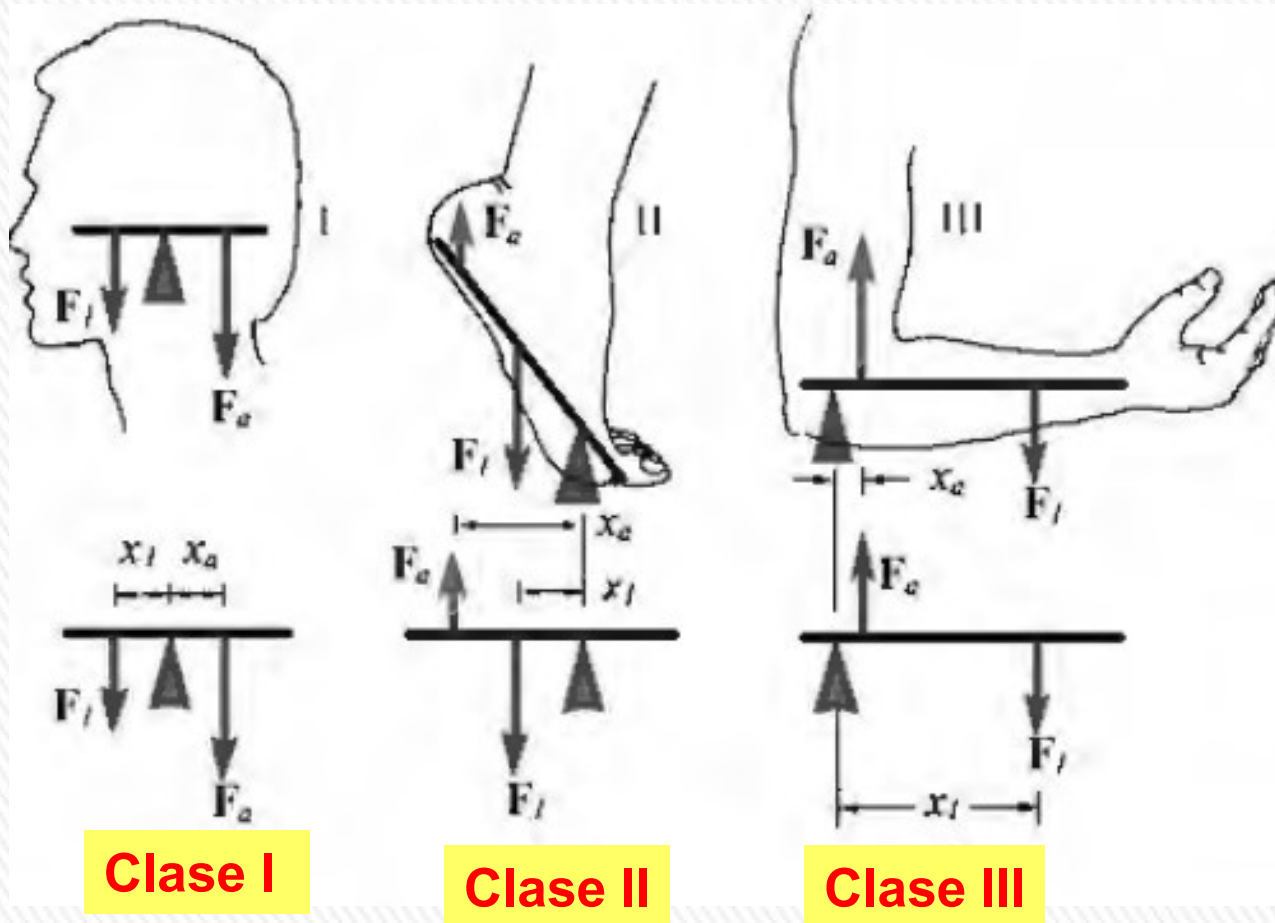
PALANCAS Y VENTAJA MECÁNICA

Máquinas simples: palancas y sistemas de poleas.

En cada caso, se aplica una fuerza F_a y se contrarresta una fuerza de carga F_L .

La **ventaja mecánica (V.M.) de la máquina** se define como el cociente de los módulos de estas fuerzas

$$V.M. = \frac{F_L}{F_a}$$



Una **palanca** es en esencia una barra rígida utilizada con un punto de apoyo (fulcro).

Según las posiciones relativas de F_L , F_a y el **fulcro**, se definen tres **clases de palanca**.

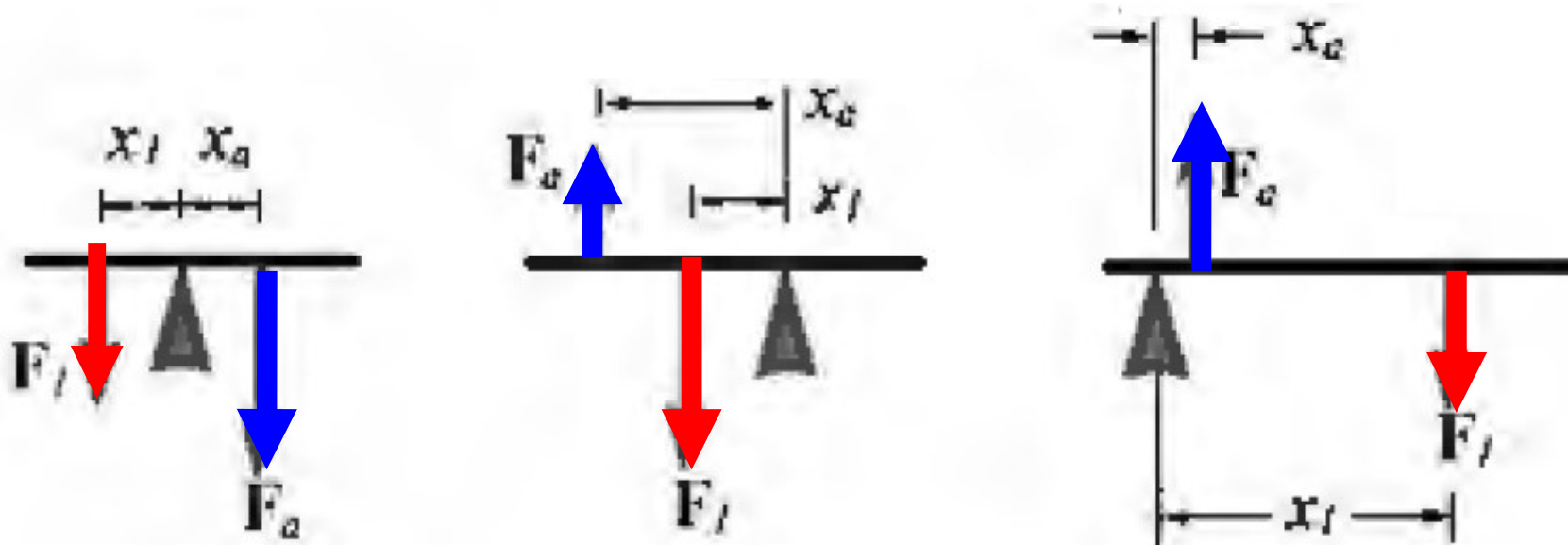


PALANCAS Y VENTAJA MECÁNICA

La ventaja mecánica en todas las clases de palancas se puede expresar como un cociente de distancias a partir del fulcro.

Si las fuerzas son perpendiculares a la palanca, la razón de la fuerza de carga y aplicada en equilibrio es:

$$V.M. = \frac{F_L}{F_a} = \frac{x_a}{x_L}$$



Se debe considerar la fuerza o componente perpendicular a la palanca.

Ventajas mecánicas de las palancas: **clase III es siempre menor que 1, clase II es siempre mayor que 1 y de clase I pueden ser mayor o menor que 1.**

La **ventaja mecánica V.M.** dada por la ecuación anterior es un valor ideal.

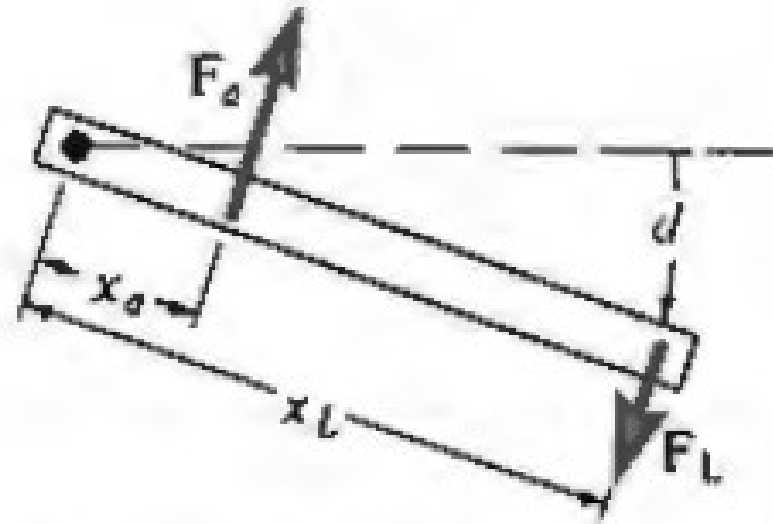
Las máquinas reales siempre tienen fuerzas de rozamiento que reducen la ventaja mecánica real por debajo de su valor ideal.

PALANCAS Y VENTAJA MECÁNICA

Las extremidades de los animales se pueden modelar como palancas tipo III.

Las extremidades cortas con pequeños valores de x_L tendrán V.M. relativamente grandes y serán capaces de ejercer grandes fuerzas.

Sin embargo, la distancia que recorre el extremo de un miembro es proporcional a su longitud x_L por lo que el movimiento rápido requiere extremidades largas.



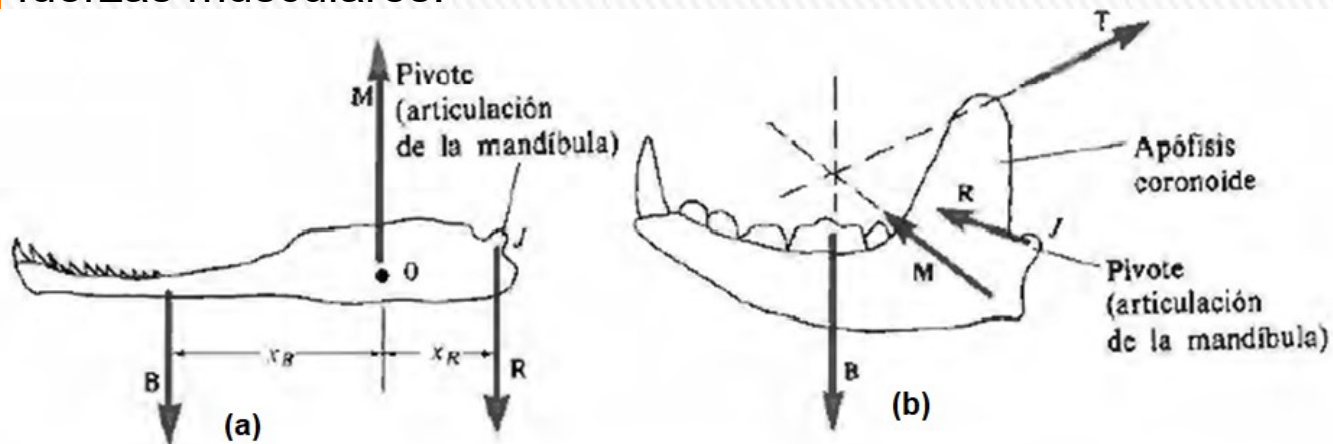
Hay un compromiso entre la fuerza y la velocidad de movimiento.

La pata delantera de un caballo de carreras tiene una ventaja mecánica de 0,08.

El armadillo, que es un animal zapador, tiene una pata delantera cuya ventaja mecánica es 0,25. Por lo tanto, aunque no puede moverse con tanta velocidad, tiene la fuerza suficiente para excavar.

Las mandíbulas de los animales

Un animal debe poder morder con fuerza: esto depende del módulo, dirección y punto de aplicación de las fuerzas ejercidas por los músculos que cierran la mandíbula. Además, los huesos de la articulación *de la mandíbula superior con la inferior* deben ser lo suficientemente resistentes a fin de evitar fracturas y dislocaciones. Sabemos que los mamíferos han evolucionado a partir de reptiles de modo que los músculos implantados en la mandíbula inferior iban *creciendo progresivamente, mientras que los huesos de la articulación iban disminuyendo de tamaño, lo que se explica en términos de los cambios de dirección y de punto de aplicación de las fuerzas musculares.*



Diferencias básicas entre la mandíbula inferior de un reptil primitivo y el típico aspecto de un mamífero actual.

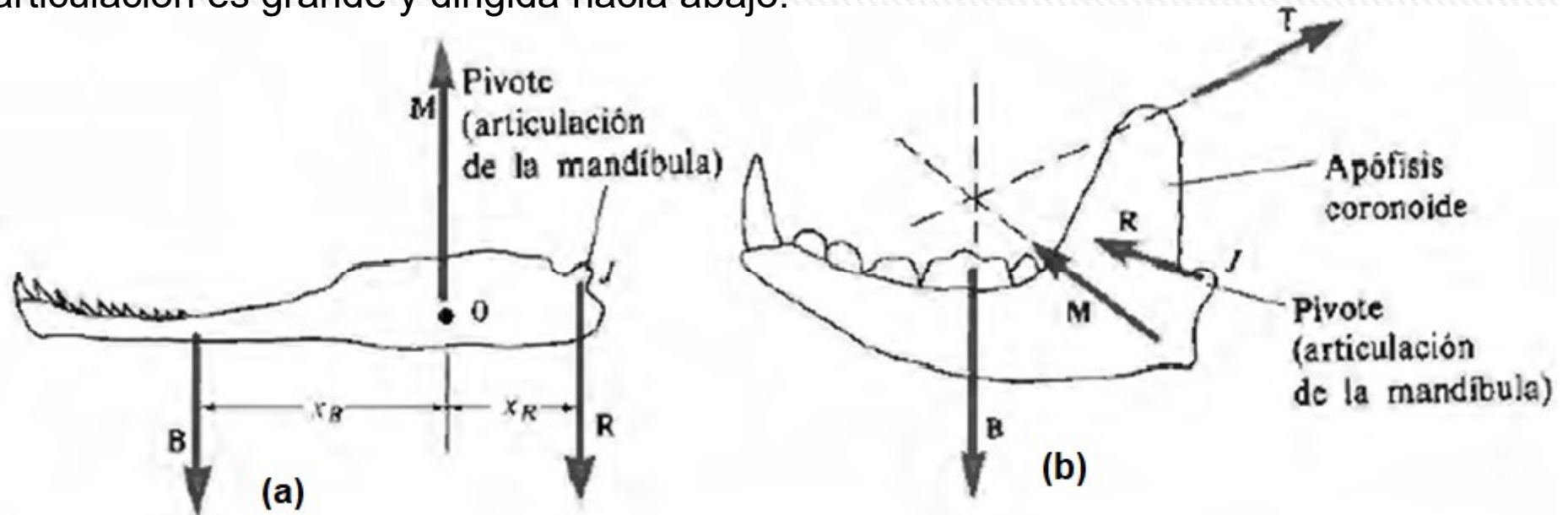
En el reptil es una simple barra con unos músculos que empujan hacia arriba, implantados en un punto cercano a la articulación.

La mandíbula de los mamíferos tiene una gran protuberancia llamada **apófisis coronóides**, en la cual se implanta el **músculo temporal** que empuja hacia atrás y hacia arriba (**fuerza T**).

El **masetero** y el **pterygoídes** empujan hacia adelante y hacia arriba (**fuerza M**).

Las mandíbulas de los animales

Un reptil primitivo que muerde con una fuerza dirigida hacia arriba $-B$ la comida situada entre sus dientes posteriores experimenta una reacción igual pero opuesta B **sobre su mandíbula**. Como la fuerza muscular M se aplica cerca de la articulación, se puede alcanzar el equilibrio estático sólo si la **fuerza R** ejercida sobre la articulación es grande y dirigida hacia abajo.



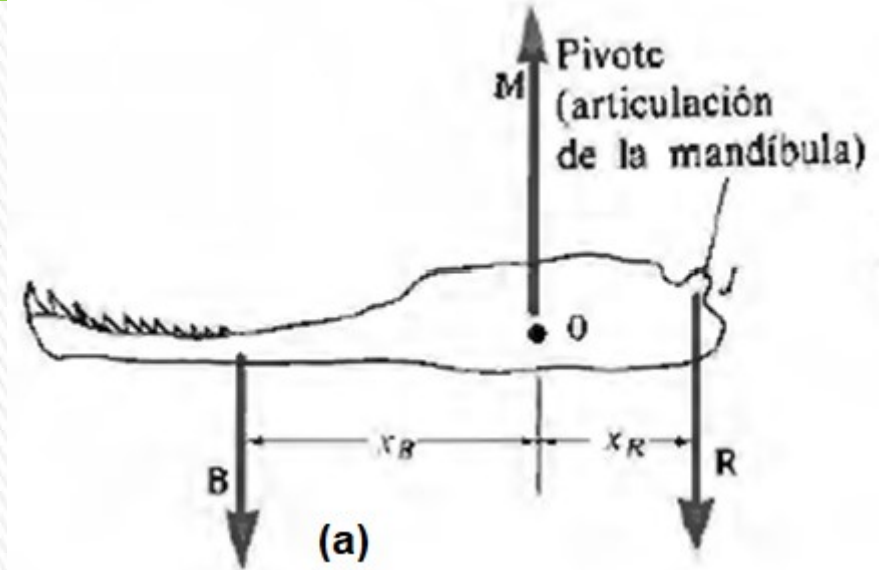
(a) Mandíbula inferior de un reptil primitivo. M es la fuerza debida al músculo. B es la fuerza de reacción que presenta el objeto que está siendo mordido y R es la fuerza debida a la articulación de la mandíbula en J .

(b) Mandíbula de mamífero. Las fuerzas musculares son T y M . La fuerza R debida a la articulación de la mandíbula puede ser nula si las líneas de acción de las tres fuerzas T , B y M se cortan de la manera que se muestra aquí.

Las mandíbulas de los animales

Para el reptil: calculando los momentos con respecto al punto O, el momento neto es cero si

$$x_B \cdot B - x_R \cdot R = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{x_B}{x_R} B$$



Como la fuerza neta sobre la mandíbula debe ser cero, $M - B - R = 0$, la fuerza muscular requerida es

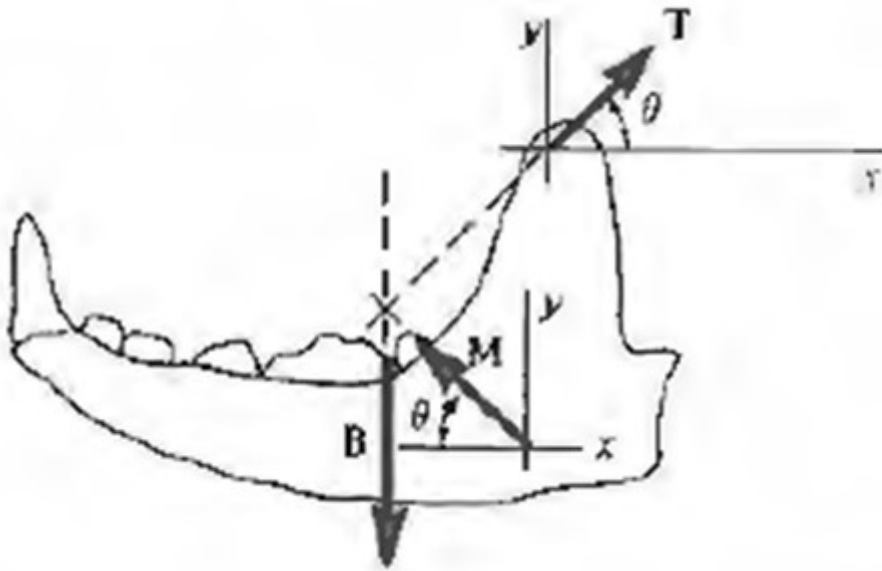
$$M = B + R = B \left(1 + \frac{x_B}{x_R} \right)$$

Por ejemplo, si $x_B = 2x_R$ y $B = 100 \text{ N}$, entonces $R = 200 \text{ N}$ y $M = 300 \text{ N}$.

Así pues, **la fuerza B sobre la comida es menor que las fuerzas M y R ejercidas por el músculo y la articulación, respectivamente.**

Se ve claramente que la solidez de la articulación es un factor que limita la fuerza con que puede morder el reptil y el margen de seguridad del músculo.

Las mandíbulas de los animales

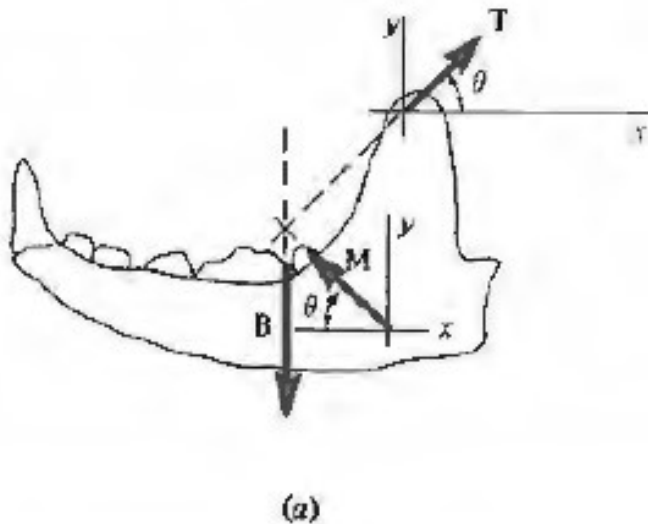


Fuerzas sobre la mandíbula de un mamífero cuando la articulación no suministra fuerza alguna (fuerza $R=0$). Esto implica que las fuerzas B , T y M sean concurrentes a un punto.

En la mandíbula de los mamíferos, la fuerza M se aplica asimismo a partir de la articulación y otra fuerza muscular, T , se halla también presente.

Si las líneas de acción de T , M y B se cortan en un punto, sus momentos con respecto a este punto son cero. Por consiguiente, la segunda condición de equilibrio, $\tau = 0$, requiere que también la línea de acción de R pase por este punto. Además, cuando las fuerzas también satisfacen $T + M + B = 0$, *la articulación no debe proporcionar ninguna fuerza R para satisfacer la condición $\Sigma F = 0$.*

Las mandíbulas de los animales



Si $T + M + B$ no es nula, o si sus líneas de acción no se cortan en un punto común, la articulación deberá proporcionar una fuerza R , que de todos modos será mucho menor que la correspondiente en el reptil.

Por lo tanto, la articulación no necesita una estructura tan grande y por lo tanto no limita el tamaño del músculo que puede tener el animal.

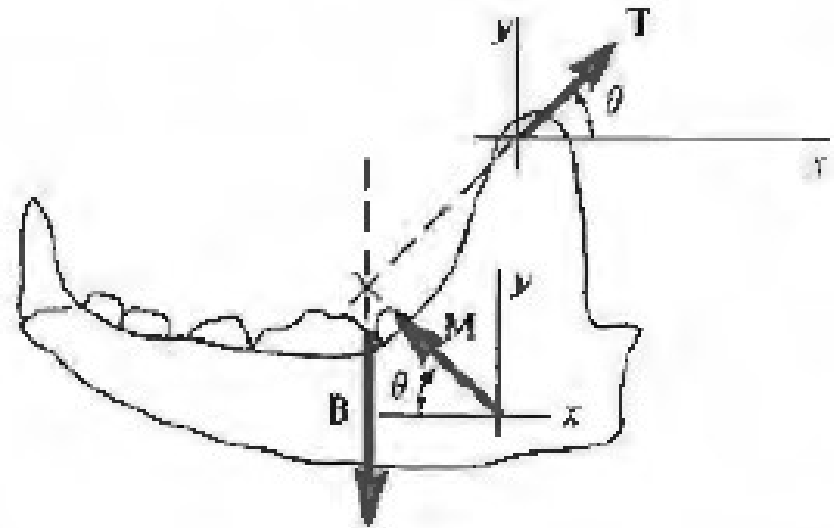
Los mamíferos carnívoros usan sus poderosos incisivos para desgarrar y transportar sus presas, mientras que los herbívoros muelen su comida lateralmente entre los molares.

El peso del músculo temporal de un carnívoro oscila entre la mitad y los dos tercios del peso total de los músculos que cierran las mandíbulas.

Sin embargo, en los herbívoros, este músculo sólo pesa una décima parte del total.

Ejemplo (similar 3.11)

Para ilustrar la superioridad de la mandíbula los mamíferos, supongamos que las fuerzas musculares **T** y **M** de la figura forman ambas un ángulo de $\theta = 45^\circ$ con la horizontal. ¿Cómo se ha de relacionar **M** con **T** para que la articulación no tenga que hacer ninguna fuerza **R** y cuánto valdrá la fuerza **B** ejercida sobre la comida?



(Suponer que las líneas de acción de B, T y M se cortan en un punto común, de modo que se cumple la segunda condición de equilibrio $\tau = 0$)

Según x: $T \cos 45^\circ = M \cos 45^\circ$ por lo que resulta que $T=M$

Según y: $T \sin 45^\circ + M \sin 45^\circ = B$ como $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por lo que resulta que: $B = \sqrt{2} M = \sqrt{2} T$

Por consiguiente, la fuerza **B** ejercida por la mandíbula sobre la comida es mayor que cualquiera de las dos fuerzas musculares **T** y **M**, y la fuerza debida a la articulación es nula. **Por el contrario, en el caso del reptil hallamos que la fuerza B es menor que la fuerza muscular o la fuerza de la articulación.**

Centro de gravedad de los seres humanos

La información sobre el **centro de gravedad (CG)** de los seres humanos resulta útil en muchas aplicaciones: el C.G. de un objeto en caída libre sigue la misma trayectoria que una partícula aún cuando el objeto esté girando o cambie de forma. Ello simplifica el análisis de movimientos, saltos y actividades atléticas.

Técnica para determinar el CG para hombres y animales:

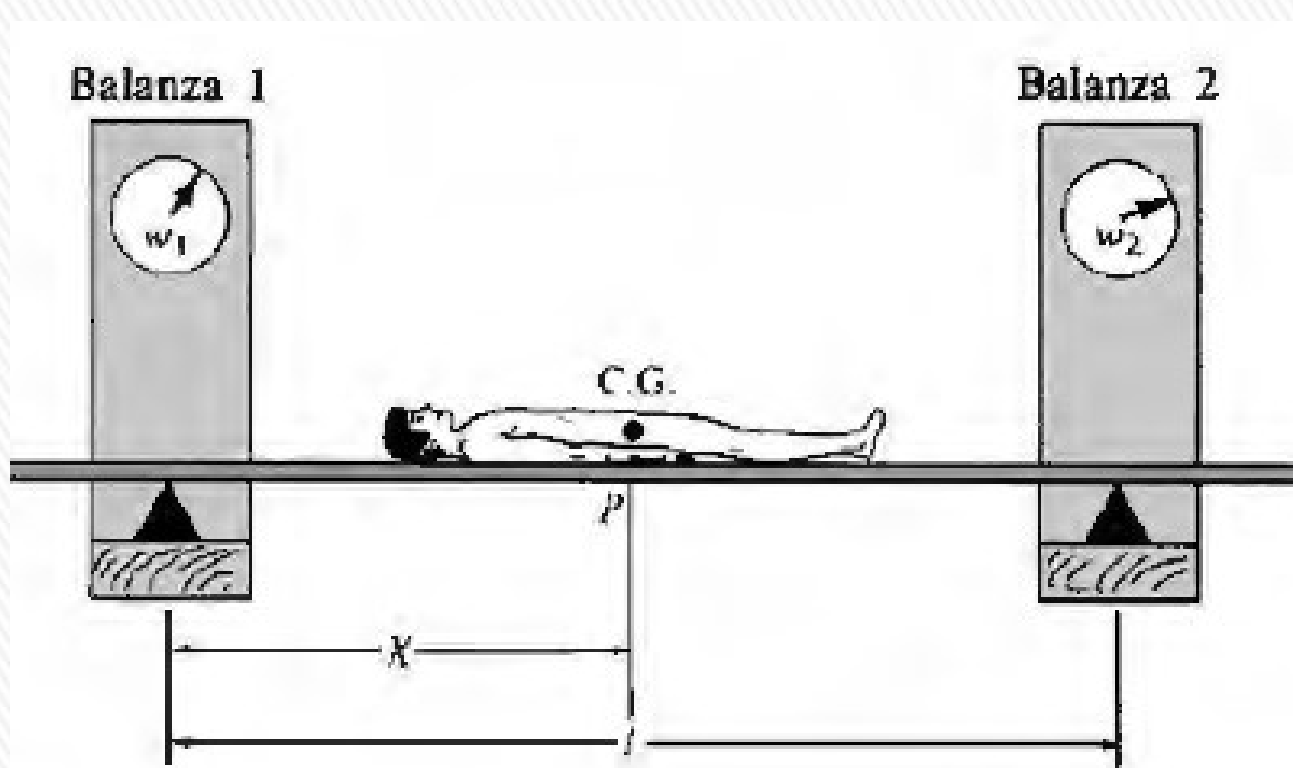


Tabla de longitud l sostenida en sus extremos por soportes que descansan sobre balanzas ajustadas de manera que su cero corresponda a la tabla sola.

Cuando la persona se tumba sobre la tabla, las balanzas marcan w_1 y w_2 , respectivamente.

$$x \cdot w_1 = (l - x)w_2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{w_2}{w_1 + w_2} l$$

Centro de gravedad de los seres humanos

La medida se repite dos veces más, primero con el individuo de pie y luego con el individuo girado 90° .

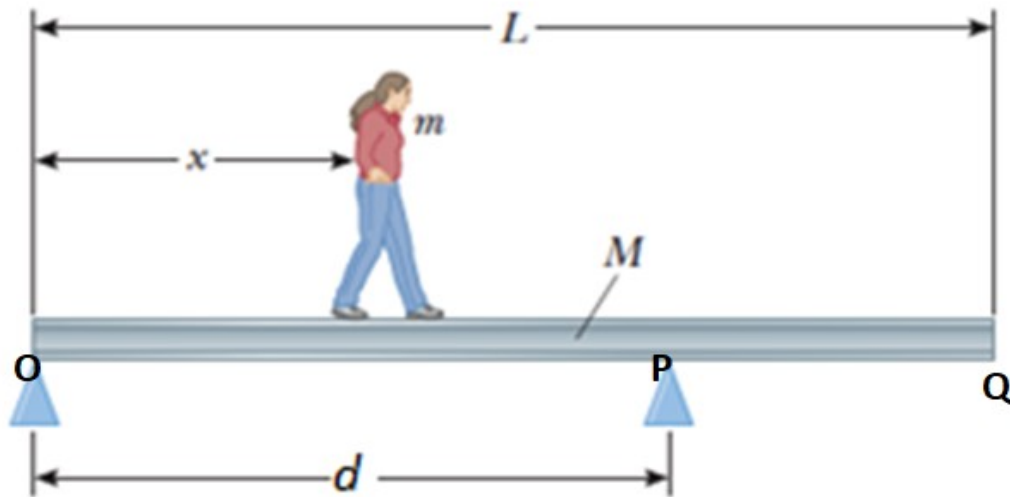
De este modo se determinan las tres coordenadas del CG.

La medida detallada de las masas, los tamaños y los centros de gravedad de las partes del cuerpo es difícil y los resultados varían según los individuos.

Los datos para un hombre típico se dan en figuras y tablas como las que se muestran en el ejercicio 3.12.



1er. Parcial 2021



5A- Una viga de longitud $L=6,00\text{ m}$ y masa $M=120\text{ kg}$ está en reposo sobre dos apoyos. El primer apoyo (O) está en el extremo izquierdo, tomado como origen, y el segundo apoyo (P) está a una distancia $d=4,00\text{ m}$, del extremo izquierdo (Q). Una mujer de masa $m=70,0\text{ kg}$ empieza a caminar del extremo izquierdo al derecho, como se ve en la figura.

¿Cuál es la distancia máxima x , expresada en metros, que puede alejarse la mujer del extremo izquierdo sin que la viga se comience a inclinar?

- A) 3,89 B) 4,21 C) 4,36 D) 4,66 E) 4,82 F) 5,04 G) 5,43 H) 5,71

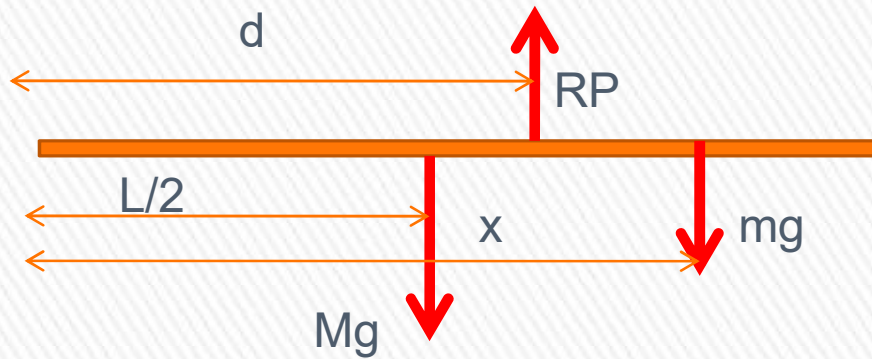
La mujer obviamente deberá estar a la derecha del soporte P.

La condición límite para que la viga comience a inclinarse es que la reacción en el soporte O se anule.

Vamos a trazar el DCL para esta situación.



1er. Parcial 2021



Lo más sencillo es calcular torques respecto al punto P:

$$0 = Mg \left(d - \frac{L}{2} \right) - mg(x - d)$$

$$0 = Mgd - Mg \frac{L}{2} - mgx + mgd$$

$$Mgd + mgd - Mg \frac{L}{2} = mgx$$

$$x = \frac{(M + m)d - M \frac{L}{2}}{m} = \frac{(120 + 70,0) \times 4,00 - 120 \times 3,00}{70,0} = 5,714 \text{ m}$$

$$x = 5,71 \text{ m}$$



1er. Parcial 2021

5B- Considere las siguientes aseveraciones:

- 1) Mientras la mujer se mantenga entre los dos soportes, la barra no se inclinará. **Verdadero**
- 2) Cuando la mujer se encuentra a la distancia x máxima de la parte A, se encuentra en un punto de equilibrio inestable. **Verdadero**
- 3) Cuando la mujer se encuentra entre los puntos O y P, y se acerca al punto P, entonces el torque que realiza su peso respecto al punto O disminuye. **Falso**
- 4) Si la masa M de la viga fuera mayor, la mujer podría desplazarse una distancia x mayor sin que se incline la viga. **Verdadero**
- 5) Para que se cumpla la condición de equilibrio de un sistema rígido alcanza que la sumatoria de fuerzas que actúa sobre el sistema sea nula y que el torque neto respecto al centro de gravedad sea nulo. **Verdadero**
- 6) Si la mujer se coloca sobre el punto P, entonces la reacción del soporte de dicho punto es igual al peso de la mujer. **Falso**
- 7) Cuando la mujer alcanza el valor de x máximo, la reacción normal del soporte O se anula. **Verdadero**