

Coeficiente de restitución: colisiones inelásticas

Geofísica de medios granulares

Disipación de energía en rebotes y método acústico con Phyphox

OBJETIVO

Medir el **coeficiente de restitución** ε de una pelota que rebota sobre una superficie dura, utilizando el **cronómetro acústico** de la aplicación Phyphox (smartphone). A partir de los intervalos de tiempo entre rebotes sucesivos se determina ε , se reconstruyen las alturas de cada rebote, y se verifica la altura inicial de caída. El experimento conecta con la disipación de energía en colisiones granulares, la teoría cinética de gases granulares y la dinámica de caída de rocas.

CONTEXTO FÍSICO

Colisiones elásticas e inelásticas

Cuando una esfera cae sobre una superficie rígida, parte de su energía cinética se disipa durante el impacto en forma de calor, sonido, deformación plástica y vibraciones de la superficie. En una colisión perfectamente elástica toda la energía cinética se conserva; en una colisión perfectamente inelástica, la esfera no rebota. Los casos reales se sitúan entre estos dos extremos.

Coeficiente de restitución

El coeficiente de restitución ε se define como la razón entre la velocidad de rebote v_f y la velocidad de impacto v_i :

$$\varepsilon = v_f / v_i$$

Para una colisión completamente elástica $\varepsilon = 1$; para una completamente inelástica $\varepsilon = 0$. La fracción de energía cinética perdida en cada impacto es:

$$\Delta E/E = 1 - \varepsilon^2$$

Relación con las alturas de rebote

Si una pelota se suelta desde una altura h_0 y rebota con coeficiente de restitución constante ε , la altura después del rebote n es:

$$h_n = \varepsilon^{2n} h_0$$

La serie de rebotes converge a un tiempo total finito: $t_{\text{total}} = \sqrt{(2h_0/g)} \cdot (1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon)$.

Método acústico: de los tiempos a las alturas

Cada rebote produce un sonido detectable por el micrófono del celular. Si $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ es el intervalo de tiempo entre los rebotes $i-1$ e i , la pelota sube y baja durante ese intervalo bajo la acción de la gravedad. De las ecuaciones de caída libre se deducen dos relaciones fundamentales:

$$v_i = g \Delta t_i / 2 \quad h_i = g (\Delta t_i)^2 / 8$$

El coeficiente de restitución se obtiene directamente de la razón de tiempos consecutivos:

$$\varepsilon_i = \Delta t_i / \Delta t_{i-1}$$

Si ε es constante, los intervalos forman una serie geométrica: $\Delta t_i = \varepsilon^{i-1} \Delta t_1$. Esto permite también reconstruir la altura inicial sin medirla directamente:

$$h_0 = (g/8) \cdot (\Delta t_1)^4 / (\Delta t_2)^2$$

Dependencia de ε con la velocidad de impacto

En la teoría de Hertz, la disipación viscoelástica durante el contacto predice que ε disminuye suavemente con la velocidad de impacto: $\varepsilon(v) \approx 1 - c_1 v^{1/5} + \dots$ (Brilliantov & Pöschel, 2004). En la práctica, ε puede considerarse constante en un rango amplio de velocidades para materiales rígidos (acero, vidrio), pero varía notablemente para materiales blandos (goma, espuma). Verificar si ε es constante a lo largo de los rebotes sucesivos es uno de los objetivos del análisis.

Conexión geofísica

El coeficiente de restitución es un parámetro clave en la **teoría cinética de gases granulares**: controla la tasa de disipación de energía y el enfriamiento del sistema. En simulaciones DEM, ε determina junto con el contacto de Hertz la dinámica de colisiones entre granos. En geofísica, gobierna la **dinámica de caída de rocas** (*rockfall*): el alcance y la peligrosidad de un desprendimiento dependen críticamente de cuánta energía se pierde en cada rebote contra la ladera. También interviene en la **amortiguación de ondas sísmicas** en sedimentos no consolidados, donde las colisiones intergranulares disipan energía.

DESCRIPCIÓN DEL EXPERIMENTO

El experimento utiliza la aplicación **Phyphox** (disponible gratis para Android e iOS) como temporizador acústico. El micrófono del celular detecta los impactos de la pelota contra la superficie y registra los instantes de cada rebote con precisión de milisegundos. Se comparan diferentes materiales de pelota sobre una misma superficie dura.

- **Pelota:** cualquier pelota que rebote bien (ping-pong, goma, canica, pelota rebotona, pelota de tenis, etc.).
- **Superficie:** plana, dura y lisa (madera, baldosa, granito, placa metálica).
- **Celular** con Phyphox instalado, colocado cerca de la zona de impacto.
- **Regla o metro** para medir la altura inicial h_0 .

En Phyphox, seleccionar **Temporizadores** → **Cronómetro acústico** → **Rítmico** (o *Many*). Esta opción registra los tiempos absolutos de todos los eventos acústicos (rebotes). Exportar los datos en formato CSV.

ANÁLISIS DE DATOS

El objetivo del análisis es extraer ε a partir de los tiempos entre rebotes y verificar la consistencia del modelo de restitución constante.

Paso 1: Intervalos entre rebotes

A partir de los tiempos absolutos t_i exportados por Phyphox, calcular los intervalos $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ para cada par de rebotes consecutivos.

Paso 2: Coeficiente de restitución por par de rebotes

Calcular $\varepsilon_i = \Delta t_i / \Delta t_{i-1}$ para cada par sucesivo. Graficar ε_i en función del número de rebote. ¿Es constante? Estimar ε como el promedio y su incertidumbre como la desviación estándar.

Paso 3: Verificación gráfica — serie geométrica

Construir la gráfica Δt_{i+1} vs. Δt_i . Si ε es constante, los puntos deben caer sobre una recta que pasa por el origen con pendiente ε . Ajustar la recta y comparar la pendiente con el ε promedio del paso anterior.

Paso 4: Alturas de rebote

Calcular la altura de cada rebote: $h_i = g(\Delta t_i)^2/8$. Graficar h_i en función del número de rebote. Verificar que la envolvente sigue la ley $h_n = \varepsilon^{2n}h_0$.

Paso 5: Reconstrucción de la altura inicial

Usando los tres primeros tiempos de rebote, calcular la altura inicial: $h_0 = (g/8) \cdot (\Delta t_1)^4 / (\Delta t_2)^2$. Comparar con la altura medida directamente con la regla.

Paso 6: Comparación entre materiales

Repetir la experiencia con diferentes pelotas y/o superficies. Construir un gráfico de barras de ε para cada combinación material-superficie. Calcular la fracción de energía disipada $\Delta E/E = 1 - \varepsilon^2$ para cada caso.

PREGUNTAS PARA LA DISCUSIÓN

1. ¿Es el coeficiente de restitución constante a lo largo de los rebotes sucesivos? Si varía, ¿en qué sentido lo hace y por qué?
2. Graficar Δt_{i+1} vs. Δt_i . ¿Los puntos caen sobre una recta? ¿Qué significaría una desviación sistemática de la linealidad?
3. ¿La altura inicial reconstruida a partir de los tiempos acústicos coincide con la altura medida con la regla? Discutir las fuentes de discrepancia (tiempo de caída libre antes del primer rebote, resolución del micrófono, rebotes laterales).
4. ¿Qué fracción de la energía se pierde en cada rebote para cada material? ¿Cómo se relaciona esto con la rigidez y la viscoelasticidad del material?
5. ¿Por qué una pelota de ping-pong (hueca, liviana) tiene un ε mayor que una pelota de tenis (deformable, con fieltro)? Discutir el rol de la deformación, la masa y las propiedades de la superficie.
6. La teoría de Hertz predice $\varepsilon(v) \approx 1 - c_1 v^{1/5}$. ¿Es posible observar esta dependencia con la velocidad a partir de los datos de rebotes sucesivos (donde v disminuye de rebote en rebote)?
7. En la dinámica de caída de rocas (*rockfall*), el alcance de los bloques depende del coeficiente de restitución con la ladera. ¿Cómo se modificaría el alcance si ε pasara de 0,5 a 0,8? Estimar usando la fórmula del tiempo total de rebotes.
8. ¿Por qué la serie infinita de rebotes converge a un tiempo finito? Derivar la expresión $t_{\text{total}} = \sqrt{(2h_0/g)} \cdot (1 + \varepsilon)/(1 - \varepsilon)$ a partir de la serie geométrica de los tiempos entre rebotes.

RESULTADOS ESPERADOS

A modo de guía, los valores típicos del coeficiente de restitución son:

- Pelota rebotona (goma dura): $\varepsilon \approx 0,80-0,90$
- Ping-pong sobre madera: $\varepsilon \approx 0,89-0,92$
- Canica de vidrio sobre granito: $\varepsilon \approx 0,85-0,95$
- Pelota de tenis sobre madera: $\varepsilon \approx 0,55-0,60$
- Esfera de acero sobre acero: $\varepsilon \approx 0,60-0,70$
- La gráfica Δt_{i+1} vs. Δt_i es una recta de pendiente ε , confirmando la serie geométrica.
- La altura reconstruida h_0 suele coincidir con la medida directa dentro de un 5–15 %, dependiendo de la calidad de la detección acústica del primer rebote.
- Para materiales rígidos, ε es aproximadamente constante. Para materiales blandos, ε puede aumentar ligeramente en rebotes sucesivos (menor velocidad \rightarrow menor disipación viscoelástica).

REFERENCIAS

- [1] J. Duran, *Sands, Powders, and Grains: An Introduction to the Physics of Granular Materials*, Springer (2000). Cap. 2, Sec. 2.2.2.
- [2] N. V. Brilliantov, T. Pöschel, *Kinetic Theory of Granular Gases*, Oxford University Press (2004). Cap. 3 — coeficiente de restitución dependiente de la velocidad.
- [3] T. Schwager, T. Pöschel, *Coefficient of restitution and linear-dashpot model revisited*, *Granular Matter* **9**, 465–469 (2007).
- [4] S. Staacks, S. Hütz, H. Heinke, C. Stampfer, *Advanced tools for smartphone-based experiments: phyphox*, *Phys. Educ.* **53**, 045009 (2018).
- [5] A. Dorrestijn, A. Volkwein, *Rockfall*, en T. Davies (ed.), *Landslide Hazards, Risks, and Disasters*, Elsevier (2015). Cap. 3 — rol de ε en la modelización de caída de bloques.
- [6] K. L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press (1985). Cap. 11 — impacto de cuerpos elásticos.

