Ley de Hooke, coeficientes elasticos y circulo de Mohr

Practico — Elasticidad lineal en medios continuos

Curso: Geofisica de medios granulares — PEDECIBA Fisica
Docente: Thomas Gallot — Facultad de Ciencias, UdelaR

Objetivos

- Aplicar la ley de Hooke generalizada en 2D.
- Manejar las dos notaciones: (E, nu) y (lambda, mu).
- Demostrar la equivalencia entre coeficientes elasticos.
- Construir el circulo de Mohr a partir de un estado de esfuerzos general.
- Determinar esfuerzos principales y planos de corte maximo.

Formulario de referencia

Ley de Hooke isotrópica (3D):

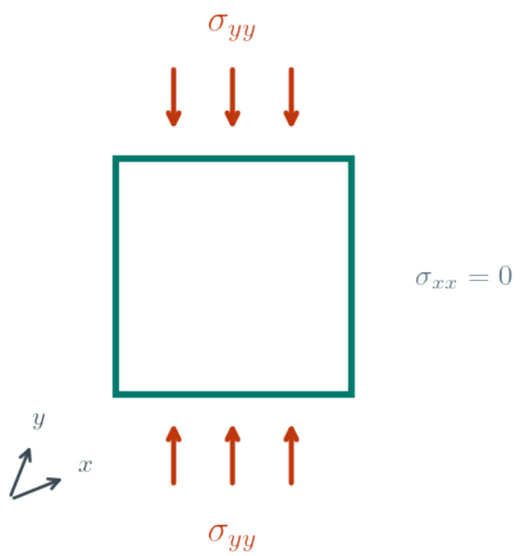
$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}$$

Ley de Hooke inversa (3D):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\,\sigma_{ij} - \nu\,\delta_{ij}\,\sigma_{kk}\right]$$

Parte I: Compresion uniaxial

Se aplica un esfuerzo de compresion uniaxial σ_{yy} sobre un elemento de material isotropo. Las caras laterales estan libres: $\sigma_{xx} = 0$, $\sigma_{xy} = 0$.



Pregunta 1: Notacion (E, ν)

a) Escriba las deformaciones ε_{xx} y ε_{yy} en funcion de σ_{yy}, E y ν.

b) Verifique que $\varepsilon_{xx} = -\nu\ \varepsilon_{yy}$. Interprete fisicamente el signo.

Pregunta 2: Notacion (λ, μ)

a) Partiendo de la ley de Hooke generalizada, escriba las dos ecuaciones para $\sigma_{xx} = 0$ y σ_{yy}.

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\varepsilon_{kk} + 2\mu\,\varepsilon_{ij}$$

b) De la ecuacion $\sigma_{xx} = 0$, despeje ε_{xx} en funcion de ε_{yy}, λ y μ.

c) Sustituya en la ecuacion de σ_{yy} para obtener $\sigma_{yy} = f(\varepsilon_{yy}, \lambda, \mu)$.

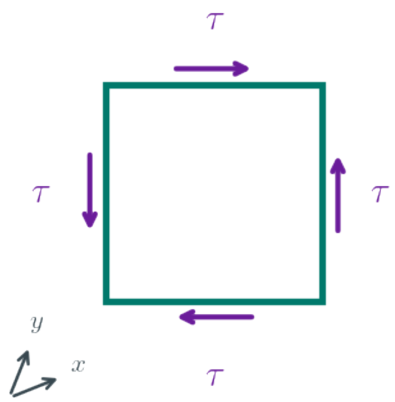
d) Comparando con $\sigma_{yy} = E\ \varepsilon_{yy}$, obtenga la expresion de E en funcion de λ y μ.

e) Comparando $\varepsilon_{xx}/\varepsilon_{yy}$ con $-\nu$, obtenga la expresion de ν en funcion de λ y μ.

Indicacion: estas dos relaciones son fundamentales y aparecen en toda la mecanica de medios continuos.

Parte II: Cizalla pura

Se aplica un estado de cizalla pura: $\sigma_{xy} = \tau$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$.



$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$

Pregunta 3: Deformacion de cizalla

a) Usando la notacion (λ, μ), calcule ε_{xy}. El parametro λ interviene?

b) Usando la notacion (E, ν), obtenga el mismo resultado. Verifique que:

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\tau}{2\mu} = \frac{\tau(1+\nu)}{E}$$

c) Calcule las deformaciones normales ε_{xx} y ε_{yy}. Hay cambio de volumen?

Pregunta 4: Direcciones principales

a) Escriba el tensor de esfuerzos en forma matricial 2D.

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 0 & \tau \\ \tau & 0 \end{pmatrix}$$

b) Diagonalice el tensor. Cuales son los esfuerzos principales σ_1 y σ_2?

c) Cual es el angulo θ entre el sistema (x,y) y las direcciones principales?

d) Interprete geometricamente: la cizalla pura es equivalente a que tipo de carga en las direcciones principales?

Indicacion: los valores propios de la matriz [[0,τ],[τ,0]] son $\pm\tau$.

Parte III: Deformaciones volumetricas

La deformacion volumetrica (dilatacion) se define como la traza del tensor de deformaciones:

$$\Delta = \mathrm{tr}(\varepsilon) = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

En esta parte se comparan varios estados de carga para estudiar sistematicamente el cambio de volumen.

Pregunta 5: Compresion uniaxial 2D

Usando los resultados de la Parte I (compresion uniaxial 2D), calcule la deformacion volumetrica $\Delta_{2D} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}$ en funcion de σ_{yy}, E y ν. Para que valor de ν el volumen se conserva?

Pregunta 6: Compresion uniaxial en 3D

Retomamos el caso de la Parte I, pero ahora en 3D: $\sigma_{yy} \neq 0$, $\sigma_{xx} = \sigma_{zz} = 0$.

a) Usando la ley de Hooke inversa, escriba las tres deformaciones ε_{xx}, ε_{yy} y ε_{zz}.

b) Calcule la dilatacion 3D:

$$\Delta_{3D} = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$$

c) Para que valor de ν el volumen se conserva? Compare con el resultado 2D de la pregunta 5. De donde viene la diferencia?

Indicacion: en 2D se ignora ε_{zz}, pero en 3D la deformacion lateral en z tambien contribuye.

Pregunta 7: Cizalla pura en 2D y 3D

a) Usando las deformaciones principales de la pregunta 4, verifique que $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 0$ (conservacion de volumen).

b) Retomando la Parte II ($\sigma_{xy} = \tau$, $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = 0$), muestre que $\Delta = 0$ tambien en 3D.

c) Explique fisicamente por que la cizalla pura no produce cambio de volumen, independientemente de la dimension.

Pregunta 8: Compresion hidrostatica

Se aplica una presion hidrostatica uniforme *P* sobre un elemento. La presion isostatica se define como:

$$p = \frac{\sigma_{kk}}{3} = \frac{\mathrm{tr}(\sigma)}{3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3}$$

En el caso hidrostatico:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -P, \qquad \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad p = -P$$

a) Calcule las tres deformaciones normales. Son iguales? Por que?

b) Muestre que la dilatacion vale:

$$\Delta = -\frac{P}{K} \qquad \text{con} \qquad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

c) Para E = 200 GPa, $\nu = 0.3$ y P = 100 MPa, calcule Δ y el cambio relativo de volumen.

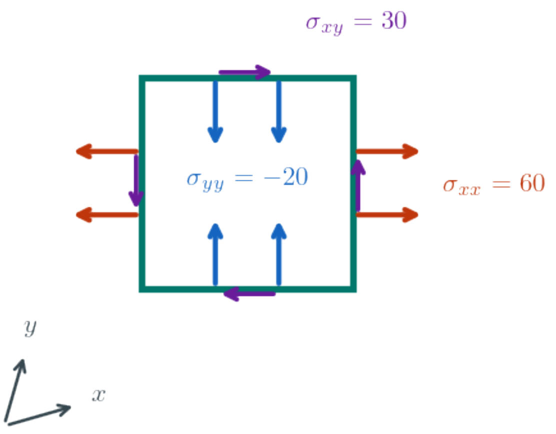
d) Que sucede cuando $\nu \to 0.5$? Interprete fisicamente. Puede ν superar 0.5 para un material isotropo estable?

Indicacion: K es el modulo de compresibilidad (bulk modulus). Un material con $K \to \infty$ es incompresible.

Parte IV: Estado general 2D y circulo de Mohr

Un elemento de material esta sometido al siguiente estado de esfuerzos (en MPa):

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} 60 & 30 \\ 30 & -20 \end{pmatrix} \qquad (\sigma_{xx} = 60,\ \sigma_{yy} = -20,\ \sigma_{xy} = 30\ \mathrm{MPa})$$



Pregunta 9: Esfuerzos principales

a) Calcule la tension media:

$$p = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

b) Calcule el radio del circulo de Mohr:

$$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \sigma_{xy}^2}$$

c) Deduzca los esfuerzos principales:

$$\sigma_1 = p + R, \qquad \sigma_2 = p - R$$

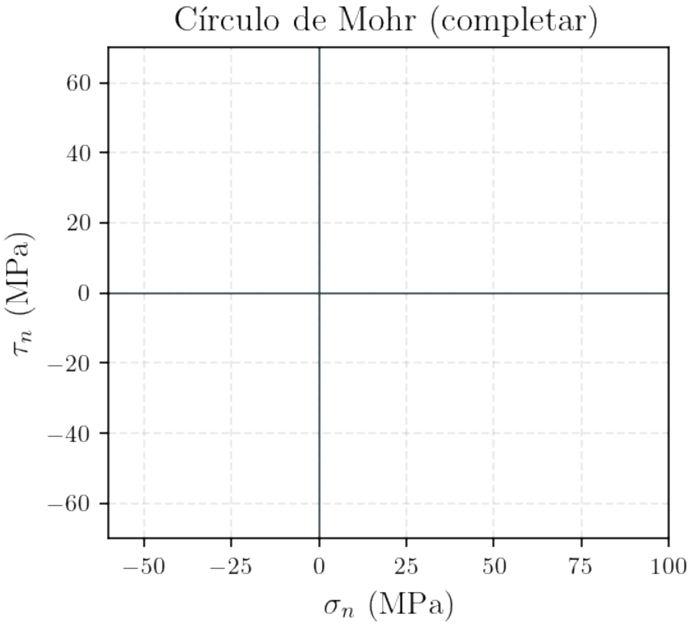
d) Calcule el angulo $2\theta_p$ tal que:

$$\tan(2\theta_p) = \frac{2\sigma_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

Deduzca θ_p.

Indicacion: θ_p es el angulo entre el eje x y la direccion principal 1.

Pregunta 10: Construccion del circulo de Mohr



a) En un grafico (σ_n, τ_n), ubique el centro C = (p, 0) y dibuje el circulo de radio R.

b) Marque los puntos A = (σ_{xx}, σ_{xy}) y B = (σ_{yy}, $-\sigma_{xy}$). Verifique que A y B estan sobre el circulo y diametralmente opuestos.

c) Ubique los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 en el circulo (intersecciones con el eje σ_n).

d) Determine el esfuerzo de corte maximo τ_{max}. En que plano ocurre (angulo respecto a la direccion principal)?

Indicacion: τ_{max} = R, y ocurre a 45° de las direcciones principales (es decir a 90° en el circulo de Mohr).

Pregunta 11: Deformaciones del caso general

a) Usando E = 200 GPa y ν = 0.3 (acero tipico), calcule las deformaciones ε_{xx}, ε_{yy} y ε_{xy} en el sistema (x,y).

b) Calcule las mismas deformaciones usando las constantes de Lame λ y μ (calcule λ y μ primero).

c) Verifique que ambos resultados coinciden.

d) Calcule las deformaciones principales ε_1 y ε_2 en las direcciones principales encontradas en la pregunta 9.

Bibliografia

• Andreotti, Forterre, Pouliquen, *Granular Media: Between Fluid and Solid*, Cambridge U. Press (2013), Cap. 3.
• Landau, Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Pergamon (1986), Cap. 1.