

Segunda evaluación corta: Temas: movimiento de proyectil, leyes de Newton del movimiento y estática

Clase de consultas generales en forma virtual: jueves de 20:15 a 21:30 por Zoom (enlace del teórico virtual)

ATENCIÓN: Se recuerda que en el Salón de Actos no se pueden ingerir alimentos ni beber bebidas o tomar mate....

13- Movimiento circular, rotación de un rígido y aplicaciones de las leyes de Newton

Movimiento circular, rotación de un rígido y otras aplicaciones de las leyes de Newton:
La segunda ley aplicada al movimiento circular, Aceleración angular y momento de inercia



REPASO DE CLASE PASADA

Movimiento Circular Uniforme (MCU): El móvil describe una trayectoria circular con rapidez constante, la aceleración es radial (**centrípeta**) siempre perpendicular a la velocidad:

$$a = a_{\text{radial}} = \frac{v^2}{R}$$

Movimiento circular no uniforme: trayectoria circular y rapidez variable, la aceleración tiene dos componentes:

- la **aceleración radial o centrífuga**, sigue valiendo lo mismo que en el uniforme, y *siempre es perpendicular* a la velocidad instantánea y dirigida al centro del círculo pero *su valor no es constante, es máxima en el punto del círculo* donde la rapidez es mayor.
- la **aceleración tangencial** a_{tan} *paralela a la velocidad instantánea* y *que es igual a la tasa de cambio de la rapidez*

$$a_{\text{radial}} = \frac{v^2}{R}$$

$$a_{\text{tangencial}} = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = \frac{dv}{dt}$$

La componente tangencial tiene el mismo sentido que la velocidad si la partícula está acelerando, y la dirección opuesta si está frenando.

REPASO DE CLASE PASADA

2da. Ley de Newton aplicada a la dirección radial en un movimiento circular uniforme:

$$F_{\text{neta}} = ma_{\text{rad}} = m \frac{v^2}{R}$$

Variables de rotación-

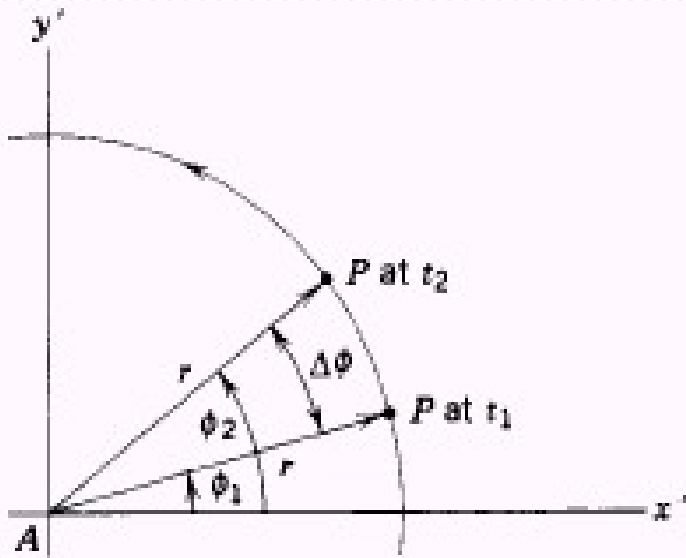
Ángulo ϕ : posición angular de la línea de referencia AP (en radianes) y con sentido positivo de rotación antihorario.

ϕ está dado en radianes por la relación:

$$\phi = \frac{s}{r}$$

Desplazamiento angular de P será

$$\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$$



Velocidad angular media:

$$\omega_{\text{media}} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

Para un cuerpo rígido tanto ω como α son únicos (valen lo mismo para cada punto).

Velocidad angular ω :

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{d\phi}{dt}$$

Aceleración angular media

$$\alpha_{\text{media}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Aceleración angular (α)

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Tabla 9.1 Comparación del movimiento lineal y angular con aceleración constante

Movimiento rectilíneo con aceleración lineal constante

Rotación sobre un eje fijo con aceleración angular constante

$$a_x = \text{constante}$$

$$\alpha_z = \text{constante}$$

$$v_x = v_{0x} + a_x t \quad (2.8)$$

$$\omega_z = \omega_{0z} + \alpha_z t \quad (9.7)$$

$$x = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \quad (2.12)$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_{0z} t + \frac{1}{2} \alpha_z t^2 \quad (9.11)$$

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0) \quad (2.13)$$

$$\omega_z^2 = \omega_{0z}^2 + 2\alpha_z(\theta - \theta_0) \quad (9.12)$$

$$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t \quad (2.14)$$

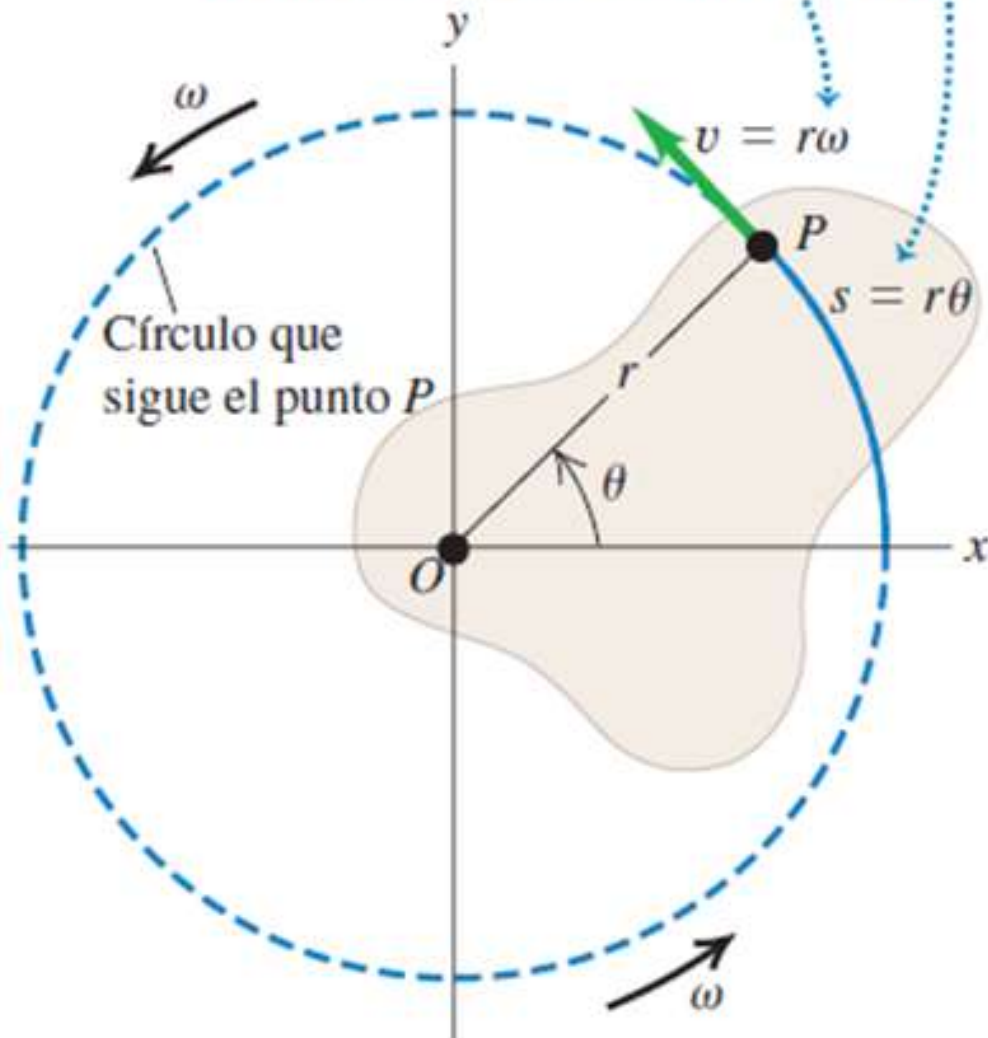
$$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_{0z} + \omega_z)t \quad (9.10)$$



Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Distancia que recorre el punto P del cuerpo (el ángulo θ está en radianes)

Rapidez lineal del punto P
(la rapidez angular ω está en rad/s)



Cuerpo rígido girando alrededor de un eje fijo que pasa por O .

Las partículas se mueven en una trayectoria circular, en un plano perpendicular al eje.

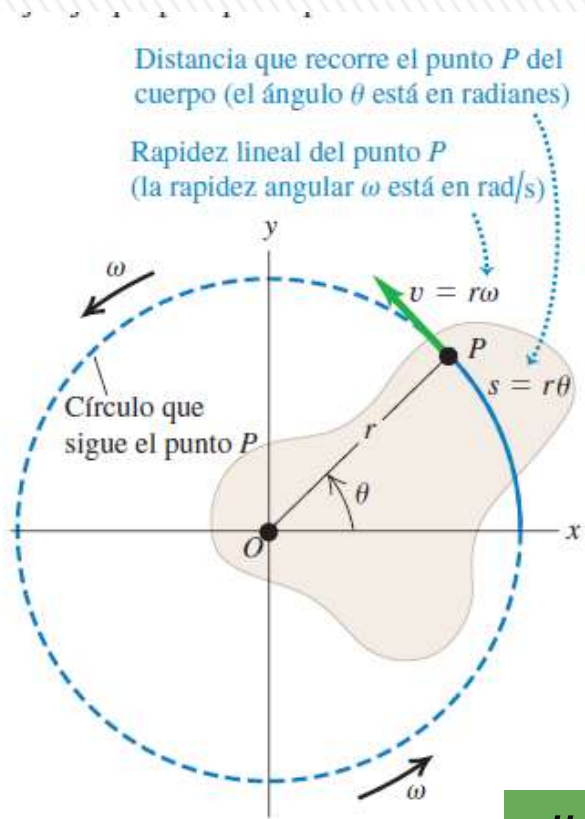
Punto P a una distancia constante r de O , describe círculo de radio r .

Ángulo θ (en radianes) y la longitud del arco s : $s = r \cdot \theta$

Derivando con respecto al tiempo (r es constante) y tomando el valor absoluto:

$$\left| \frac{ds}{dt} \right| = r \left| \frac{d\theta}{dt} \right|$$

Rapidez lineal en la rotación de un cuerpo rígido



$$v = r \omega$$

$|ds/dt|$ valor absoluto de la tasa de cambio de la longitud de arco, igual a la **rapidez lineal instantánea v de la partícula.**

$|d\theta/dt|$ valor absoluto de la razón de cambio del ángulo, **rapidez angular instantánea ω** (magnitud velocidad angular instantánea en rad/s)

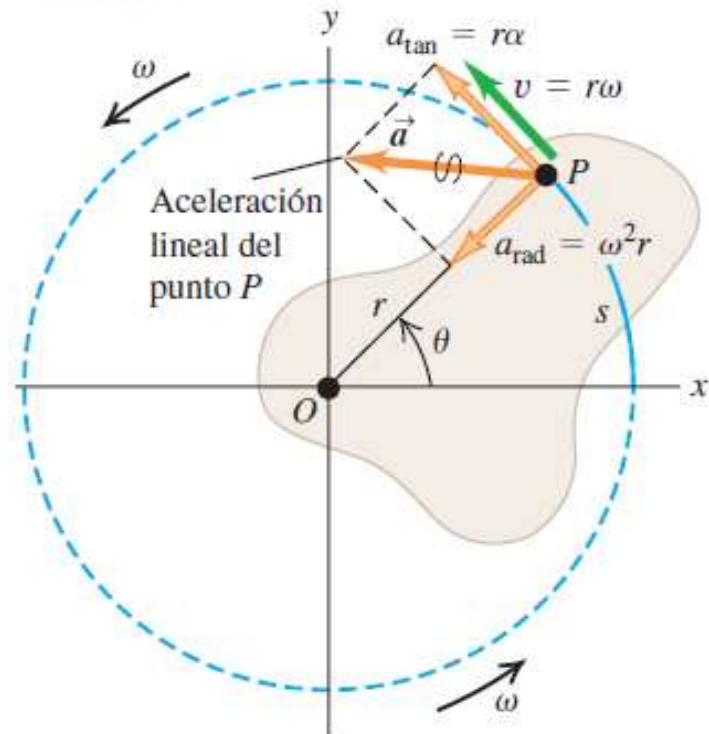
dirección del vector v : tangente a la trayectoria circular en todos los puntos

Cada punto sobre el objeto rígido tiene la misma rapidez angular, pero no todo punto tiene la misma rapidez tangencial porque r no es el mismo para todos los puntos sobre el objeto.

Aceleración lineal en la rotación de un cuerpo rígido

Componentes de aceleración radial y tangencial:

- $a_{\text{rad}} = \omega^2 r$ es la aceleración centrípeta del punto P .
- $a_{\text{tan}} = r\alpha$ significa que la rotación de P está aumentando (el cuerpo tiene aceleración angular).



Derivando respecto al tiempo: $v = r \omega$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}$$

$$a_t = r\alpha_z$$

Se vio que un punto que se mueve en una trayectoria circular tiene una **aceleración radial a_r , dirigida hacia el centro de rotación y cuya magnitud es la de la aceleración centrípeta v^2/r .**

Como $v = r \omega$, la aceleración centrípeta en dicho punto se puede expresar en términos de rapidez angular

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r \omega^2$$

$$\bar{a} = \bar{a}_t + \bar{a}_c$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} = \sqrt{(r\alpha_z)^2 + (r\omega^2)^2} = r\sqrt{\alpha_z^2 + \omega^4}$$

PREGUNTAS RÁPIDAS

Nadia y Teo viajan en una calesita. Nadia viaja en un caballo en el borde exterior de la plataforma circular, al doble de distancia del centro de la plataforma circular que Teo, quien viaja en un caballo interior.

i) **Cuando la calesita en rotación** a una rapidez angular constante, ¿cuál es la rapidez angular de Nadia?

- a) el doble de la de Teo.
- b) la misma que la de Teo,
- c) la mitad de la de Teo,
- d) imposible de determinar.

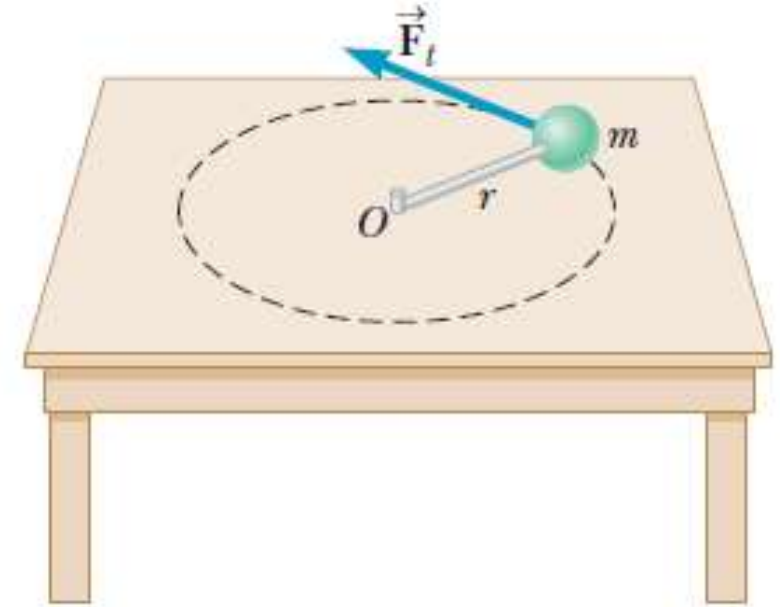
ii) **Cuando el carrusel en rotación con una rapidez angular constante**, describa la rapidez tangencial de Nadia con la misma lista de opciones.

- a) el doble de la de Teo,
- b) la misma que la de Teo,
- c) la mitad de la de Teo,
- d) imposible de determinar.



Relación entre el torque y la aceleración angular

Veremos que cuando un rígido está sujeto a un torque neto, experimenta una aceleración angular proporcional al mismo, resultado similar a la 2da. ley de Newton, pero para rotaciones.



Sistema de la figura: objeto de masa m unido a una barra muy ligera de longitud r , que gira alrededor del punto O sobre una mesa horizontal sin fricción. Supongamos que una fuerza F_t actúa perpendicularmente a la barra (tangente a la trayectoria circular del objeto).

Debido a que no hay fuerza opuesta a la fuerza tangencial, el objeto experimenta una aceleración tangencial a_t de acuerdo con la segunda ley de Newton: $m \cdot a_t = F_t$

Multiplicando ambos miembros por r : $m \cdot a_t \cdot r = F_t \cdot r$

Y ahora, sustituyendo: $a_t = \alpha \cdot r$ resulta: $m \cdot \alpha \cdot r^2 = F_t \cdot r$

Pero el 2do. miembro es el torque que actúa sobre el objeto en relación con su eje de rotación, así que se puede describir como $m \cdot \alpha \cdot r^2 = \tau$

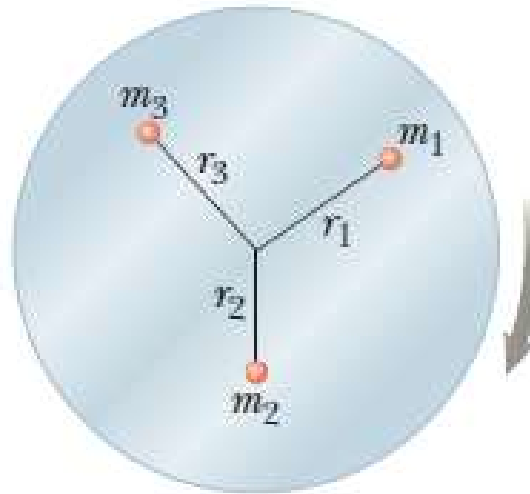
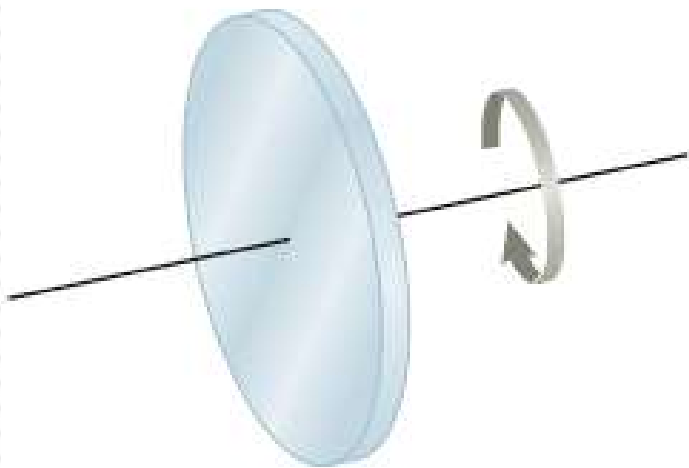
Relación entre el torque y la aceleración angular

$$m \cdot r^2 \alpha = \tau$$

$$I \cdot \alpha = \tau$$

El torque (τ) sobre el objeto es proporcional a la aceleración angular (α) de éste, donde la constante de proporcionalidad mr^2 se conoce como el **momento de inercia (I)** del objeto de masa m con respecto al punto O .

(Como la barra es muy ligera, su momento de inercia puede despreciarse).



Sea un disco sólido que rota sobre su eje como en la figura.

El disco consiste en muchas partículas a varias distancias del eje de la rotación.

El torque en cada una de estas partículas está dado por la ecuación anterior.

El torque *neto* sobre el disco está dado por la suma de los torques individuales τ_i , en todas las partículas, y etiquetando a c/u de las masas y a sus distancias con respecto al eje con un subíndice i :

$$\sum_i \tau_i = \left(\sum_i m_i \cdot r_i^2 \right) \alpha$$

Como el disco es rígido, todas sus partículas tienen la *misma aceleración angular*, así que α no está involucrada en la suma.

Relación entre el torque y la aceleración angular

$$\sum_i m_i \cdot r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots$$

Esta cantidad es el **momento de inercia, I** , de todo el cuerpo:

El momento de inercia tiene unidades SI de $\text{kg} \cdot \text{m}^2$.

Utilizando este resultado en la ecuación anterior, vemos que el torque neto sobre un cuerpo rígido en rotación alrededor de un eje fijo está dado por:

Esta ecuación indica que **la aceleración angular de un objeto rígido es proporcional al torque neto que actúa sobre él**, y es el análogo rotatorio de la 2da. Ley de Newton.

$$\sum \tau = I\alpha$$

En esta ecuación el torque sustituyendo a la fuerza, el momento de inercia que sustituye a la masa y la aceleración angular, a la aceleración lineal.

Aunque el momento de inercia de un objeto se relaciona con su masa, hay una importante diferencia entre ellos. La masa m *depende solamente de la cantidad de materia en un objeto*, mientras que el momento de la inercia, I , *depende de la cantidad de materia y de su distribución (con el término r^2 en $I = \sum mr^2$) en el objeto rígido.*



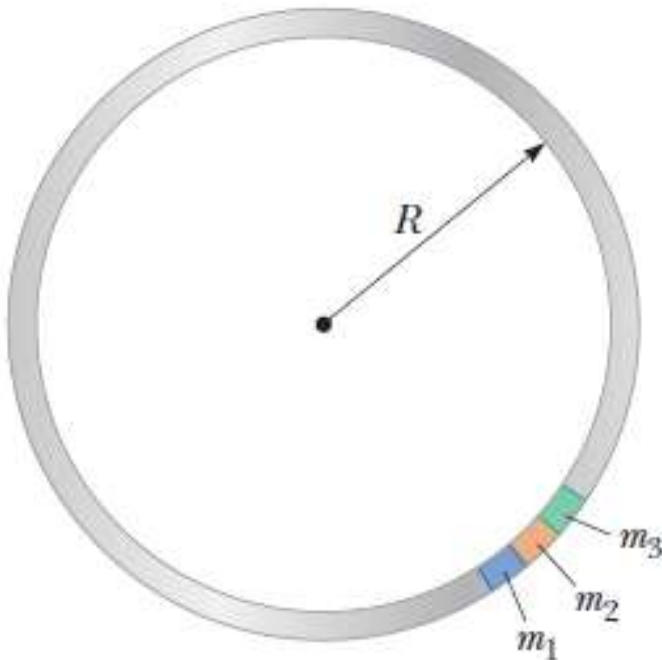
Momento de inercia

Como vimos una partícula tiene un momento de inercia igual a mr^2 en relación con un cierto eje.

El momento de inercia de un objeto compuesto sobre un cierto eje es justo la suma de los momentos de inercia de los componentes del objeto

$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots$$

La masa es una característica intrínseca del objeto y que no cambia, mientras que **el momento de inercia de un sistema depende de cómo la masa se distribuye y de la ubicación del eje respecto al cual se calcula I.**



Cuando el objeto es extendido, como una esfera o un cilindro se requieren a menudo técnicas del cálculo, a menos que una cierta simetría esté presente.

Un objeto de solución simple es un aro que rota sobre un eje perpendicular a su plano y que pasa a través de su centro (como la rueda de una bicicleta). Para evaluar el momento de inercia del aro, podemos todavía utilizar la ecuación $I = \sum mr^2$ e imaginarse que la masa del aro M está dividida en n pequeños segmentos de masas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_n$, como se ve en la figura, con $M = m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n$.

Momento de inercia

Podemos expresar I como la suma:
$$I = \sum_i m_i \cdot r_i^2 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \dots + m_n r_n^2$$

Todos los segmentos alrededor del aro están a la *misma distancia* R del eje de rotación, así que podemos usar subíndices en las distancias y factorizar R^2 para obtener

$$I = (m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n)R^2 = MR^2$$

Expresión que se puede usar para el momento de inercia de cualquier objeto de forma anular, que rota sobre un eje a través de su centro y perpendicular a su plano. Este resultado es estrictamente válido solamente si el grueso del anillo es pequeño en relación con su radio interno.

Desafortunadamente, para objetos más extensos el cálculo es más difícil porque no todos los elementos de masa están situados a la misma distancia del eje, por lo que se requieren los métodos del cálculo integral.

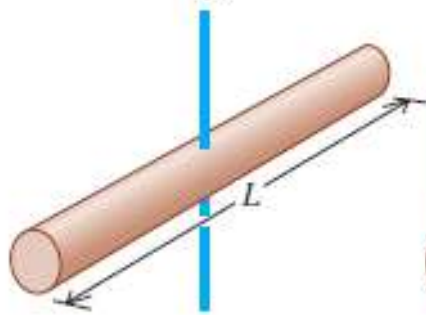
Los momentos de inercia para algunas otras formas comunes se muestran en la próxima diapositiva. Se puede utilizar esta tabla cuando necesite determinar el momento de inercia de un cuerpo que tiene las formas mencionadas.



Momentos de inercia de diversos cuerpos homogéneos

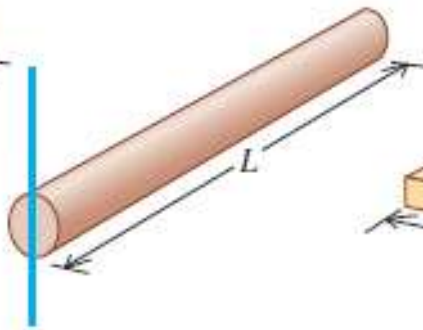
a) Varilla delgada, eje a través del centro

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$



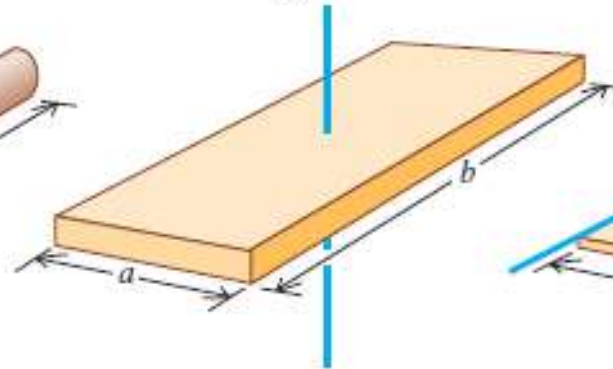
b) Varilla delgada, eje a través de un extremo

$$I = \frac{1}{3}ML^2$$



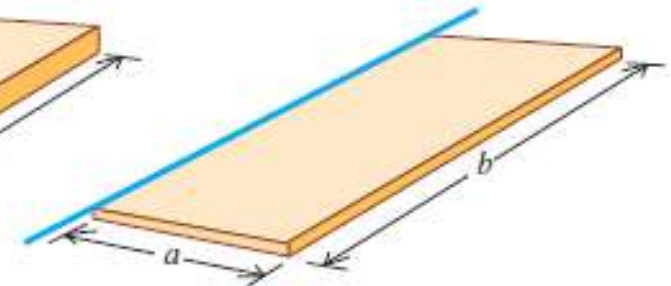
c) Placa rectangular, eje a través del centro

$$I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$$



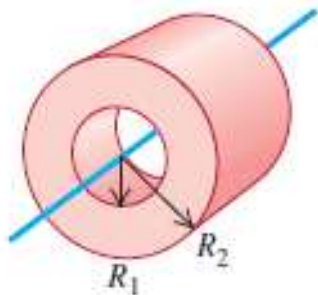
d) Placa rectangular delgada, eje a lo largo de un extremo

$$I = \frac{1}{3}Ma^2$$



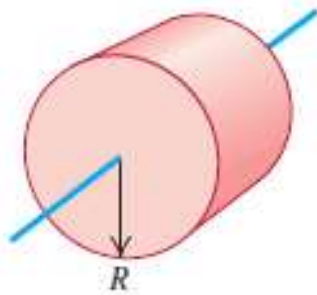
e) Cilindro hueco de pared gruesa

$$I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$$



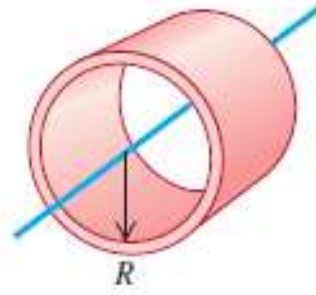
f) Cilindro sólido

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$



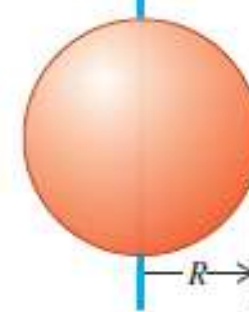
g) Cilindro hueco de pared delgada

$$I = MR^2$$



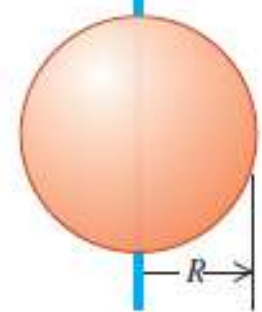
h) Esfera sólida

$$I = \frac{2}{5}MR^2$$



i) Esfera hueca de pared delgada

$$I = \frac{2}{3}MR^2$$



Ejemplo: Descenso de un balde en un pozo

Un carrete sólido cilíndrico sin fricción, de masa $M=3,00$ kg y radio $R=0,400$ m, se usa para sacar agua de un pozo. Un balde de masa $m= 2,00$ kg se ata a una cuerda ideal que se enrolla alrededor del cilindro.

- Encuentre la tensión T en la cuerda y la aceleración a del balde.
- Si el balde parte del reposo desde la boca del pozo y cae durante 3,00 s antes de golpear el agua, ¿qué distancia recorre en la caída?



Este problema involucra tres incógnitas: la aceleración a del balde, la aceleración angular α del cilindro y la tensión T en la cuerda, por lo que debemos establecer tres ecuaciones:

- la segunda ley de Newton aplicada al balde, $ma = \Sigma F$;
- la versión rotatoria de la segunda ley aplicada al cilindro: $I\alpha = \Sigma \tau$, y
- la relación entre las aceleraciones lineal y angular, $a = r\alpha$, que conecta las dinámicas del balde y del cilindro.

El inciso b) es una revisión de cinemática.

Comencemos realizando los DCL del balde y del carrete

Ejemplo: Descenso de un balde en un aljibe



Como el balde está cayendo, la aceleración a es hacia abajo.

Entonces voy a escribir la 2da. Ley de Newton, según el eje vertical, y considerando en sentido positivo hacia abajo:

$$m \cdot a = m \cdot g - T \quad (1)$$

El carrete se encuentra en equilibrio de traslación: la fuerza n equilibra la otras dos fuerzas actuantes: su peso Mg y la tensión T que le ejerce el balde a través de la cuerda.

Por tanto el carrete sólo puede rotar. Por lo que aplicamos *la versión rotatoria* de la segunda ley aplicada al cilindro: $I\alpha = \Sigma\tau$

En este caso, la única fuerza que realiza torque, es la tensión T con un brazo de palanca igual a R :

$$I\alpha = T \cdot R$$

Ahora sustituimos: $\alpha = a/R$ y el valor de I correspondiente a un cilindro macizo ($MR^2/2$)

$$\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\frac{a}{R} = T \cdot R \quad \frac{1}{2}Ma = T \quad (2)$$

Sustituyen T en (1) y operando:

$$ma = mg - \frac{1}{2}Ma \quad \left(m + \frac{1}{2}M\right)a = mg$$

$$a = \frac{m}{m + \frac{1}{2}M}g$$

Ejemplo: Descenso de un balde en un aljibe

$$a = \frac{m}{m + \frac{1}{2}M} g = \frac{2,00}{2,00 + \frac{1}{2}(3,00)} 9,80 = 5,60 \text{ m/s}^2$$

$$T = \frac{1}{2}Ma = \frac{1}{2}(3,00)(5,60) = 8,40 \text{ N}$$

b) Para determinar el desplazamiento del balde al cabo de 3,00 segundos de caída, aplico la expresión del desplazamiento para una aceleración constante; teniendo en cuenta que la velocidad inicial es nula.

$$\Delta y = v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(5,60 \text{ m/s}^2)(3,00 \text{ s})^2 = 25,2 \text{ m}$$

