Facultad de Ciencias.
Matemática Discreta 2020

Práctico 6: Grafos

1. Se considera el conjunto $V = \{1, 2, 3, 4\}$ y el subconjunto E dado por $\{x, y\} \in E$ si y sólo si $x - y$ es un entero par no nulo. Representarlo.

2. *a*) Contar la cantidad de aristas que tiene un grafo completo K_n y un grafo bipartito $K_{n,m}$.

   b) El grafo A_n se define como (V, E) donde $V = \{1, \ldots, n\}$ y E es el menor subconjunto entre los que contienen a $\{i, i + 1\}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n - 1\}$.

   (i) Representar A_4.

   (ii) ¿Cuántas aristas tiene A_n?

   c) El grafo C_n se define como (V, E) donde $V = \{1, \ldots, n\}$ y E es el menor subconjunto que contiene a $\{i, i + 1\}$ para todo $i \in \{1, \ldots, n - 1\}$ y a $\{n, 1\}$.

   (i) Representar C_4.

   (ii) ¿Cuántas aristas tiene C_n?

   d) El grafo de *Petersen* P es el de la Figura 1.

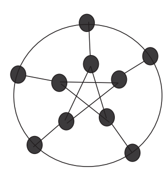


Figura 1: Grafo de Petersen

   (i) ¿Cuántas aristas tiene P?

   (ii) Observar que por todos los vértices pasan la misma cantidad de aristas.

3. Hallar los complementos de los grafos del ejercicio 2.

4. Observar que si G y G' son isomorfos bajo $f : G \to G'$, entonces G y G' tienen la misma cantidad de vértices y la misma cantidad de aristas y además $gr_G(v) = gr_{G'} f(v)$ para todo vértice v. Que sucede en el caso de los grafos dirigidos?

5. Un grafo es *regular* si todos los vértices tienen el mismo grado. Averiguar cuáles de los grafos de del ejercicio 2 son regulares.

6. Probar que un grafo bipartito no puede tener ciclos de largo impar.

7. Dado un grafo $G = (V, E)$ se define la relación en V "estar conectado a" como sigue: v está conectado a w si existe un camino entre v y w.

   a) Observar que se trata de una relación de equivalencia.

   b) Observar que G es conexo si y sólo si hay una única clase de equivalencia.

   c) Probar que la componente conexa de un vértice x de un grafo es el máximo subgrafo conexo que contiene a x.

8. Sea G un grafo k-regular con n vértices (es decir que cada vértice tiene grado k). Probar que su complemento es k'-regular para cierto natural k'.

9. En una clase con 9 alumnos, cada alumno le manda 3 tarjetas de navidad a otros 3. ¿Es posible que cada alumno reciba tarjetas de los mismos 3 compañeros a los cuales él le mando una?

10. *a*) Sea G un grafo con n vértices con un solo vértice de grado par. ¿Qué se puede afirmar sobre la paridad de n?

    b) Construir un grafo con n vértices para cualquier n impar, que tenga un solo vértice de grado par y al menos dos vértices de grado $n - 2$. Se sugiere trabajar por recurrencia en n impar.

11. *a*) ¿Cuál es el máximo número de vértices posible para un grafo con 17 aristas si todos sus vértices tienen grado mayor o igual a 3?

    b) ¿Existe algún grafo con dicha cantidad de vértices? En caso afirmativo, construirlo.

12. Observar que $K_{2,2}$ y C_4 son isomorfos entre sí pero no son isomorfos a K_4.

13. Representar el grafo $K_{2,3}$ y determinar los posibles subgrafos inducidos por subconjuntos de 3 vértices.

14. Para el grafo de la Figura 2, determinar:

    a) Un camino $b - \cdots - d$ que no sea un recorrido.

    b) Un recorrido $b - \cdots - d$ que no sea simple.

    c) Un camino simple $b - \cdots - d$.

    d) Un camino cerrado $b - \cdots - b$ que no sea un circuito.

    e) Un circuito $b - \cdots - b$ que no sea ciclo.

    f) Todos los ciclos $b - \cdots - b$.

    g) Todos los caminos simples $b - \cdots - f$.

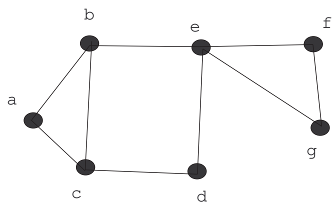
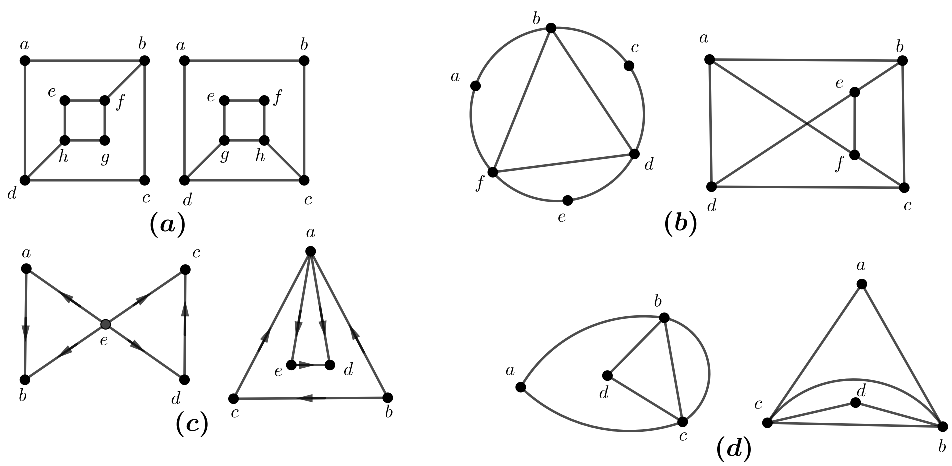


Figura 2

15. Para cada par de grafos (o grafos dirigido o multigrafos) de la siguiente figura determinar si los grafos son o no isomorfos.



16. Determinar si se cumple o no que:

    a) K_4 contiene un camino que no es un recorrido.

    b) K_4 contiene un recorrido que no es ni un circuito ni es camino simple.

    c) K_4 contiene un circuito que no es ciclo.

17. Investigar la existencia de recorridos y circuitos Eulerianos para la Figura 3.

18. Averiguar cuáles de los grafos de los ejercicios 2 y 15 tienen un camino o ciclo Hamiltoniano.

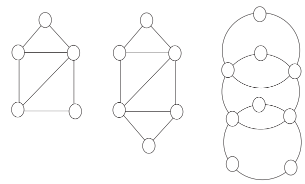


Figura 3

19. Probar que si $G = (V, E)$ es un grafo sin lazos con $\#V \geq 3$ y $\#E \geq C_2^{n-1} + 2$, entones G admite un ciclo Hamiltoniano.

20. Consideremos un grupo de 20 personas. Sabemos que cada una conoce por lo menos a 10 de las demás. Probar que es posible formar en círculo de tal manera que cada persona conozca a quien está a su derecha y a quien está a su izquierda.

21. ¿Es cierto que todo grafo dirigido de tipo torneo admite un ciclo Hamiltoniano?

Ejercicios complementarios.

22. El objetivo de este ejercicio es probar que existe una cantidad numerable de clases de isomorfismo de grafos.

    a) Probar que si X es un conjunto numerable, entonces el conjunto de partes finitas

    $$\mathcal{P}_F(X) = \{A \subset X : A \text{ es finito}\}.$$

    Sugerencia: Revisar los ejercicios del práctico 3.

    b) Consideramos $\mathcal{G}(\mathbb{N})$ el conjunto de grafos que tienen vértices en el conjunto $\mathbb{N}$. Porbar que dado un grafo cualquiera G, existe un grafo $G' \in \mathcal{G}(\mathbb{N})$ que es isomorfo a G.

    c) Probar que $\mathcal{G}(\mathbb{N})$ es numerable. Sugerencia: tratar de verlo como un subconjunto de un conjunto construido a partir de partes finitas de conjuntos numerables.

    d) Si $\cong$ es la relación de isomorfismo en $\mathcal{G}(\mathbb{N})$, entonces $\mathcal{G}(\mathbb{N})/\cong$ es numerable. Observar que este puede verse como el conjunto de clases de isomorfismos de grafos.

    e) El conjunto de clases de isomorfismo de multigrafos, ¿es también numerable?

Quinta entrega: se pide entregar el ejercicio 6 antes del 13 de julio.