Segundo parcial Ciencias Planetarias 2026. Resolucion segun Gemini con *comentarios/correcciones en italica.*

PROBLEMA 1

Para resolver el problema, relacionamos la escala de altura de la atmósfera (H) con el radio del asteroide (R) a través de la gravedad superficial (g).

1. Cálculo del radio mínimo del asteroide

La escala de altura de una atmósfera isotérmica viene dada por la expresión:

$$H = \frac{k_B T}{\mu m_H g} \tag{1}$$

Donde:

- $k_B = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1} (Constante de Boltzmann)
- $T = 280$ K
- $\mu = 18$ (Masa molecular del agua, H_2O)
- $m_H = 1.67 \times 10^{-27}$ kg (Masa del átomo de hidrógeno)

La masa de la molécula de agua es $m = \mu m_H \approx 3.006 \times 10^{-26}$ kg.

Asumiendo un asteroide esférico de densidad uniforme $\rho = 2700$ kg m^{-3}, la gravedad en su superficie es:

$$g = \frac{GM}{R^2} = \frac{G}{R^2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3 \rho\right) = \frac{4}{3}\pi G\rho R \tag{2}$$

Sustituyendo g en la ecuación de la escala de altura:

$$H = \frac{k_B T}{m\left(\frac{4}{3}\pi G\rho R\right)} = \frac{3k_B T}{4\pi m G\rho R} \tag{3}$$

El enunciado impone la condición de que la escala de altura sea menor que un décimo del radio del cuerpo ($H < R/10$):

$$\frac{3k_B T}{4\pi m G\rho R} < \frac{R}{10} \tag{4}$$

Despejando R^2:

$$R^2 > \frac{30 k_B T}{4\pi m G\rho} \tag{5}$$

Sustituyendo los valores numéricos correspondientes, con $G = 6.674 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}:

$$R^2 > \frac{30 \times (1.38 \times 10^{-23}) \times 280}{4\pi \times (3.006 \times 10^{-26}) \times (6.674 \times 10^{-11}) \times 2700} \tag{6}$$

$$R^2 > \frac{1.1592 \times 10^{-19}}{6.812 \times 10^{-32}} \approx 1.7016 \times 10^{12} \text{ m}^2 \tag{7}$$

$$R > 1.304 \times 10^6 \text{ m} \tag{8}$$

El radio mínimo del asteroide debe ser de aproximadamente 1304 **km**.

2. Estimación de la masa de la atmósfera

Dado que la escala de altura es pequeña comparada con el radio del cuerpo ($H < R/10 \approx 130$ km), aproximamos la atmósfera como una capa delgada sobre la superficie esférica.

La densidad de la atmósfera decae exponencialmente con la altura z:

$$\rho_a(z) = \rho_0 e^{-z/H} \tag{9}$$

Donde $\rho_0 \sim 1$ kg m^{-3} es la densidad superficial. La masa total de la atmósfera se obtiene integrando esta densidad en volumen sobre la capa delgada:

$$M_{\text{atm}} \approx 4\pi R^2 \int_0^\infty \rho_0 e^{-z/H} dz = 4\pi R^2 \rho_0 H \tag{10}$$

Utilizando el valor límite superior para la escala de altura dado por la condición crítica ($H = R/10 \approx 1.304 \times 10^5$ m):

$$M_{\text{atm}} \approx 4\pi \times (1.304 \times 10^6 \text{ m})^2 \times 1 \text{ kg m}^{-3} \times (1.304 \times 10^5 \text{ m}) \tag{11}$$

$$M_{\text{atm}} \approx 4\pi \times (1.7016 \times 10^{12}) \times (1.304 \times 10^5) \tag{12}$$

$$M_{\text{atm}} \approx 2.79 \times 10^{18} \text{ kg} \tag{13}$$

La masa estimada para esta atmósfera de vapor de agua bajo las condiciones límite es de aproximadamente 2.8×10^{18} **kg**.

> ***IMPORTANTE:*** *esta no es la unica forma de estimar la masa de atmosfera, tambien podemos usar el criterio* $P = M_{atm}g/Superficie$ *o tambien usando la densidad integrada. Lo importante es que todas las alternativas conducen a* $M_{atm} \approx 4\pi R^2 \rho_0 H$.

PROBLEMA 2

Para resolver el problema, relacionamos la distribución cumulativa de cráteres con la tasa de producción de los mismos a lo largo del tiempo.

1. Interpretación de la ley de distribución

La función $N(R)$ representa el número total de cráteres por unidad de área con un radio mayor o igual que R:

$$N(R) = CR^{-2.5} \tag{14}$$

Dado que la superficie ha estado expuesta a un flujo continuo de proyectiles durante un tiempo total de $T_{\text{total}} = 4500 \times 10^6$ años, la cantidad total de cráteres de un tamaño dado es directamente proporcional al tiempo de exposición (asumiendo una tasa constante).

Por lo tanto, la frecuencia o tasa con la que se forman los cráteres con radio mayor o igual a R (número de cráteres por unidad de tiempo), denotada como $\dot{N}(R)$, sigue la misma dependencia con el radio:

$$\dot{N}(R) \propto R^{-2.5} \tag{15}$$

Esto implica que para dos radios distintos, R_1 y R_2, la relación entre el número de cráteres acumulados en un mismo intervalo de tiempo es:

$$\frac{N(R_1)}{N(R_2)} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{-2.5} \tag{16}$$

2. Relación con los intervalos de tiempo promedio

El tiempo promedio entre impactos (período de retorno) $\tau(R)$ para cráteres de radio mayor o igual que R es inversamente proporcional a la tasa de producción $\dot{N}(R)$. Es decir, a mayor abundancia de cráteres, menor es el tiempo de espera entre eventos:

$$\tau(R) \propto \frac{1}{N(R)} \propto R^{2.5} \tag{17}$$

Estableciendo la proporción para dos radios distintos R_1 y R_2:

$$\frac{\tau(R_1)}{\tau(R_2)} = \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2.5} \tag{18}$$

3. Cálculo del tiempo promedio para $R = 1$ km

Disponemos de los siguientes datos del problema:

- $R_2 = 100$ km
- $\tau(R_2) = 100 \times 10^6$ años (frecuencia de un cráter cada 100 millones de años)
- $R_1 = 1$ km

Queremos hallar el intervalo de tiempo promedio $\tau(R_1)$. Despejando de la relación anterior:

$$\tau(R_1) = \tau(R_2)\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{2.5} \tag{19}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$\tau(1\ \text{km}) = (100 \times 10^6\ \text{años}) \times \left(\frac{1}{100}\right)^{2.5} \tag{20}$$

Operando con la potencia del término adimensional:

$$\left(\frac{1}{100}\right)^{2.5} = (10^{-2})^{2.5} = 10^{-5} = \frac{1}{100\,000} \tag{21}$$

Calculamos el tiempo de retorno final:

$$\tau(1\ \text{km}) = \frac{100 \times 10^6\ \text{años}}{100\,000} = 1000\ \text{años} \tag{22}$$

Resultado

En promedio, se forma un cráter de 1 km o más de radio cada 1000 **años**.

PROBLEMA 3

Para resolver este problema, primero determinamos la estructura del modelo de dos capas (manto y núcleo) para conocer cómo varía la gravedad con la profundidad y, posteriormente, integramos la ecuación de equilibrio hidrostático para hallar la presión a 1000 km de profundidad.

1. Determinación de la estructura del modelo (Manto y Núcleo)

Definimos los parámetros del problema en el Sistema Internacional (SI):

- Radio terrestre: $R_\oplus = 6.37 \times 10^6$ m
- Masa terrestre: $M_\oplus = 6.0 \times 10^{24}$ kg
- Densidad del manto: $\rho_m = 5000$ kg m^{-3}
- Profundidad solicitada: $d = 10^6$ m (lo que corresponde a un radio interno $r_1 = R_\oplus - d = 5.37 \times 10^6$ m)

Dado que la profundidad solicitada (1000 km) se encuentra dentro del manto, podemos deducir la masa encerrada a una distancia r del centro ($r > R_{\text{núcleo}}$) utilizando únicamente la densidad del manto y los valores globales de la Tierra.

Para cualquier radio r dentro del manto, la masa encerrada $M(r)$ es la masa total de la Tierra menos la masa de la cáscara esférica del manto que se encuentra por encima de dicho radio:

$$M(r) = M_\oplus - \int_r^{R_\oplus} 4\pi r'^2 \rho_m dr' \tag{23}$$

$$M(r) = M_\oplus - \frac{4}{3}\pi\rho_m(R_\oplus^3 - r^3) \tag{24}$$

2. La gravedad en función del radio en el manto

La aceleración de la gravedad a una distancia r del centro dentro del manto viene dada por la ley de la gravitación de Newton:

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2} = \frac{G}{r^2}\left[M_\oplus - \frac{4}{3}\pi\rho_m R_\oplus^3\right] + \frac{4}{3}\pi G\rho_m r \tag{25}$$

Para simplificar la expresión, agrupamos los términos constantes definiendo una masa ficticia M_0:

$$M_0 = M_\oplus - \frac{4}{3}\pi\rho_m R_\oplus^3 \tag{26}$$

Sustituyendo los valores numéricos con $G = 6.674 \times 10^{-11}$ m^3 kg^{-1} s^{-2}:

$$\frac{4}{3}\pi\rho_m R_\oplus^3 = \frac{4}{3}\pi \times 5000 \times (6.37 \times 10^6)^3 \approx 5.414 \times 10^{24} \text{ kg} \tag{27}$$

$$M_0 = 6.0 \times 10^{24} - 5.414 \times 10^{24} = 0.586 \times 10^{24} \text{ kg} \tag{28}$$

Por lo tanto, la aceleración de la gravedad en el manto se comporta de la forma:

$$g(r) = \frac{GM_0}{r^2} + Br \tag{29}$$

Donde la constante B asociada al término lineal es:

$$B = \frac{4}{3}\pi G\rho_m = \frac{4}{3}\pi \times (6.674 \times 10^{-11}) \times 5000 \approx 1.398 \times 10^{-6} \text{ s}^{-2} \tag{30}$$

3. Integración de la ecuación de equilibrio hidrostático

La ecuación de equilibrio hidrostático relaciona el diferencial de presión con el radio:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho_m g(r) \tag{31}$$

Integrando desde la superficie ($r = R_\oplus$), donde asumimos una presión nula ($P = 0$), hasta el radio de interés ($r_1 = R_\oplus - d$):

$$\int_0^P dP = -\rho_m \int_{R_\oplus}^{r_1} g(r)dr = \rho_m \int_{r_1}^{R_\oplus} \left(\frac{GM_0}{r^2} + Br\right) dr \tag{32}$$

$$P = \rho_m \left[-\frac{GM_0}{r} + \frac{1}{2} B r^2 \right]_{r_1}^{R_\oplus} \tag{33}$$

$$P = \rho_m \left[GM_0 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{R_\oplus} \right) + \frac{1}{2} B \left(R_\oplus^2 - r_1^2 \right) \right] \tag{34}$$

4. Cálculo numérico

Evaluamos por separado los dos términos encerrados en el corchete para $r_1 = 5.37 \times 10^6$ m y $R_\oplus = 6.37 \times 10^6$ m:

- **Primer término (masa central efectiva):**

$$GM_0 = (6.674 \times 10^{-11}) \times (0.586 \times 10^{24}) \approx 3.911 \times 10^{13} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \tag{35}$$

$$\left(\frac{1}{5.37 \times 10^6} - \frac{1}{6.37 \times 10^6} \right) \approx 2.924 \times 10^{-8} \text{ m}^{-1} \tag{36}$$

$$\text{Término}_1 = (3.911 \times 10^{13}) \times (2.924 \times 10^{-8}) \approx 1.144 \times 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \tag{37}$$

- **Segundo término (distribución del manto):**

$$R_\oplus^2 - r_1^2 = (6.37 \times 10^6)^2 - (5.37 \times 10^6)^2 \approx 1.174 \times 10^{13} \text{ m}^2 \tag{38}$$

$$\text{Término}_2 = \frac{1}{2} \times (1.398 \times 10^{-6}) \times (1.174 \times 10^{13}) \approx 8.206 \times 10^6 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2} \tag{39}$$

Sumando ambas contribuciones y multiplicando por la densidad del manto ρ_m:

$$P = 5000 \times \left(1.144 \times 10^6 + 8.206 \times 10^6\right) \tag{40}$$

$$P = 5000 \times (9.350 \times 10^6) \approx 4.675 \times 10^{10} \text{ Pa} \tag{41}$$

Resultado

La presión a una profundidad de 1000 km bajo las condiciones de este modelo es de aproximadamente 4.68×10^{10} **Pa** (o 46.8 **GPa**).

Si vamos a la figura 6.16 de las notas veremos que este valor es muy proximo al real.

PROBLEMA 4

Para resolver el problema, vinculamos el exceso de energía radiada por el planeta con la liberación de energía potencial gravitatoria debida a su contracción adiabática lenta (mecanismo de Kelvin-Helmholtz).

1. El exceso de luminosidad (L_{exc})

La luminosidad total emitida por el planeta debido a su temperatura efectiva T_{ef} viene dada por:

$$L_{\text{emitida}} = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{ef}}^4 \tag{42}$$

Por otro lado, la luminosidad que el planeta absorbe y reirradia de la estrella (asociada a su temperatura de equilibrio T_{eq}) es:

$$L_{\text{abs}} = 4\pi R^2 \sigma T_{\text{eq}}^4 \tag{43}$$

El exceso de luminosidad (L_{exc}), que proviene puramente de su fuente de energía interna debido a la contracción, es la diferencia entre ambas:

$$L_{\text{exc}} = L_{\text{emitida}} - L_{\text{abs}} = 4\pi R^2 \sigma \left(T_{\text{ef}}^4 - T_{\text{eq}}^4\right) \tag{44}$$

Definimos los parámetros en el Sistema Internacional (SI):

- Radio del planeta (R): 80 000 km $= 8 \times 10^7$ m
- Masa del planeta (M): 2×10^{27} kg
- Temperatura efectiva (T_{ef}): 230 K
- Temperatura de equilibrio (T_{eq}): 180 K
- Constante de Stefan-Boltzmann (σ): 5.670×10^{-8} W m^{-2} K^{-4}

Calculamos numéricamente el exceso de energía radiada por unidad de tiempo:

$$L_{\text{exc}} = 4\pi \times (8 \times 10^7)^2 \times (5.670 \times 10^{-8}) \times \left(230^4 - 180^4\right) \tag{45}$$

$$L_{\text{exc}} = 4\pi \times (6.4 \times 10^{15}) \times (5.670 \times 10^{-8}) \times \left(2.798 \times 10^9 - 1.050 \times 10^9\right) \tag{46}$$

$$L_{\text{exc}} = (4.560 \times 10^9) \times (1.748 \times 10^9) \approx 7.971 \times 10^{18} \text{ W} \tag{47}$$

2. Energía potencial gravitatoria y tasa de contracción

La energía potencial gravitatoria de una esfera de densidad uniforme es:

$$E_g = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \tag{48}$$

Si el planeta experimenta una contracción infinitesimal dR, la variación de su energía gravitatoria es:

$$\frac{dE_g}{dR} = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R^2} \implies dE_g = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R^2}dR \tag{49}$$

Cuidado con lo que sigue sobre el Teorema del Virial. No siempre es estrictamente asi. Esto se aplica a esferas de gas que pierden calor, presion y en consecuencia se contraen. Un planeta como Jupiter se contrae no porque se enfria sino porque en su interior se decanta el He, se redistribuye su masa interna, cambia la energia potencial, liberandose energia. Bueno, al menos esto es lo que se piensa. A los efectos del problema esta bien usar cualquier camino.

Por el **Teorema del Virial** aplicado a un gas ideal en equilibrio hidrostático, la mitad de la energía potencial liberada se convierte en energía térmica interna y la otra mitad se irradia al espacio en forma de luminosidad interna (L_{exc}). Por lo tanto:

$$L_{\text{exc}} = -\frac{1}{2}\frac{dE_g}{dt} = -\frac{3}{10}\frac{GM^2}{R^2}\frac{dR}{dt} \tag{50}$$

Donde el signo negativo indica la disminución del radio temporal. Tomando el valor absoluto para la tasa de contracción lineal, $\dot{R} = \left|\frac{dR}{dt}\right|$:

$$\dot{R} = \frac{10R^2 L_{\text{exc}}}{3GM^2} \tag{51}$$

3. Cálculo numérico de la reducción anual

Sustituyendo las constantes físicas pertinentes ($G = 6.674\times10^{-11}\ \text{m}^3\ \text{kg}^{-1}\ \text{s}^{-2}$):

$$\dot{R} = \frac{10 \times (8 \times 10^7)^2 \times (7.971 \times 10^{18})}{3 \times (6.674 \times 10^{-11}) \times (2 \times 10^{27})^2} \tag{52}$$

$$\dot{R} = \frac{10 \times (6.4 \times 10^{15}) \times (7.971 \times 10^{18})}{3 \times (6.674 \times 10^{-11}) \times (4 \times 10^{54})} \tag{53}$$

$$\dot{R} = \frac{5.101 \times 10^{35}}{8.009 \times 10^{44}} \approx 6.369 \times 10^{-10}\ \text{m s}^{-1} \tag{54}$$

Para expresar esta variación en metros por año, multiplicamos por la duración de un año sideral medio en segundos (1 año $\approx 3.156 \times 10^7$ s):

$$\Delta R_{\text{año}} = (6.369 \times 10^{-10}\ \text{m s}^{-1}) \times (3.156 \times 10^7\ \text{s a}^{-1}) \approx 0.0201\ \text{m a}^{-1} \tag{55}$$

Resultado

El radio del planeta gigante gaseoso se reduce aproximadamente 2.01 **cm por año** debido a los efectos de su contracción gravitacional.

Sin el factor 2 el resultado es 1 cm por año.