¡Sobre la utilidad de la ciencia!

– ¿Hay algún doctor?

– Yo.

– ¿Cuál es su especialidad?

– Doctor en Matemáticas.

– Doctor, mi amigo se muere.

– Uno menos.

Probabilidad - Clase 25
Esperanza matemática de una variable aleatoria

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020

Contenidos

- Consideremos un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$
- una variable aleatoria

$$X = X(\omega), \ \omega \in \Omega.$$

- Vamos a intentar representar a la variable X mediante un **número real**, que llamamos **esperanza matemática** de X
- Este número se denota mediante $\mathbf{E}\, X$ (o $\mathbf{E}(X)$ en caso de ser necesario)
- También se llama **esperanza**, **valor esperado.**

Esperanza matemática para variables discretas

Consideremos una variable aleatoria X con distribución discreta, que toma los valores $x_1, x_2, \ldots$ con probabilidades $p_1, p_2 \ldots$ respectivamente. Sea $g(x)$ una función continua. Entonces

$$\mathbf{E}\, g(X) = \sum_k g(x_k) p_k, \tag{1}$$

donde la esperanza existe si la serie anterior es absolutamente convergente, es decir, si $\sum_k |g(x_k)| p_k < \infty$.

Caso uniforme discreto

En el caso particular en el que $g(x) = x$ para todo x real, obtenemos

$$\mathbf{E}\, X = \sum_k x_k p_k, \tag{2}$$

si la serie anterior es absolutamente convergente.
Si X toma únicamente una cantidad finita de valores

$$x_1, \dots, x_m,$$

existe su esperanza matemática, dado que en (2) hay un número finito de sumandos. Mas precisamente, tenemos

$$\mathbf{E}\, X = \sum_{k=1}^{m} x_k p_k.$$

Esperanza matemática para variables continuas

Sea X una variable aleatoria absolutamente continua, con densidad $p(x)$. Sea $g(x)$ una función continua. Entonces

$$\mathbf{E}\, g(X) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)p(x)dx, \tag{3}$$

donde la esperanza existe si la integral anterior es absolutamente convergente, es decir, si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|p(x)dx < \infty.$$

En en el caso particular en el que $g(x) = x$ para todo x real, obtenemos

$$\mathbf{E}\, X = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx, \tag{4}$$

si la integral anterior es absolutamente convergente.

Ejemplos

Ejemplo: distribución degenerada
Calcular la esperanza matemática de una variable aleatoria X con distribución degenerada.
Tenemos $\mathbf{P}(X = c) = 1$, donde c es una constante dada. La variable aleatoria X tiene distribución discreta, y toma el único valor c con probabilidad 1. Aplicando (2), obtenemos

$$\mathbf{E}\,X = c \times 1 = c.$$

Ejemplo Calcular la esperanza matemática de los puntos obtenidos al tirar un dado. Tenemos que calcular $\mathbf{E}\,X$ para una variable aleatoria X con distribución discreta, que toma, con probabilidad $1/6$, cada uno de los valores $1, 2, 3, 4, 5$ ó 6. Aplicando la fórmula (2), tenemos

$$\mathbf{E}\,X = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{21}{6} = 3{,}5.$$

Ejemplo: variable binomial

Calcular la esperanza matemática de una variable aleatoria X con distribución binomial con parámetros (n, p).
Esta variable aleatoria toma el valor k, con probabilidad

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k},$$

donde $q = 1 - p$, para $k = 0, 1, \dots, m$.
Aplicando la fórmula, tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\,X &= \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{n} k \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^k q^{n-k} = np \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} p^i q^{n-1-i}, \end{aligned}$$

donde pusimos $i = k - 1$.

Como la suma última vale $(q+p)^{n-1}=1$, obtenemos que $\mathbf{E}\,X=np$.

Ejemplo: distribución de Poisson

Calcular la esperanza matemática de una variable aleatoria X con distribución de Poisson con parámetro $\lambda > 0$. La variable aleatoria X toma el valor k con probabilidad

$$\mathbf{P}(X = k) = \lambda^k \frac{e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots .$$

Aplicando la fórmula (2), tenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\, X &= \sum_{k=0}^{\infty} k\, \mathbf{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

Ejemplo: distribución normal

Calcular la esperanza matemática de una variable aleatoria X con distribución normal con parámetros (a, σ).
La densidad es

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)}.$$

Aplicando la fórmula (4), tenemos

$$\mathbf{E}\, X = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-a)^2/(2\sigma^2)} dx.$$

Al realizar el cambio de variable $u = (x - a)/\sigma$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\, X &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a + \sigma u) e^{-u^2/2} du \\
&= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} du + \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-u^2/2} du = a,
\end{aligned}$$

en vista de que la primer integral vale $\sqrt{2\pi}$, y la segunda es nula, por ser el integrando una función impar.

Ejemplo: distribución de Cauchy

Calcular la esperanza matemática de una variable aleatoria X con distribución de Cauchy. La variable aleatoria considerada tiene densidad, dada por

$$p(x) = 1/(\pi(1 + x^2)).$$

La esperanza matemática de esta variable existe, si $\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx < \infty$.

Tenemos

$$\int_0^b xp(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^b \frac{x}{1+x^2}dx$$
$$= \frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^b = \frac{1}{2\pi}\ln(1+b^2) \to \infty,$$

si $b \to \infty$. En conclusión,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x|p(x)dx = 2\int_0^{\infty} xp(x)dx = \infty.$$

De esta forma, la esperanza matemática de la variable aleatoria considerada **no existe.**

Un enfoque general

Dada una v.a. X y una función continua $g(x)$ podemos definir una integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)dF(x),$$

donde $F(x)$ es la función de distribución de la variable aleatoria X.

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big),$$

Esta se denomina la **integral de Riemann-Stieltjes.**, Si la variable X es discreta, entonces $F(x_{k+1}) - F(x_k)$ es distinta de cero sólo si el intervalo $[x_k, x_{k+1}]$ contiene algún valor, digamos z_j, que tome X (porque sino es constante). Además, si el intervalo es suficientemente pequeño, tenemos

$$\Delta F = F(x_{k+1}) - F(x_k) = \mathbf{P}(X = z_j)$$

Como la g es continua, se puede demostrar que el resultado es

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big) = \sum_j g(z_j)\,\mathbf{P}(X = x_j).$$

que es la definición que dimos.

Por otra parte, si X tiene una densidad $p(x)$, que suponemos continua[1] entonces, aplicando el teorema de Lagrange

$$\Delta F = F(x_{k+1}) - F(x_k) = p(\hat{x}_k)(x_{k+1} - x_k),$$

donde $\hat{x}_k \in [x_k, x_{k+1}]$. Entonces,

$$\lim_{\substack{a \to -\infty \\ b \to +\infty}} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} g(\xi_k)\big(F(x_{k+1}) - F(x_k)\big) = \int_{\mathbb{R}} g(x)p(x)dx,$$

que es la definición que dimos.

[1] El argumento se generaliza para una cantidad finita de puntos integrando en intervalos de continuidad.

Para la despedida:

- Un hombre entra a un bar y le pregunta al cantinero cuál es la contraseña de su wi-fi.
- Cantinero: Pide una bebida.
- El hombre: De acuerdo, tomaré una coca cola.
- Cantinero: Son 3 dólares
- El hombre: Ahí tienes. Entonces, ¿cuál es la contraseña de wi-fi?
- Cantinero: Pide una bebida. Sin espacios y todo en minúsculas.