chistemat.es

ESTUDIANDO LOS ENTEROS

un sueño

Probabilidad - Clase 26
Propiedades de la esperanza matemática

Ernesto Mordecki

Facultad de Ciencias, Universidad de la República. Montevideo, Uruguay

Curso de la Licenciatura en Matemática - 2020

Contenidos

Definición de $\mathbf{E}\, g(X, Y)$

Propiedades

Caso general

Definición de $\mathbf{E}\, g(X, Y)$

Consideremos un vector aleatorio (X, Y) con función de distribución $F(x, y)$ y una función $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. De esa forma definimos una nueva variable aleatoria

$$Z = g(X, Y).$$

Si el vector aleatorio tiene distribución discreta, con valores (x_k, y_j) con probabilidades

$$p_{k,j} = \mathbf{P}(X = x_k, Y = y_j)\ (k, j = 1, 2, \dots),$$

entonces

$$\mathbf{E}\, g(X, Y) = \sum_{k,j} g(x_k, y_j) p_{kj}, \qquad (1)$$

si la serie anterior es absolutamente convergente.

Por analogía, si el vector aleatorio tiene densidad $p(x, y)$, entonces

$$\mathbf{E}\, g(X, Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) p(x, y) dx dy, \qquad (2)$$

si la integral anterior es absolutamente convergente.

Propiedades

Propiedad

Consideremos una variable aleatoria X con esperanza[1] *matemática $\mathbf{E}\,X$, y dos reales a, b. Entonces*

$$\mathbf{E}(aX + b) = a\,\mathbf{E}\,X + b.$$

Esta proposición es una consecuencia directa de las definiciónes. Por ejemplo, en el caso discreto

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(aX + b) &= \sum_j (ax_j + b)\,\mathbf{P}(X = x_j) \\ &= a\sum_j x_j\,\mathbf{P}(X = x_j) + b\sum_j \mathbf{P}(X = x_j) = a\,\mathbf{E}\,X + b.\end{aligned}$$

[1] Se entiende que existe la esperanza matemática de la variable aleatoria.

Propiedad

Consideremos dos variables aleatorias X, Y *con esperanzas respectivas* $\mathbf{E}\,X, \mathbf{E}\,Y$. *Entonces*

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}\,X + \mathbf{E}\,Y.$$

Demostración

Veamos la demostración cuando las variables tienen distribución discreta; X toma los valores $x_1, x_2, \dots$; Y toma los valores $y_1, y_2, \dots$. Aplicando la fórmula (1), tenemos

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(X+Y) &= \sum_{i,j} (x_i + y_j)\,\mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_i x_i \sum_j \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&\quad + \sum_j y_j \sum_i \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) \\
&= \sum_i x_i\,\mathbf{P}(X = x_i) + \sum_j y_j\,\mathbf{P}(Y = y_j) = \mathbf{E}\,X + \mathbf{E}\,Y,
\end{aligned}
$$

lo que concluye la demostración en el caso discreto.

Caso continuo

Si el vector aleatorio (X, Y) tiene densidad $p(x, y)$, aplicando la fórmula (2) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(X+Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x+y)p(x,y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\Big(\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dy\Big)dx + \int_{-\infty}^{\infty} y\Big(\int_{-\infty}^{\infty} p(x,y)dx\Big)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp_1(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} yp_2(y)dy = \mathbf{E}\,X + \mathbf{E}\,Y,\end{aligned}$$

donde $p_1(x)$ y $p_2(x)$ son las densidades de las variables aleatorias X e Y respectivamente.

Propiedad

Consideremos dos variables aleatorias independientes X, Y *con esperanzas respectivas* $\mathbf{E}\, X, \mathbf{E}\, Y$*. Entonces*

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}\, X\, \mathbf{E}\, Y. \tag{3}$$

Demostración

Demostremos esta proposición en primer lugar, en el caso en el que las variables aleatorias tienen distribución discreta; X toma los valores $x_1, x_2, \dots$; Y toma los valores $y_1, y_2, \dots$ Aplicando (1), tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(XY) &= \sum_{i,j} x_i y_j \, \mathbf{P}(X = x_i, Y = y_j) = \sum_{i,j} x_i y_j \, \mathbf{P}(X = x_i) \, \mathbf{P}(Y = y_j) \\ &= \sum_i x_i \, \mathbf{P}(X = x_i) \sum_j y_j \, \mathbf{P}(Y = y_j) = \mathbf{E}\, X \, \mathbf{E}\, Y.\end{aligned}$$

Caso continuo.

Si el vector aleatorio (X, Y) tiene densidad $p(x, y)$, por independencia obtenemos que $p(x, y) = p_1(x)p_2(y)$, donde $p_1(x)$ y $p_2(y)$ son las densidades de las variables aleatorias X e Y respectivamente. En vista de (2), tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(XY) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp(x, y)dxdy = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyp_1(x)p_2(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp_1(x)dx \int_{-\infty}^{\infty} yp_2(y)dy = \mathbf{E}\,X\,\mathbf{E}\,Y,\end{aligned}$$

concluyendo la demostración en el caso absolutamente continuo.

Caso general

- Veamos ahora una demostración en el caso general.
- Sabemos que el resultado es cierto en el caso discreto.
- Supongamos primero que X e Y son variables aleatorias independientes y no negativas, con esperanzas respectivas $\mathbf{E}\,X$ y $\mathbf{E}\,Y$,

Discretización

Consideremos para cada $n = 1, 2, \ldots,$ las variables aleatorias de la forma

$$X_n(\omega) = \begin{cases} (i-1)/2^n, & \text{si } (i-1)/2^n \leq X(\omega) < i/2^n \ (i = 1, \ldots, n2^n), \\ \\ 0, & \text{si } X(\omega) \geq n. \end{cases}$$

- Tenemos
$$\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$$
donde la sucesión $\{X_n(\omega)\}$ es no decreciente.

- Análogamente $\{Y_n(\omega)\}$, presenta el mismo comportamiento.

- X_n e Y_n son discretas (finitas!) ,

- Como X e Y son independientes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_n = a, Y_n = b) &= \mathbf{P}(a \leq X < a{+}2^{-n}, b \leq Y < b{+}2^{-n}) \\ &= \mathbf{P}(a \leq X < a + 2^{-n})\,\mathbf{P}(b \leq Y < b + 2^{-n}) \\ &= \mathbf{P}(X_n = a)\,\mathbf{P}(Y_n = b) \end{aligned}$$

luego las variables X_n e Y_n son independientes

- Entonces,
$$\mathbf{E}(X_n Y_n) = \mathbf{E}\, X_n \,\mathbf{E}\, Y_n. \tag{4}$$

- Veamos que $\mathbf{E}\, X_n \leq \mathbf{E}\, X_{n+1}$.

- En efecto, en el conjunto $\{a \leq X < a + 2^{-n}\}$ tenemos $X_n = a$

- Ese conjunto se parte en dos:
$$\{a \leq X < a + \frac{2^{-n}}{2}\} \quad \text{y} \quad \{a + \frac{2^{-n}}{2} \leq X < a + 2^{-n}\}$$

- en esos respectivos conjuntos
$$X_{n+1} = a, \quad \text{y} \quad X_{n+1} = a + \frac{2^{-n}}{2}$$

$$
\begin{aligned}
a\,\mathbf{P}(X_n = a) &= a\,\mathbf{P}(a \le X < a + 2^{-n}) \\
&= a\,\mathbf{P}(a \le X < a + \frac{2^{-n}}{2}) + a\,\mathbf{P}(a + \frac{2^{-n}}{2} \le X < a + 2^{-n}) \\
&\le a\,\mathbf{P}(a \le X < a + \frac{2^{-n}}{2}) + (a + \frac{2^{-n}}{2})\,\mathbf{P}(a + \frac{2^{-n}}{2} \le X < a + 2^{-n}) \\
&= a\,\mathbf{P}(X_{n+1} = a) + (a + \frac{2^{-n}}{2})\,\mathbf{P}(X_{n+1} = a + \frac{2^{-n}}{2}).
\end{aligned}
$$

De aquí obtenemos

$$
\mathbf{E}\,X_n \le \mathbf{E}\,X_{n+1}.
$$

Como $X_n(\omega) \uparrow X(\omega)$ para todo $\omega \in \Omega$, definimos[2]

$$\mathbf{E}\, X = \lim_n \mathbf{E}\, X_n.$$

En forma análoga

- obtenemos

$$\mathbf{E}\, Y_n \to \mathbf{E}\, Y,$$

- obtenemos

$$\mathbf{E}(X_n Y_n) \to \mathbf{E}(XY).$$

- Concluímos que

$$\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}\, X\, \mathbf{E}\, Y.$$

[2]Con teoría de la medida esto se demuestra.

- Sean ahora X e Y variables aleatorias arbitrarias, con esperanza (finita)
- Definimos

$$X^+(\omega) = \max\left(0, X(\omega)\right), \qquad X^-(\omega) = \max\left(0, -X(\omega)\right).$$

- Es claro que $X^+(\omega) \geq 0$, $X^-(\omega) \geq 0$, y que $X(\omega) = X^+(\omega) - X^-(\omega)$ para cada $\omega \in \Omega$.
- Definimos en forma análoga las variables aleatorias Y^+ e Y^-.

- Veamos que las variables aleatorias X^+ e Y^+ son independientes.
- Supongamos primero que $x \geq 0$, e $y \geq 0$.
- Tenemos las igualdades de sucesos $\{X^+ \leq x\} = \{X \leq x\}$, $\{Y^+ \leq y\} = \{Y \leq y\}$,
- Por ésto,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X^+ \leq x, Y^+ \leq y) &= \mathbf{P}(X \leq x, Y \leq y) \\ &= \mathbf{P}(X \leq x)\,\mathbf{P}(Y \leq y) = \mathbf{P}(X^+ \leq x)\,\mathbf{P}(Y^+ \leq y),\end{aligned}$$

  donde utilizamos que las variables aleatorias X e Y son independientes.
- Las posibilidades restantes son análogas.

Por ésto

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}(XY) &= \mathbf{E}(X^+ - X^-)(Y^+ - Y^-) \\
&= \mathbf{E}(X^+Y^+ - X^+Y^- - X^-Y^+ + X^-Y^-) \\
&= \mathbf{E}(X^+Y^+) - \mathbf{E}(X^+Y^-) - \mathbf{E}(X^-Y^+) + \mathbf{E}(X^-Y^-) \\
&= \mathbf{E}\,X^+\,\mathbf{E}\,Y^+ - \mathbf{E}\,X^+\,\mathbf{E}\,Y^- - \mathbf{E}\,X^-\,\mathbf{E}\,Y^+ + \mathbf{E}\,X^-\,\mathbf{E}\,Y^- \\
&= (\mathbf{E}\,X^+ - \mathbf{E}\,X^-)(\mathbf{E}\,Y^+ - \mathbf{E}\,Y^-) = \mathbf{E}\,X\,\mathbf{E}\,Y.
\end{aligned}
$$

concluyendo la demostración.

¡Que termine la abstinencia!