CIENCIAS PLANETARIAS

3er Parcial (35 puntos), 1 de Julio de 2026

Se valora claridad del planteo del problema, claridad en planteo de hipótesis y de razonamiento, planteamiento matemático correcto, realización correcta de operaciones matemáticas, realización correcta de cálculos numéricos, interpretación correcta de los resultados.

1. (10 puntos) Suponiendo que el coeficiente de producción de energía ϵ (energía por unidad de masa y de tiempo) del núcleo del Sol puede escribirse como $\epsilon(r) = \epsilon_0 + b.r$ y asumiendo que el radio del núcleo es $R_\odot/4$ hallar ϵ_0 (coeficiente en el centro del Sol) en función de $L_\odot$ y $M_\odot$. Asumir densidad uniforme para el Sol.

2. (12 puntos) Considere una población de asteroides todos con igual densidad $\rho = 2000$ kg/m^3. Se estima que la masa total contenida en dicha población de asteroides es $0{,}0001 M_\oplus$. La distribución cumulativa de tamaños es $N(R) = KR^{-2{,}5}$ donde K es una constante y R es el radio. Hallar $R_{1/2}$ tal que la masa contenida en los asteroides con $R > R_{1/2}$ es la mitad de la masa total.

3. (13 puntos) En una estrella de radio $R = 800{,}000$ km y masa $1{,}3 M_\odot$ se observa una oscilación en la velocidad radial dada por $V(t) = V_0 \sin(2\pi t/P)$, con $V_0 = 8$ m/s y $P = 200$ días. Hallar el semieje orbital del planeta que genera esa oscilación y su masa sabiendo que su plano orbital forma 90 grados con el plano del cielo. ¿Cuál es la mínima inclinación que podría tener el plano orbital del planeta respecto al plano del cielo para que puedan observarse tránsitos?

Datos:
$G = 6{,}674 \times 10^{-11}$ (MKS)
$k = 0{,}01720209895$ (Gauss)
1 ua $= 1,496 \times 10^{11}$ m
$M_\odot = 1,989 \times 10^{30}$ kg
$M_\oplus = 5{,}97 \times 10^{24}$ kg

Resolución del Problema 1: modelo interior solar.

Suponiendo que el coeficiente de producción de energía ϵ (energía por unidad de masa y de tiempo) del núcleo del Sol puede escribirse como $\epsilon(r) = \epsilon_0 + b \cdot r$ y asumiendo que el radio del núcleo es $R_\odot/4$, hallar ϵ_0 en función de $L_\odot$ y $M_\odot$. Asumir densidad uniforme para el Sol.

1. Relación de masa y densidad uniforme

El enunciado indica que el Sol tiene una densidad uniforme ρ. Por lo tanto, la masa total del Sol ($M_\odot$) se relaciona con su radio total ($R_\odot$) mediante el volumen de una esfera:

$$M_\odot = \rho \cdot V = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R_\odot^3 \implies \rho = \frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3} \tag{1}$$

La masa contenida en una capa esférica de radio infinitesimal r y espesor dr es $dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$. Sustituyendo la densidad uniforme ρ, obtenemos:

$$dm = \left(\frac{3M_\odot}{4\pi R_\odot^3}\right) 4\pi r^2 dr = \frac{3M_\odot}{R_\odot^3} r^2 dr \tag{2}$$

2. Ecuación de producción de energía

La luminosidad total del Sol ($L_\odot$) se genera por completo dentro de su núcleo, el cual se extiende desde el centro ($r = 0$) hasta el límite del núcleo ($R_n = R_\odot/4$). La ecuación diferencial para la generación de energía en simetría esférica establece que:

$$dL = \epsilon(r)\, dm \tag{3}$$

Sustituyendo el coeficiente de producción de energía dado, $\epsilon(r) = \epsilon_0 + b \cdot r$, y el elemento de masa dm:

$$dL = (\epsilon_0 + b \cdot r)\left(\frac{3M_\odot}{R_\odot^3} r^2 dr\right) = \frac{3M_\odot}{R_\odot^3}(\epsilon_0 r^2 + br^3)\, dr \tag{4}$$

3. Integración en el núcleo

Para obtener la luminosidad total $L_\odot$, integramos la expresión desde $r = 0$ hasta el radio del núcleo $r = R_\odot/4$:

$$L_\odot = \int_0^{R_\odot/4} \frac{3M_\odot}{R_\odot^3}(\epsilon_0 r^2 + br^3)\, dr \tag{5}$$

Sacando las constantes fuera de la integral y resolviendo los términos:

$$L_\odot = \frac{3M_\odot}{R_\odot^3}\left[\epsilon_0 \frac{r^3}{3} + b\frac{r^4}{4}\right]_0^{R_\odot/4} \tag{6}$$

Evaluando en el límite superior $r = R_\odot/4$:

$$L_\odot = \frac{3M_\odot}{R_\odot^3}\left[\frac{\epsilon_0}{3}\left(\frac{R_\odot}{4}\right)^3 + \frac{b}{4}\left(\frac{R_\odot}{4}\right)^4\right] \tag{7}$$

$$L_\odot = \frac{3M_\odot}{R_\odot^3}\left[\frac{\epsilon_0 R_\odot^3}{3\cdot 64} + \frac{bR_\odot^4}{4\cdot 256}\right] \tag{8}$$

$$L_\odot = \frac{3M_\odot}{R_\odot^3}\left[\frac{\epsilon_0 R_\odot^3}{192} + \frac{bR_\odot^4}{1024}\right] \tag{9}$$

Distribuyendo el factor exterior $\frac{3M_\odot}{R_\odot^3}$ e introduciendo la simplificación $\frac{3}{192} = \frac{1}{64}$:

$$L_\odot = M_\odot\left[\frac{\epsilon_0}{64} + \frac{3bR_\odot}{1024}\right] \tag{10}$$

4. Despeje de ϵ_0

Dividiendo entre la masa solar $M_\odot$ a ambos lados:

$$\frac{L_\odot}{M_\odot} = \frac{\epsilon_0}{64} + \frac{3bR_\odot}{1024} \tag{11}$$

Aislamos el término que contiene a ϵ_0:

$$\frac{\epsilon_0}{64} = \frac{L_\odot}{M_\odot} - \frac{3bR_\odot}{1024} \tag{12}$$

Multiplicando toda la ecuación por 64, y considerando que $64/1024 = 1/16$, obtenemos el resultado final:

$$\epsilon_0 = 64\frac{L_\odot}{M_\odot} - \frac{3}{16}bR_\odot \tag{13}$$

5. Expresión de b en función de los datos del Sol

Asumiendo la condición de frontera física donde la producción de energía se anula en el borde del núcleo, es decir, $\epsilon(R_\odot/4) = 0$:

$$\epsilon_0 + b\left(\frac{R_\odot}{4}\right) = 0 \implies b = -\frac{4\epsilon_0}{R_\odot} \tag{14}$$

Sustituyendo esta relación en la ecuación obtenida para ϵ_0:

$$\epsilon_0 = 64\frac{L_\odot}{M_\odot} - \frac{3}{16}\left(-\frac{4\epsilon_0}{R_\odot}\right)R_\odot \tag{15}$$

$$\epsilon_0 = 64\frac{L_\odot}{M_\odot} + \frac{3}{4}\epsilon_0 \tag{16}$$

Agrupando los términos de ϵ_0 en el miembro izquierdo:

$$\frac{1}{4}\epsilon_0 = 64\frac{L_\odot}{M_\odot} \implies \epsilon_0 = 256\frac{L_\odot}{M_\odot} \tag{17}$$

Finalmente, sustituimos ϵ_0 para obtener el parámetro b expresado únicamente en función de las propiedades globales del Sol ($L_\odot$, $M_\odot$ y $R_\odot$):

$$b = -1024\frac{L_\odot}{M_\odot R_\odot} \tag{18}$$

Resolución del Problema 2: poblacion de asteroides.

Considere una población de asteroides todos con igual densidad $\rho = 2000$. Se estima que la masa total contenida en dicha población de asteroides es $0,0001 M_\oplus$. La distribución acumulativa de tamaños es $N(R) = KR^{-2,5}$ donde K es una constante. Hallar $R_{1/2}$ tal que la masa contenida en los asteroides con $R > R_{1/2}$ es la mitad de la masa total.

1. Distribución diferencial de tamaños

La distribución acumulativa nos indica el número de asteroides con un radio mayor que R:

$$N(R) = KR^{-2,5} \tag{19}$$

La distribución diferencial $n(R)$, que representa el número de asteroides por intervalo infinitesimal de radio ($dN = -n(R)dR$), se obtiene derivando respecto a R:

$$n(R) = -\frac{dN}{dR} = 2,5KR^{-3,5} \tag{20}$$

2. Masa total de la población

Asumiendo asteroides esféricos de radio R y densidad ρ, la masa de un único asteroide es:

$$m(R) = \frac{4}{3}\pi\rho R^3 \tag{21}$$

La masa total contenida en la población entre un radio mínimo $R_{\text{mín}}$ y un radio máximo $R_{\text{máx}}$ se calcula mediante la integral:

$$M_{\text{tot}} = \int_{R_{\text{mín}}}^{R_{\text{máx}}} m(R)n(R)\, dR \tag{22}$$

Sustituyendo las expresiones anteriores:

$$\begin{aligned} M_{\text{tot}} &= \int_{R_{\text{mín}}}^{R_{\text{máx}}} \left(\frac{4}{3}\pi\rho R^3\right)\left(2,5KR^{-3,5}\right)\, dR \\ &= \frac{10}{3}\pi\rho K \int_{R_{\text{mín}}}^{R_{\text{máx}}} R^{-0,5}\, dR \end{aligned} \tag{23}$$

Resolviendo la integral ($\int R^{-0,5} dR = 2R^{0,5}$):

$$M_{\text{tot}} = \frac{20}{3}\pi\rho K\left(R_{\text{máx}}^{0,5} - R_{\text{mín}}^{0,5}\right) \tag{24}$$

3. Determinación analítica de $R_{1/2}$

Buscamos el radio de corte $R_{1/2}$ tal que la masa acumulada de los asteroides mayores a este valor sea exactamente la mitad de la masa total ($M_{\text{tot}}/2$):

$$\int_{R_{1/2}}^{R_{\text{máx}}} m(R)n(R)\, dR = \frac{1}{2}M_{\text{tot}} \tag{25}$$

Sustituyendo el resultado de la integración:

$$\frac{20}{3}\pi\rho K\left(R_{\text{máx}}^{0,5}-R_{1/2}^{0,5}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{20}{3}\pi\rho K\left(R_{\text{máx}}^{0,5}-R_{\text{mín}}^{0,5}\right)\right] \tag{26}$$

Simplificando los factores constantes a ambos lados de la ecuación:

$$R_{\text{máx}}^{0,5}-R_{1/2}^{0,5}=\frac{1}{2}R_{\text{máx}}^{0,5}-\frac{1}{2}R_{\text{mín}}^{0,5} \tag{27}$$

Despejando $R_{1/2}^{0,5}$:

$$R_{1/2}^{0,5}=\frac{1}{2}R_{\text{máx}}^{0,5}+\frac{1}{2}R_{\text{mín}}^{0,5} \tag{28}$$

Elevando al cuadrado obtenemos la **expresión analítica exacta**:

$$R_{1/2}=\left(\frac{R_{\text{máx}}^{0,5}+R_{\text{mín}}^{0,5}}{2}\right)^{2} \tag{29}$$

4. Solución numérica aproximada

En astrofísica planetaria, para este tipo de índices espectrales, la masa está fuertemente dominada por los objetos más grandes, por lo que se puede aproximar el límite inferior a cero ($R_{\text{mín}}\to 0$):

$$R_{1/2}\approx\frac{1}{4}R_{\text{máx}} \tag{30}$$

Para hallar el valor de $R_{\text{máx}}$, imponemos que el asteroide más grande de la población es un único objeto ($N(R_{\text{máx}})=1$):

$$1=KR_{\text{máx}}^{-2,5}\implies K=R_{\text{máx}}^{2,5} \tag{31}$$

Sustituyendo K y fijando $R_{\text{mín}}=0$ en la ecuación de la masa total:

$$M_{\text{tot}}=\frac{20}{3}\pi\rho R_{\text{máx}}^{2,5}\cdot R_{\text{máx}}^{0,5}=\frac{20}{3}\pi\rho R_{\text{máx}}^{3} \tag{32}$$

Utilizando los datos del problema:

- $\rho=2000\ \text{kg/m}^3$
- $M_\oplus\approx 5,97\times10^{24}\ \text{kg}\implies M_{\text{tot}}=0,0001M_\oplus\approx 5,97\times10^{20}\ \text{kg}$

Despejando $R_{\text{máx}}$:

$$R_{\text{máx}}^{3}=\frac{3M_{\text{tot}}}{20\pi\rho}=\frac{3\cdot(5,97\times10^{20})}{20\pi\cdot 2000}\approx 1,425\times10^{16}\ \text{m}^3 \tag{33}$$

$$R_{\text{máx}}\approx 242{,}455\ \text{m}\approx 242,5\ \text{km} \tag{34}$$

Finalmente, calculamos $R_{1/2}$:

$$R_{1/2}\approx\frac{242,5\ \text{km}}{4}\approx 60,6\ \text{km} \tag{35}$$

Resolución del Problema 3: exoplaneta.

En una estrella de radio $R = 800,000$ km y masa $1,3 M_\odot$ se observa una oscilación en la velocidad radial dada por $V(t) = V_0 \sin(2\pi t/P)$, con $V_0 = 8$ m/s y $P = 200$ días. Hallar el semieje orbital del planeta que genera esa oscilación y su masa sabiendo que su plano orbital forma 90 grados con el plano del cielo. ¿Cuál es la mínima inclinación que podría tener el plano orbital del planeta respecto al plano del cielo para que puedan observarse tránsitos?

1. Cálculo del semieje orbital (a)

Dado que la masa del planeta m es despreciable frente a la de la estrella ($M_\star = 1,3 M_\odot$), podemos aplicar la tercera ley de Kepler simplificada:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM_\star} a^3 \implies a = \left(\frac{GM_\star P^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \tag{36}$$

Convertimos los datos al Sistema Internacional (SI):

- $M_\star = 1,3 \times 1,989 \times 10^{30}$ kg $= 2,5857 \times 10^{30}$ kg
- $P = 200$ días $= 200 \times 86400$ s $= 1,728 \times 10^7$ s
- $G = 6,674 \times 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}

Sustituyendo los valores numéricos:

$$\begin{aligned} a &= \left(\frac{(6,674 \times 10^{-11}) \times (2,5857 \times 10^{30}) \times (1,728 \times 10^7)^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} \\ &= \left(\frac{5,1572 \times 10^{34}}{39,4784} \right)^{1/3} \approx (1,3063 \times 10^{33})^{1/3} \approx 1,093 \times 10^{11} \text{ m} \end{aligned} \tag{37}$$

Expresado en Unidades Astronómicas (1 UA $= 1,496 \times 10^{11}$ m):

$$a \approx 0,731 \text{ UA} \tag{38}$$

2. Cálculo de la masa del planeta (m)

Para una órbita circular ($e = 0$), la amplitud de la velocidad radial semiamplitud V_0 de la estrella se relaciona con la masa del planeta mediante:

$$V_0 = \left(\frac{G}{M_\star} \right)^{1/2} \frac{m \sin i}{\sqrt{a}} \tag{39}$$

El enunciado especifica que el plano orbital forma 90° con el plano del cielo, lo cual implica que vemos la órbita perfectamente de perfil ($i = 90°$ y $\sin i = 1$). Despejando m:

$$m = V_0 \sqrt{\frac{a M_\star}{G}} \tag{40}$$

Sustituyendo con $V_0 = 8$ m/s:

$$m = 8 \times \sqrt{\frac{(1,093 \times 10^{11}) \times (2,5857 \times 10^{30})}{6,674 \times 10^{-11}}}$$
$$= 8 \times \sqrt{4,2346 \times 10^{51}} \approx 8 \times (6,5074 \times 10^{25}) \approx 5,206 \times 10^{26} \text{ kg} \tag{41}$$

Considerando la masa de Júpiter ($M_J \approx 1,898 \times 10^{27}$ kg):

$$m \approx 0,274 M_J \tag{42}$$

3. Inclinación mínima para la observación de tránsitos ($i_{\text{mín}}$)

La condición geométrica límite para que ocurra un tránsito astronómico es que, durante la conjunción, el planeta proyectado alcance justo el limbo del disco estelar. Esto se cumple si:

$$a \cos i_{\text{mín}} = R_\star \implies \cos i_{\text{mín}} = \frac{R_\star}{a} \tag{43}$$

Sustituyendo el radio de la estrella $R_\star = 800,000$ km $= 8 \times 10^8$ m y el semieje calculado:

$$\cos i_{\text{mín}} = \frac{8 \times 10^8}{1,093 \times 10^{11}} \approx 0,007319 \tag{44}$$

Calculando el arco coseno para obtener el ángulo respecto al plano del cielo:

$$i_{\text{mín}} = \arccos(0,007319) \approx 89,58^\circ \tag{45}$$

Por lo tanto, el rango de inclinación requerido para observar tránsitos es $89,58^\circ \leq i \leq 90^\circ$, siendo la inclinación mínima respecto al plano del cielo:

$$i_{\text{mín}} \approx 89,58^\circ \tag{46}$$